An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 11(2), 2003, 15–24

METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE TRUNCHIATE PENTRU O CLASĂ DE MODELE AUTOREGRESIVE

Cosmin Bătătorescu

Abstract

In the present paper we determine the parameters a_j and b_j of a Kremer type autoregressive model

$$X_{ij} = a_j + (b_j + r_{ij})\, X_{i,j} + e_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \; j = \overline{2,n},$$

using the truncated least squares method. We reduce the statistical problem to minimizing a concave function over a polytope, for which we present an iterative procedure for the determination of a local optimum. In the end, an adaptation of Tuy's cutting plane method is used for the construction of the global optimum of our problem.

1 Introducere

Lucrarea de faţă abordează o temă de actualitate în matematica actuarială, anume, rezerva pierderilor (loss reserving). Starea financiară a unei companii de asigurări nu poate fi evaluată în mod corespunzător fără o estimare corectă a rezervei pierderilor.

Problema rezervei pierderilor este rezumată astfel: date fiind informaţiile din trecut, se pune problema estimării cuantumului plăţilor ce trebuie efectuate în viitor. Pentru aceasta, se consideră X_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, un set de variabile aleatoare pe un câmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$, unde X_{ij} reprezintă cuantumul total al cererilor de despăgubire a unei grupe de riscuri asigurate în anul j în raport cu anul i în care s-a produs accidentul. Observaţiile se prezintă sub forma unui triunghi $X_\Delta = \{X_{ij} \mid i = \overline{1,n},\; j = \overline{1, n-i+1}\}$, ce reprezintă istoria cererilor de despăgubire.

În cadrul acestei lucrări vom prezenta un estimator cu un punct critic ridicat din punctul de vedere al programării matematice: regresia de cele mai mici pătrate trunchiată (*regresie LTS*), cu scopul de a stabili un cadru în care aceşti estimatori pot fi obţinuţi exact.

Pentru modelul autoregresiv Kremer [4]

$$X_{ij} = a_j + (b_j + r_{ij})\, X_{i.j-1} + e_{ij} \tag{1.1}$$

problema de regresie LTS se scrie

$$\min \sum_{i=1}^{h} \omega_{ij} e_{ij}^2 \tag{1.2}$$

unde am presupus următoarea ordonare a reziduurilor

$$(e_{1,j})^2 \leq (e_{2,j})^2 \leq \ldots \leq (e_{n-j+1,j})^2 \tag{1.3}$$

iar h este numărul de observaţii netrunchiate din datele observate. Regresia LTS constă în determinarea valorilor $\widehat{a}_j, \widehat{b}_j$ astfel încât suma pătratelor a celor mai mici h reziduuri să fie minimă.

În principiu (1.1) poate fi rezolvată dacă rezolvăm C_{n-j+1}^h probleme de regresie pentru toate submulţimile cu h elemente a lui lui $\{1, \ldots, n-j+1\}$ şi alegând apoi minimul absolut dintre acestea. Evident, din punctul de vedere al efortului de calcul, aceasta nu este o soluţie acceptabilă, însă am arătat astfel că (1.1) are întotdeauna soluţie.

2 Punctul critic

Pentru o valoare dată a lui j definim următoarele:

$$X_j = \begin{pmatrix} X_{1,j} \\ \vdots \\ X_{n-j+1,j} \end{pmatrix} \qquad X_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & X_{1,j-1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n-j+1,j-1} \end{pmatrix},$$

x_{j-1} reprezintă a doua coloană a lui X_{j-1}, iar X_{j-1}^i reprezintă linia i a matricei X_{j-1}.

Notăm de asemenea cu $\beta_j = (a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2$ vectorul parametrilor de regresie din modelul (1.1).

Notăm cu β^τ estimatorii β_j obţinuţi printr-o tehnică τ.

