An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 11(1), 2003, 133–138

FONCTION DE YOUNG ET CONTINUITÉ DES TRAJECTOIRES D'UN PROCESSUS

Gheorghe Niculescu

Au Professeur Silviu Sburlan, á sa 60^{-eme} anniversaire

Abstract

Ce travail est consacré à l'étude de l'existence d'une fonction aléatoire sur un espace métrique compacte T à valeurs dans l'espace des fonctions définies sur T, à valeurs réelles et mesurables. Le résultat de continuité obtenu par la mèthode de mesures majorantes utilisent des fonctions de Young.

0. Introduction

Une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ est appllée fonction de Young, si elle est continue, paire, convexe et vérifie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=0\ ,\ \lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=\infty.$$

Du fait de ses propriétés de dérivation, une fonction de Young peut s'écrire:

$F(x)=\int_0^{|x|}\varphi(t)\,dt$,où $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$

est continue à droite, croissante, s'annule à l'origine et tend vers l'infini avec t.

Soient (T,d) un space métrique séparable, $\mathcal{T}$ la tribu borélienne engendrée par d-boules de T et μ une mesure de probabilité sur $(T,\mathcal{T})$. La mesure de probabilité μ est définie de la manière suivante:

$\mu(A)=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\cdot N^{-1}(T,2^{-m}\cdot a)\cdot a_m,$

pour tout $A\in\mathcal{T}$, tel que $\mu(A)>0,\ (m\geq 1,\ a>0)$.

On notera:

- $N(T,2^{-m}\cdot a)$ est le nombre minimal de d-boules ouvertes et disjointes de rayon $2^{-m}\cdot a$ nécessaires à recouvrer T;

- a_m est le nombre maximal de centrées dans A.

Comme précédemment, (T,d) désigne un espace métrique séparable et (Ω, K, P) un espace d'épreuves P-complet. On a donné

$$X = \{X(\omega,t) : \omega \in \Omega,\ t \in T\},$$

un processus alèatoire réel. Soit $r \geq 1$ et supposons

$$\delta(s,t) = \left[E \mid X(\omega,s) - X(\omega,t)^r\right]^{1/r},$$

fini pour tout couple $(s,t) \in T \times T$, δ est donc un écart que l'on exigera d-continu sur T. Cette hypothèse implique que X est continu en probabilité sur T, à valeurs réelles et mesurables.

1. Majoration pour l'oscillation du processus

Soient un processus aleatoire réelle $X(\omega,t)$ définie et à les trajectoires dans $M(T)$.

On considére:

1. $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ - une fonction de Young;
2. $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ - une fonction continue, croissant et $\lim_{x\to 0} p(x) = 0$; on notera $\overline{p}(x) = p(2x)$;
3. la variable aléatoire, $\xi(\omega)$ definie sur (Ω, K, P) tel que pour tout $\omega \in \Omega$, $E(\xi(\omega)) < \infty$;
4. une mesure de probabilité μ sur $(T, \mathcal{T})$ appllée mesure majorante.

Le nom de mesure majorante est définie de la manière suivante:

Definition. Soit (T,d) un espace métrique séparable, $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les d-boules ouvertes de T et δ un écart sur T, d-continu.

Si F est une fonction de Young, on dira qu'une mesure de probabilité μ sur $(T, \mathcal{T})$ est une F - mesure majorante par rapport à δ si:

$$\sup_{t\in T} \int_0^{\frac{d(T)}{2}} F^{-1}\left[\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right] du < \infty.$$

On notera $d(T)$ le diamètre de T et $B_\delta(t,u)$ désigne la boule ouverte de T de centre t et de rayon u.

