
Zbl 414.10053

Erdős, Paul; Nathanson, Melvyn B.

Systems of distinct representatives and minimal bases in additive number theory. (In English)

Number theory, Proc. Conf., Carbondale 1979, Lect. Notes Math. 751, 98- 107 (1979).

[For the entire collection see Zbl 405.00004.]

Mit $A \subseteq \mathbb{N}_0$ und $h \in \mathbb{N}$ ist wie üblich $hA := \{z \in \mathbb{N}_0 | z = \sum_j x_j;\ a_j \in A;\ x_j \in \mathbb{N}_0;\ \sum_j x_j = h\}$. Sei $U \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $|U| = \infty$, eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt (asymptotische) Basis h-ter Ordnung für U, wenn es ein N gibt, so daß für jedes $z \in U$ mit $z > N$ gilt $z \in hB$. Wenn B Basis h-ter Ordnung für U ist, aber keine echte Teilmenge von B diese Eigenschaft besitzt, heißt B Minimalbasis h-ter Ordnung für U. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt (asymptotische) Nichtbasis h-ter Ordnung für U, wenn es unendlich viele $z \in U$ gibt mit $z \notin hA$. Wenn A Nichtbasis h-ter Ordnung für U ist, aber keine echte Obermenge von A Nichtbasis h-ter Ordnung für U ist, heißt A maximale Nichtbasis h-ter Ordnung für U. Ist A Nichtbasis h-ter Ordnung für U und $C \subseteq \mathbb{N}_0$, aber $A \cup \{c\}$ ist Basis h-ter Ordnung für U für jedes $c \in C \setminus A$, dann heißt A maximale Nichtbasis h-ter Ordnung für U bezüglich C.

In der vorliegenden Arbeit wird nun weiterhin $h = 2$ betrachtet. Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ bedeutet $r_A(n)$ die Anzahl der Darstellungen einer Zahl n in der Form $n = a_i + a_j$ mit $a_i, a_j \in A$ und $a_i \le a_j$. Dann werden u.a. folgende Sätze bewiesen:

Satz 1: Sei B Basis 2. Ordnung für $U = \{u_1 < u_2 < \dots\}$ mit der Eigenschaft (*) $r_s(u_n) > c \log n$ für alle $n \ge N_1$, wobei die Konstante $c > \log^{-1}(4/3)$ ist. Ferner gebe es zu jedem $b_1 \in B$ unendlich viele $b_j \in B$, so daß $b_1 + b_j \in U$. Dann enthält B als Teilmenge eine Minimalbasis 2. Ordnung für U.

Satz 3: Mit dem Lebesgue-Maß auf dem Wahrscheinlichkeitsraum aller Zahlenfolgen $\subseteq \mathbb{N}$ enthält eine Folge mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Minimalbasis 2. Ordnung für $\mathbb{N}$.

Satz 4: Die Menge der quadratfreien Zahlen enthält als Teilmenge eine Minimalbasis 2. Ordnung für $\mathbb{N}$.

Satz 5: Die Menge $\{p, pq | p, q$ ungerade Primzahlen$\}$ enthält als Teilmenge eine Minimalbasis 2. Ordnung für die Menge der positiven geraden Zahlen. Die weiteren Sätze machen Aussagen über Nichtbasen. Als Analogon zu Satz 1 hat man

Satz 6: Sei B Basis 2. Ordnung für U mit der oben genannten Eigenschaft (*). Ferner gebe es zu jedem $L \ge 1$ unendlich viele $u_n \in U$, so daß $\mathbb{N} \cap [u_n - L, u_n] \subseteq B$. Dann enthält B als Teilmenge eine maximaleNichtbasis 2. Ordnung für U.

Von den weiteren Aussagen sei noch erwähnt

Satz 9: Sei B Basis 2. Ordnung für U mit der Eigenschaft (*). Fernergebe es zu jeder endlichen Teilmenge $F \subseteq B$ unendlich viele $u_n \in U$ mit $u_n - b \in B$ für alle $b \in F$. Dann gibt es eine Teilmenge $A \subseteq B$, die Nichtbasis 2. Ordnung für U bezüglich B ist. (Für einige der hier bewiesenen Resultate über quadratfreie Zahlen vgl. auch *P.Erdős* and *M.B.Nathanson*, J. Number Theory 11, 197-208 (1979; Zbl 409.10042).)

E.Härtter

Classification:
11B13 Additive bases

Keywords:
minimal asymptotic basis of order h; representations of integers