Dacă vom înlocui un număr $0 \leq m \leq n-j+1$ de observaţii din $(X_{i,j-1}, X_{i,j})$ din observaţiile iniţiale, pentru un anumit j fixat, cu o mulţime de observaţii $\left(\widetilde{X}_{i,j-1}, \widetilde{X}_{ij}\right)$, nouă, obţinem un nou set de observaţii $\left(\widetilde{X}_{j-1}, \widetilde{X}_j\right)$. Aplicând aceeaşi tehnică τ asupra acestui nou set de observaţii vom obţine estimatorii $\beta^\tau\left(\widetilde{X}_{j-1}, \widetilde{X}_j\right)$, care, în mod normal vor fi diferiţi de cei originali.

Pentru măsurarea distanţei $\left\|\beta^{\tau}\left(\widetilde{X}_{j-1}, \widetilde{X}_{j}\right)-\beta^{\tau}\right\|$ putem folosi orice normă din $\mathbb{R}^{2}$. Considerând toate posibilităţile de a înlocui cel mult m elemente din cele $n-j+1$ observate, pentru un j fixat, distanţa de mai sus nu este întotdeauna finită.

Definiţia 2.1 *Se numeşte deplasare maximă rezultată din înlocuirea a cel mult m observaţii din setul original de date prin altele noi, arbitrare, cantitatea*

$$b\left(m, \tau, X_{j-1}, X_{j}\right)=\sup_{\widetilde{X}_{j-1}, \widetilde{X}_{j}}\left\|\beta^{\tau}\left(\widetilde{X}_{j-1}, \widetilde{X}_{j}\right)-\beta^{\tau}\right\| .$$

Definiţia 2.2 *Fiind date observaţiile $\left(X_{j-1}, X_{j}\right)$, punctul critic pentru τ este definit ca*

$$\alpha\left(\tau, X_{j-1}, X_{j}\right)=\min_{0 \leq m<n-j+1}\left\{\frac{m}{n-j+1} \,\middle|\, b\left(m, \tau, X_{j-1}, X_{j}\right) \text{ este infinit}\right\} .$$

Observaţia 2.1 *În fond, punctul critic reprezintă numărul minim de observaţii din setul iniţial $\left(X_{j-1}, X_{j}\right)$ care, dacă sunt înlocuite cu alte observaţii aleatoare, fac tehnica de regresie τ să eşueze (breakdown).*

Definiţia 2.3 *O tehnică de regresie τ se numeşte regresie echivariantă dacă pentru orice $v \in \mathbb{R}^{2}$ are loc:*

$$\beta^{\tau}\left(X_{j-1}, X_{j}+X_{j-1} v\right)=\beta^{\tau}\left(X_{j-1}, X_{j}\right)+v .$$

Observaţia 2.2 *Este evident faptul că regresiile L_{2}, L_{1} şi L_{∞} sunt regresii echivariante şi invariate la permutaţii.*

Teorema următoare defineşte marginea superioară a punctului critic pentru orice tehnică de regresie echivariantă τ.

Teorema 2.1 *([6], Teorema 4, pag. 125) Fie τ o tehnică de regresie echivariantă şi $\left(X_{j-1}, X_{j}\right)$ datele observate astfel încât $X_{j-1}, X_{j} \in \mathbb{R}^{n-j+1}$ şi $n-j+1 \geq 3$. Atunci:*

$$\alpha\left(\tau, X_{j-1}, X_{j}\right) \leq \frac{\left\lfloor\frac{n-j+2}{2}\right\rfloor}{n-j+1} .$$

Corolarul 2.2 Asimptotic, punctul critic al oricărei tehnici echivariante de regresie τ pentru orice set de date $\left(X_{j-1}, X_{j}\right)$ este mărginit superior de 0.5, care este valoarea cea mai mare posibilă.