De plus, on notera L_F l'ensemble des processus aléatoires, $X(\omega,t)$, définies sur $\Omega \times T$ que ayants les trajectoires dans $M(T)$ et vérifiant l'hypothèse suivante:

(H) Il existe une mesure de probabilité μ sur $(T, \mathcal{T})$ et une fonction de Young F telles que pour tout $s,t \in T$ on ait:

$$\int_T \int_T F\left(\left|\frac{X(\omega,s) - X(\omega,t)}{p(d(s,t))}\right|\right) d\mu(s)\, d\mu(t) < \xi(\omega).$$

La méthode de majoration du processus est basée sur le théorème suivante:

Théorème. *Si* $X(\omega,t) \in L_F$ *et*

$$\int_0^1 F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\mu^2\left[B(s,u/2)\right]}\right|\right) d\overline{p}(u) < \infty$$

presque - sûrement, alors:

$$|X(\omega,s) - X(\omega,t)| \leq 10 \sup_{x\in T} \int_0^{d(s,t)} F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\mu^2\left[B(x,u/2)\right]}\right|\right) d\overline{p}(u).$$

Où $B(x,r)$ *désigne la boulle ouverte de* T *de centre* x *et de rayon* r*, et* $\overline{p}(u) = p(2u)$.

Pour établir ce théorème, sont nécessaires plusieurs lemmes.

Lemme 1. *Soient* $X(\omega,t) \in L_F$ *et* $A, B \in B(T)$*, tels que* $(A) \neq \emptyset$ *et* $(B) \neq \emptyset$*, alors on a:*

$$|X_A(\omega) - X_B(\omega)| < F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda(A)\cdot\lambda(B)}\right|\right)\cdot p(d_o).$$

où

$$X_A(\omega) = (\lambda(A))^{-1}\int_A X(\omega,u)\,d\lambda(u)$$

et

$$d_o = \sup\{d(s,t) : s \in A, t \in B\}.$$

Demonstration.

Par application de l'inégalité de Jensen, on obtient:

$$(\lambda(A)\cdot\lambda(B))^{-1}\int_A\int_B (X(\omega,s) - X(\omega,t))\,d\lambda(s)\,d\lambda(t) <$$

$$< F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda(A)\cdot\lambda(B)}\right|\right)\cdot p(d_o).$$

Alors:

$$|X_A(\omega) - X_B(\omega)| < F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda(A)\cdot\lambda(B)}\right|\right)\cdot p(d_o).$$

Lemme 2. *Supposons que la condition suivante soit réalisée:*

$$\int_0^1 F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\mu^2\left[B(s,u/2)\right]}\right|\right) d\overline{p}(u) < \infty$$

pour tout $s \in T$. *Alors, pour* $X(\omega, s) \in L_F$, $\lim_{r\to 0} X_r(\omega, s)$ *existe.*

On désigne $X_r(\omega, s)$ *le processus aléatoire:*

$$X_r(\omega, s) = (\lambda(B(s,r)))^{-1} \int_{B(s,r)} X(\omega, u)\, d\lambda(u).$$

Demonstration.

Soit $0 < r < \infty$, on pose $r_o = r$ et pour tout $n \geq 1$ $p(r_{n-1}) = 2p(r_n)$. La suite $\{r_n\}_{n\geq 1}$ de nombres réels positifs est décroissant. En appliquant le Lemme 1, on aura:

$$\left|X_{r_n}(\omega, s) - X_{r_{n-1}}(\omega, s)\right| \leq$$

$$F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda(B(s,r_n)) \cdot \lambda(B(s,r_{n-1}))}\right|\right) \cdot p(r_n + r_{n-1}) \leq$$

$$\leq 4F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(s,r_n))}\right|\right) \cdot (\overline{p}(r_n) - \overline{p}(r_{n+1})) \leq$$

$$\leq 4 \int_{r_{n+1}}^{r_n} F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(s,u))}\right|\right) d\overline{p}(u).$$

Soient i fixé, tel que $0 < i < r$ et m l'entier vérifiant:

$$r_{m+1} < i < r_m$$

Alors:

$$|X_r(\omega, s) - X_i(\omega, s)| =$$

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \left(X_{r_{k-1}}(\omega, s) - X_{r_k}(\omega, s)\right) + X_{r_m}(\omega, s) - X_i(\omega, s)\right| \leq$$

$$\leq \quad 4\int_0^r F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(s,u))}\right|\right) d\overline{p}(u) + 2F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(s,i))}\right|\right) \cdot \overline{p}(i) \leq$$

$$\leq \quad 6\int_0^r F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(s,u))}\right|\right) d\overline{p}(u).$$

Donc $\lim_{r\to 0} X_r(\omega, s)$ existe; notons per $X_o(\omega, s)$ cette limite.

