Zbl 072.04103
Erdős, Pál; Fodor, G.
Some remarks on set theory. V. (In English)
Acta Sci. Math. 17, 250-260 (1956). [0001-6969]

Sei E eine Menge der Mächtigkeit kard$E = \mathfrak{m}$; jedem $x \in E$ werde eine nichtleere Teilmenge $f(x)$ von E zugeordnet. Zwei verschiedeneElemente x, y aus E heißen unabhängig, wenn $x \notin f(y)$ und $y \notin f(x)$. Eine Teilmenge von E heißt frei, wenn sie aus einem einzigen Element besteht oder wenn je zwei verschiedene ihrer Elemente unabhängig sind. Abkürzungen: $\sum'{}_F = \bigcup_{x\in F} f(x)$, $\prod'{}_F = \bigcup_{x,y}(f(x) \cap f(y))$, wo $x, y \in F$, $x \neq y$ $(F \subset E)$. Eine Menge $F \subset E$ wird die Eigenschaft $T(\mathfrak{q}, p)$ zugeschrieben, wenn kard$\sum'{}_F = \mathfrak{q}$ und kard$\prod'{}_F < \mathfrak{p}$ ist (für $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{m}$). — F heißt abgeschlossen, wenn $f(x) \subset F$ für $x \in F$ gilt. — Es soll stets kard$\sum'{}_E = \mathfrak{m}$ vorausgesetzt werden. — Man wird, um Fragestellungen von Interesse zu erhalten, den $f(x)$ gewisse Bedingungen auferlegen, etwa eine der folgenden:
(A) Es gibt ein $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, so daß kard$f(x) < \mathfrak{n}$ für alle $x \in E$ ist.
(B) Es gibt ein $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, so daß man kard$(f(x) \cap f(y)) < \mathfrak{n}$ für $x \neq y$, $x, y \in E$ hat.
(C) Für alle verschiedenen Paare x, y aus E gilt $f(x) \not\subset f(y)$ und $f(y) \not\subset f(x)$.
(D) Für jedes $x \in E$ hat die Menge aller $y \in E$ mit $f(x) \cap f(y) \neq 0$ eine kleinere Mächtigkeit als $\mathfrak{m}$.
Fragen: Impliziert eine der genannten Bedingungen die Existenz einer Menge $F \subset E$ mit der Eigenschaft $T(\mathfrak{q}, p)$ oder die Existenz von freien Mengen gewisser Mächtigkeiten? Hinsichtlich der Bedingung (A) sind diese Probleme in früheren Abhandlungen behandelt worden; die gegenwärtige ist unter anderem der Berücksichtigung der Bedingungen (B), (C) und (D) gewidmet.
Weitere Frage: Existiert auf Grund von (B) und der Voraussetzung kard$f(x) < \mathfrak{m}$ für alle $x \in E$ stets eine freie Teilmenge von E mit der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$? Ohne die allgemeine Kontinuumhypothese (=a.K.H.) wird allgemein für $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ nur die Existenz einer freien Teilmenge der Mächtigkeit $\aleph_0$ bewiesen. Ein weitergehendes Teilresultat wird mit den Sätzen 6 und 7 gegeben: Es existiert eine freie Teilmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ jedenfalls in folgenden Fällen: 1. $\mathfrak{m} = \aleph_1$ und $\mathfrak{n} < \aleph_0$; 2. $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$, $\mathfrak{r} = \aleph_\alpha$ und $\mathfrak{n} < \mathfrak{r}^*$; 3. $\mathfrak{m}$ singulär. In den Fällen 2. und 3. wird jedoch zum Beweis die a.K.H. benützt. Dabei bedeutet $\mathfrak{r}^*$ (bei beliebigen $\mathfrak{r}$) die kleinste Kardinalzahl, für welche $\mathfrak{r}$ als Summe von $\mathfrak{r}^*$ Kardinalzahlen dargestellt werden kann, die kleiner als $\mathfrak{r}$ sind; $\mathfrak{r}(\neq 0)$ heißt singulär bzw. regulär, wenn $\mathfrak{r}^* <$ bzw. $= \mathfrak{r}$ ist.
Schließlich werden die beiden folgenden Fragen beantwortet: a) Impliziert die Bedingung (A) die Existenz einer echten abgeschlossenen Teilmenge von E mit der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$? b) Impliziert (A) die Existenz zweier fast disjunkter abgeschlossener Teilmengen von E mit der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$? [F_1 und F_2 heißen fast disjunkt, wenn kard$(F_1 \cap F_2) < \min(\text{kard}F_1, \text{kard}F_2)$ ist].
Die Antwort auf a) lautet bejahend, wenn es ein reguläres $\mathfrak{r}$ mit $\aleph_0 < \mathfrak{n} le \mathfrak{m}$ gibt, und verneinend, wenn $\mathfrak{m} > \aleph_0$ ist, einen singulären unmittelbaren Vorgänger hat und $\mathfrak{n}$ als dieser Vorgänger gewählt wird. Unter der letzten Bedingung ist auch b) zu verneinen, während unter der ersten auch b) bejaht werden

kann; zum Beweis der letzteren Aussage wird jedoch die a.K.H. benützt, wenn $\mathfrak{m}(\neq \aleph_{\alpha+\omega})$ die Summe von $\mathfrak{n}$ Kardinalzahlen ist, die $< \mathfrak{m}$ sind (Sätze 17-20).

W.Neumer

Classification:
04A10 Ordinal and cardinal numbers; generalizations