În mod evident, cu cât punctul critic al unei tehnici de regresie este mai mare, cu atât acea tehnică este mai robustă. Cum ambele tehnici de regresie L_{2} şi L_{∞} sunt regresii echivariante, rezultă imediat faptul că şi regresia LTS este regresie echivariantă, şi, prin prisma teoremei 2.1 rezultă că punctul critic pentru aceasta este mărginit superior de valoarea 0.5.

Teorema 2.3 *([6], Teorema 6, pag. 132)* Marginea superioară a punctului critic pentru tehnica de regresie LTS este atins pentru

$$h = \left\lfloor \frac{n-j+1}{2} \right\rfloor + 1.$$

3 Regresie LTS şi optimizare globală

Utilizând variabile $0-1$, problema de regresie LTS se poate rescrie sub forma următoarei probleme neliniare

$$\begin{cases} \min\limits_{\beta,\delta} \sum\limits_{i=1}^{n-j+1} \omega_{ij} \left(X_{ij} - a_j - b_j X_{i,j-1}\right)^2 \delta_{ij} \\ h_l \leq \sum\limits_{i=1}^{n-j+1} \delta_{ij} \leq h_u \ ; \ \delta_{ij} \in \{0,1\} \ \forall i \end{cases} \tag{3.4}$$

unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă observaţia } (X_{i,j-1}, X_{ij}) \text{ a fost exlusă} \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$$

iar h_l, h_u sunt numere întregi ce satisfac relaţia $1 \leq h_l \leq h_u \leq n-j+1$.

Pentru a obţine punctul critic maxim (vezi teorema 2.3), din punct de vedere teoretic trebuie făcută alegerea $h_l = h_u = \left\lfloor \frac{n-j+1}{2} \right\rfloor + 1$.

Pentru a utiliza cât mai multe din datele observate, în general se lucrează cu valorile

$$h_l = \left\lfloor \frac{n-j+1}{2} \right\rfloor + 1 - a, \qquad h_u = \left\lfloor \frac{n-j+1}{2} \right\rfloor + 1 + a$$

unde a este un număr întreg pozitiv ce satisface relaţia $0 \leq a \leq \left\lfloor \frac{n-j+1}{2} \right\rfloor$.

Propoziţia 3.1 *În contextul regresiei LTS, o soluţie optimă (β^*, δ^*) pentru 3.4 satisface relaţia $e_{n-j+1}^\top \delta^* = h_l$.*

În continuare vom considera totuşi un set admisibil $\delta \in \mathbb{R}^{n-j+1}$, aşa cum apare el în (3.4), pentru a da o generalitate teoriei ce urmează.

Pentru a scrie problema de regresie LTS în formă matriceală, notăm cu

$$D_j = diag\left(\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \ldots, \delta_{n-j+1,j}\right), \qquad \Omega_j = diag\left(\omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \ldots, \omega_{n-j+1,j}\right) \tag{3.5}$$

matricile de dimensiune $(n-j+1) \times (n-j+1)$ ce au pe diagonala principală valorile δ_{ij} respectiv ω_{ij}, iar în rest valoarea 0. De asemenea vom nota

$$\Delta_j = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^{n-j+1} \ \middle| \ h_l \leq e_{n-j+1}^\top \delta \leq h_u \ ; \ 0 \leq \delta_i \leq 1 \ \ \forall i = \overline{1, n-j+1} \right\} \tag{3.6}$$

relaxarea liniară a constrângerii din (3.4).
Δ_j este un politop în $\mathbb{R}_+^{n-j+1}$ iar problema (3.4) se rescrie

$$\min_{\beta,\delta}\left\{ (X_j - X_{j-1}\beta)^\top D_j\Omega_j (X_j - X_{j-1}\beta) \;\middle|\; \delta \in \Delta_j \;;\; \delta \text{ întreg}\right\}. \tag{3.7}$$

Pentru a rezolva această problemă, vom efectua mai întâi minimizarea în funcţie de β, şi apoi în funcţie de δ. Astfel, $\forall\delta \in \Delta_j$, fie

$$Z(\delta) = \min_{\beta} (X_j - X_{j-1}\beta)^\top D_j\Omega_j (X_j - X_{j-1}\beta) \ . \tag{3.8}$$

