Zbl 024.39102

Erdős, Paul; Turán, Pál

On interpolation. III: Interpolatory theory of polynomials. (In English)

Ann. of Math., II. Ser. 41, 510-553 (1940).

Nach einem von *Fejér* eingeführten Prinzip erhalten die Verff. mehrere Sätze, die sich auf eine Polynomfolge

$$\omega_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu^{(n)})$$

beziehen, deren sämtliche Wurzeln im Intervalle $(-1, +1)$ liegen. Sie werden aus vorausgesetzten Eigenschaften der zur Dreiecksmatrix $(x_\nu^{(n)})$ gehörigen Grundpolynome

$$l_{\nu,n}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_\nu^{(n)}(x - x_\nu^{(n)})}$$

gewonnen. Gilt z. B. in der ganzen komplexen z-Ebene mit Ausnahme des reellen Intervalles $(-1, +1)$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ und für genügend großes n für alle ν

$$|l_{\nu,n}(x)|^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \varepsilon,$$

so gilt

$$\lim_{n\to\infty} [\omega_n(z)]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{1}$$

Weitere Ergebnisse beziehen sich auf die Abschätzung des Abstandes zweier aufeinanderfolgender Wurzeln von $\omega_n(x)$ und auf die Verteilung dieser Wurzeln in einem in $(-1, +1)$ gelegenen Intervall (α, β). Diese Sätze gelten unter gewissen Einschränkungen insbesondere für die stark normalen Folgen im Sinne von Fejér und für Folgen von Orthogonalpolynomen in $(-1, +1)$ bezüglich einer Lebesgue-integrierbaren Gewichtsfunktion $p(x)$. Für diese gilt z. B. (1), wenn $p(x)$ nicht negativ ist und ihre Nullstellen eine Menge vom Maß 0 bilden. Nicht vom Fejérschen Typ sind einige weitere Sätze, die Abschätzungen für $|\omega_n(x)|$ nach oben und nach unten liefern.
Für die Teile I und II vgl. Zbl 016.10604 und Zbl 019.40402.

C.Miranda (Torino)

Classification:
41A05 Interpolation
42A15 Trigonometric interpolation