Zbl 064.30101
Erdős, Pál; Turán, Pál
On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation. (In English. RU summary)
Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6, 47-66 (1955). [0001-5954]

Unter den Dreiecksmatrizen A mit der n-ten Reihe $1 \geq x_{1n} > x_{2n} > \cdots > x_{nn} \geq -1$ gibt es bekanntlich keine mit der Eigenschaft, daß die Lagrangeschen Interpolationspolynome

$$L_n(f,A) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n}) l_{\nu n}(x,A)$$

für jedes in $[-1,1]$ stetige $f(x)$ dort gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren. Der Grund liegt im Verhalten der Konstanten

$$M_n(A) \equiv \max_{-1\leq x\leq 1} \lambda_n(x,A) = \max_{-1\leq x\leq 1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x,A)|;$$

es ist nämlich für alle A stets $\overline{\lim}_{n\to\infty} M_n(A) = +\infty$ (G. Faber). Anderseits spielen die Funktionen $\lambda_n(x,A)$ auch bei der Konvergenztheorie der L-Interpolation eine wesentliche Rolle, denn für $M_n(A) < c_1 \cdot n^\beta$, $0 < \beta < 1$, und $f(x) \in \mathrm{Lip}\gamma$, $\gamma > \beta$ konvergieren die $L_n(f,A)$ in $-1 \leq x \leq 1$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

Die Verff. zeigen nun, daß eine vollständige Konvergenz-Divergenztheorie der L-Interpolation auf der Untersuchung der Zahlen $M_n(A)$ allein nicht aufgebaut werden kann. Ist $A(\beta)$ die Klasse aller A-Matrizen, für die mit beliebig kleinem, positivem ε gilt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, M_n(A) \cdot n^{-\beta-\varepsilon} < c_2(\varepsilon), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, M_n(A) n^{-\beta+\varepsilon} > c_3(\varepsilon),$$

wachsen also grob gesagt die $M_n(A)$ wie n^β, so nennen die Verff. für ein festes β die Klasse $\mathrm{Lip}\gamma$ bezüglich der Matrizen $A(\beta)$ "gut", wenn für alle $A \in A(\beta)$ und $f \in \mathrm{Lip}\gamma$ die $L_n(f,A)$ in $[-1,1]$ gleichmäßig gegen $f(x)$ gehen, und "schlecht" wenn es für alle $A \in A(\beta)$ ein $f_1 \in \mathrm{Lip}\gamma$ gibt, so daß die $L_n(f_1,A)$ für $n \to \infty$ in $[-1,1]$ nicht beschränkt sind. Für ein festes β, $0 < \beta < 1$, sind alle $\mathrm{Lip}\gamma$-Klassen mit $\gamma < \beta/(\beta+2)$ schlechte Klassen für Matrizen $A(\beta)$, alle $\mathrm{Lip}\gamma$-Klassen mit $\gamma > \beta$ sind gute Klassen. In beiden Fällen genügt die "grobe" Theorie, die sich auf die Betrachtung der $M_n(A)$ stützt. Entscheidend ist nun, daß genau im Falle $\beta/(\beta+2) < \gamma < \beta$ die $\mathrm{Lip}\gamma$-Klasse bezüglich $A(\beta)$ weder gut noch schlecht ist, so daß eine "feinere" Theorie benutzt werden muß die über das Verhalten der $M_n(A)$ hinaus noch die weiteren Eigenschaften der Matrix A berücksichtigt. Die für die Theorie der L- Interpolation wichtige Arbeit ist Herrn L. Féjer zum 75. Geburtstag gewidmet.

P.Heuser

Classification:
41A05 Interpolation

Keywords:
Lipγ-class; L-interpolation; Lagrange interpolation polynomial