Aceasta este o problemă ponderată de cele mai mici pătrate, şi cum $\delta_{ij} \geq 0$, $\omega_{ij} \geq 0$ rezultă că există întotdeauna $\beta(\delta)$ soluţie optimă pentru (3.8). Problema originală (3.7) devine astfel

$$\min\{ Z(\delta) \mid \delta \in \Delta_j \;;\; \delta \text{ întreg}\}. \tag{3.9}$$

Teorema 3.2
i) $Z(\delta)$ este o funcţie concavă $\forall\delta \in \mathbb{R}_+^{n-j+1}$.
ii) Orice vector $\delta \in \Delta_j$ care este un vector $0-1$ va fi un punct de extrem pentru Δ_j.
iii) Toate punctele de extrem ale lui Δ_j sunt vectori $0-1$.
iv) $\min\{ Z(\delta) \mid \delta \in \Delta_j \}$ se obţine într-un punct de extrem al lui Δ_j.

Din teorema 3.2 rezultă că putem renunţa la condiţia ca δ să fie întreg în (3.7), deoarece din partea iv) a aceleiaşi teoreme avem

$$\begin{aligned}&\min_{\beta,\delta}\left\{ (X_j - X_{j-1}\beta)^\top D_j\Omega_j (X_j - X_{j-1}\beta) \;\middle|\; \delta \in \Delta_j \;;\; \delta \text{ întreg}\right\}\\ &= \min_{\beta,\delta}\left\{ (X_j - X_{j-1}\beta)^\top D_j\Omega_j (X_j - X_{j-1}\beta) \;\middle|\; \delta \in \Delta_j\right\}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

În consecinţă, regresia LTS este o problemă de minimizare în $n-j+3$ variabile reale, β_1, β_2, $\delta_1, \ldots, \delta_{n-j+1}$. Funcţia obiectiv din (3.10) este o funcţie continuă şi derivabilă, astfel încât putem utiliza condiţiile Kuhn-Tucker pentru a caracteriza minimul local al (3.10).

Vom considera abordarea în două etape a rezolvării problemei (3.7) care, prin prisma punctului iv) al teoremei 3.2, presupune găsirea soluţiei problemei concave

$$\min\{ Z(\delta) \mid \delta \in \Delta_j\} \tag{3.11}$$

În cadrul teoremei următoare vom determina $Z(\delta)$ şi vom aborda apoi rezolvarea problemei (3.11), spre exemplu, prin algoritmi generali prezentaţi în [2] şi [3] pentru a găsi minimul global. Pentru a uşura scrierea în continuare, folosim următoarele notaţii

$$X_{j-1}(\delta) = X_{j-1}^\top D_j\Omega_j X_{j-1},$$

$$X_{j-1}X_j(\delta) = \begin{pmatrix} X_{j-1}(\delta) & X_{j-1}^{\top} D_j \Omega_j X_j \\ X_j^{\top} D_j \Omega_j X_{j-1} & X_j^{\top} D_j \Omega_j X_j \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.3
i) Soluţia optimă $\beta(\delta)$ pentru 3.8 este

$$\beta(\delta) = X_{j-1}(\delta)^{-1} X_{j-1}^{\top} D_j \Omega_j X_j \tag{3.12}$$

ii) Funcţia $Z(\delta)$ din 3.8 este dată de

$$Z(\delta) = \frac{\det X_{j-1}X_j(\delta)}{\det X_{j-1}(\delta)}. \tag{3.13}$$

iii) Gradientul $\nabla Z(\delta)$ este dat de

$$\nabla Z(\delta) = \left(e_1^2(\delta), \ldots, e_{n-j+1}^2(\delta)\right)^{\top} \tag{3.14}$$