Lemme 3. *Supposons que la condition suivante soit réalisée:*

$$\int_0^1 F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(s,u/2))}\right|\right) d\overline{p}(u) < \infty.$$

Alors, pour tout couple $(s,t)\in T\times T$, on a:

i). $$|X_o(\omega,s)-X_o(\omega,t)|\leq 10\sup_{x\in T}\int_0^{d(s,t)}F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(x,u/2))}\right|\right)d\overline{p}(u)$$

ii).
$$\int_T|X_o(\omega,t)-X(\omega,t)|\,d\lambda(t)<\varepsilon\ ,\ \text{pour tout } \varepsilon>0.$$

Demonstration.

i). Soient s et t fixés, $(s,t)\in T\times T$. On pose $r=\dfrac{d(s,t)}{2}$ en on définit: $A=B(s,r)\cup B(t,r)$.

En appliquant le Lemme 1, on obtient.

$$|X_A(\omega)-X_r(\omega\cdot s)|\leq\int_0^{d(s,t)}F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(s,u/2))}\right|\right)d\overline{p}(u).$$

Nous allons appliquer le Lemme 2, pour $i\to 0$, alors on a:

$$|X_r(\omega,s)-X_o(\omega,s)|\leq 4\int_0^{d(s,t)}F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(s,u/2))}\right|\right)d\overline{p}(u).$$

D'où:

$$|X_o(\omega,s)-X_o(\omega,t)|\leq 10\sup_{x\in T}\int_0^{d(s,t)}F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\lambda^2(B(x,u/2))}\right|\right)d\overline{p}(u).$$

ii).
$$\int_T|X_o(\omega,t)-X(\omega,t)|\,d\lambda(t)=$$

$$\int_T\left|\lim_{r\to 0}(\lambda(B(t,r)))^{-1}\int_{B(t,r)}X(\omega,u)\,d\lambda(u)-X(\omega,t)\right|d\lambda(t)\leq$$

$$\leq\ \lim_{r\to 0}\int_T\int_T\frac{p(d(u,t))}{B(t,r)}\left|\frac{X(\omega,u)-X(\omega,t)}{p(d(u,t))}\right|d\lambda(u)\,d\lambda(t)\leq$$
$$\leq\ \lim_{r\to 0}\frac{p(r)}{\inf_{t\in T}\lambda(B(t,r))}\int_T\int_T\left|\frac{X(\omega,u)-X(\omega,t)}{p(d(u,t))}\right|d\lambda(u)\,d\lambda(t).$$

Alors on a:

$$F\left(\int_T |X_o(\omega,t)-X(\omega,t)|\,d\lambda(t)\right)\le \lim_{r\to 0}\frac{p(r)}{\inf_{t\in T}\lambda(B(t,r))}\cdot\xi(\omega).$$

D'où:

$$\int_T |X_o(\omega,t)-X(\omega,t)|\,d\lambda(t)\le \lim_{r\to 0}p(r)\cdot F^{-1}\left(\left|\frac{\xi(\omega)}{\inf_{t\in T}\lambda(B(t,r))}\right|\right).$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Donc $X_o(\omega,t)=X(\omega,t)$ presque sûrement, ceci termine la démonstration du Théorème 1.

Bibliographie

[1] PERNIQUE X. - *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes.* Ecole d'Eté de Probabilités de St. Flour **4** (1974); Lecture Notes in Math. 480, 1-96, 1974.

[2] HEINKEL B. - *Théorème de dérivation du type de celui de Lebesgue et continuité p.s. des trajectoires de certains processus gaussiennes.* Lecture Notes in Math. 381, Springer Verlag, 1977, pp. 155-171.

[3] PRESTON C. - *Banach space arising from some integral inequalities.* Indiana University Math. Journal, **20** (1971), 997 - 1015.

[4] NICULESCU GH. - *Masuri majorante si continuitatea proceselor aleatoare.* The sixth Conference on Probability Theory, Brasov, 1979.

,,Ovidius" Universitée,
124 Mamaia Blvd.,
8700- Constantza,
Roumanie
e-mail: ghniculescu@univ-ovidius.ro