unde $e_i(\delta)$ este reziduul de ordin i evaluat în $\beta(\delta)$, adică

$$e_i(\delta) = X_{ij} - X_{j-1}^{i}\beta(\delta), \ \forall i = \overline{1, n-j+1}. \tag{3.15}$$

iv) Gradientul $\nabla\beta(\delta)$ al lui $\beta(\delta)$ este dat de: $\nabla\beta(\delta) =$

$$\left(e_1(\delta) X_{j-1}(\delta)^{-1} \left(X_{j-1}^{1}\right)^{\top}, \ldots, e_{n-j+1}(\delta) X_{j-1}(\delta)^{-1} \left(X_{j-1}^{n-j+1}\right)^{\top}\right)^{\top}. \tag{3.16}$$

v) Matricea Hessiană a derivatelor de ordinul 2 a lui $Z(\delta)$ este dată de

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\delta_i \partial\delta_k} = -2e_i(\delta) e_k(\delta) X_{j-1}^{i} X_{j-1}(\delta)^{-1} \left(X_{j-1}^{k}\right)^{\top}. \tag{3.17}$$

4 Optimizare locală în regresia LTS

Structura particulară a mulţimii de constrângeri din problema de regresie LTS sugerează următoarea abordare euristică de determinare a soluţiei problemei (3.4). Fie $\delta^0 \in \Delta_j$ un punct de extrem al politopului Δ_j cu j fixat. Dat fiind δ^0, rezolvăm problema (3.8) prin metoda celor mai mici pătrate pentru a determina $Z\left(\delta^0\right)$.

Fie $\delta^1, \ldots, \delta^{r_0}$ mulţimea vecinilor lui δ^0.

Definiţia 4.1 *δ^0 se numeşte un optim local pentru $Z(\delta)$ dacă $Z\left(\delta^0\right) \leq Z\left(\delta^i\right), \ \forall i = \overline{1, r_0}$, unde $Z(\delta)$ este cel definit în (3.8).*

Pentru a implementa algoritmul de căutare locală, ne trebuie în primul rând o caracterizare completă a "vecinilor" ce trebuiesc parcurşi.

Teorema 4.1 *Fie $\delta^0 \in \Delta_j$ un punct de extrem al lui Δ_j. Definim $H_0 = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \delta^0_k = 1 \right\}$, $\delta^{ik} = \delta^0 - u_i + u_j$, $\delta^{i+} = \delta^0 + u_i$, $\delta^{i-} = \delta^0 - u_i$ unde $u_k \in \mathbb{R}^{n-j+1}$ este vectorul unitar.*
i) Dacă $e^\top_{n-j+1}\delta^0 = h_u$, atunci $\delta \in \mathbb{R}^{n-j+1}$ este un vecin al lui δ^0 pe Δ_j dacă şi numai dacă $\delta = \delta^{ik}$ pentru $i \in H_0$ şi $k \in \mathbb{N} \setminus H_0$, sau dacă $h_l < h_u$ şi $\delta = \delta^{i-}$ pentru $i \in H_0$.
ii) Dacă $h_l < e^\top_{n-j+1}\delta^0 < h_u$, atunci $\delta \in \mathbb{R}^{n-j+1}$ este un vecin al lui δ^0 pe Δ_j dacă şi numai dacă $\delta = \delta^{i+}$ pentru un $i \in \mathbb{N} \setminus H_0$ sau $\delta = \delta^{i-}$ pentru $i \in H_0$.
iii) $e^\top_{n-j+1}\delta^0 = h_l$, atunci $\delta \in \mathbb{R}^{n-j+1}$ este un vecin al lui δ^0 pe Δ_j dacă şi numai dacă $\delta = \delta^{ik}$ pentru $i \in H_0$ şi $k \in \mathbb{N} \setminus H_0$, sau dacă $h_l < h_u$ şi $\delta = \delta^{i+}$ pentru $i \in \mathbb{N} \setminus H_0$.

Dacă $h_l = h_u$ obţinem din teorema 4.1 că orice punct de extrem $\delta^0 \in \Delta_j$ are exact $h(n - j + i - h)$ vecini, unde $h = |H_0|$, iar dacă $h_l < h_u$, atunci δ^0 are exact $h(n - j + i - h + 1)$ vecini.

Dat fiind un punct de extrem $\delta^0 \in \Delta_j$, notăm cu x^0_{j-1} subvectorul lui x_{j-1} corespunzător lui $H_0 = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \delta^0_k = 1 \right\}$ şi respectiv X^0_j subvectorul lui X_j. Pentru a simplifica notaţia, presupunem că $H_0 = \{1, \ldots, h\}$ unde $h = |H_0|$, adică după o eventuală reindexare, liniile active din (x_{j-1}, X_j) corespunzătoare lui δ^0 să fie primele h linii.

Conform teoremei 4.1, mutarea într-un vecin δ^1 al lui δ^0 pe Δ_j presupune transformarea lui H_0 într-o mulţime H_1 în unul din următoarele trei moduri:

1. $H_1 = H_0 \setminus \{i\}$ pentru $i \in H_0$, sau
2. $H_1 = H_0 + \{i\}$ pentru $k \in \mathbb{N} \setminus H_0$, sau
3. $H_1 = H_0 \setminus \{i\} + \{k\}$ pentru $i \in H_0$, $k \in \mathbb{N} \setminus H_0$.

În mod corespunzător, matricea $\left(x^0_{j-1}, X^0_j\right)$ se transformă în $\left(x^1_{j-1}, X^1_j\right)$ astfel

$$x^1_{j-1} = x^0_{j-1} - x_{i,j-1}u_i \qquad X^1_j = X^0_j - X_{ij}u_i \tag{4.18}$$

$$x^1_{j-1} = \begin{pmatrix} x^0_{j-1} \\ 0 \end{pmatrix} + x_{k,j-1}u_{h+1} \qquad X^1_j = \begin{pmatrix} X^0_j \\ 0 \end{pmatrix} + X_{kj}u_{h+1} \tag{4.19}$$

$$x^1_{j-1} = x^0_{j-1} + (x_{kj} - x_{ij}) \qquad X^1_j = X^0_j + (X_{kj} - X_{ij})\, u_i \tag{4.20}$$

unde u_i este vectorul unitar din $\mathbb{R}^h$ respectiv $\mathbb{R}^{h+1}$.

Corespunzător celor trei cazuri din (4.18), (4.19) şi (4.20) avem:

$$\begin{aligned} \left(x^1_{j-1}\right)^\top x^1_{j-1} &= \left(x^0_{j-1}\right)^\top x^0_{j-1} - (x_{i,j-1})^2, \\ \left(x^1_{j-1}\right)^\top X^1_j &= \left(x^0_{j-1}\right)^\top X^0_j - x_{i,j-1}X_{ij} \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\left(x_{j-1}^1\right)^\top x_{j-1}^1 &= \left(x_{j-1}^0\right)^\top x_{j-1}^0 + \left(x_{k,j-1}\right)^2, \\ \left(x_{j-1}^1\right)^\top X_j^1 &= \left(x_{j-1}^0\right)^\top X_j^0 + x_{k,j-1}X_{kj}\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\left(x_{j-1}^1\right)^\top x_{j-1}^1 &= \left(x_{j-1}^0\right)^\top x_{j-1}^0 - \left(x_{i,j-1}\right)^2 + \left(x_{k,j-1}\right)^2 \\ \left(x_{j-1}^1\right)^\top X_j^1 &= \left(x_{j-1}^0\right)^\top X_j^0 - x_{i,j-1}X_{ij} + x_{k,j-1}X_{kj}\end{aligned} \tag{4.23}$$

Trebuie să obţinem formule iterative pentru a calcula valoarea lui $Z^1 = \left[\left(x_{j-1}^1\right)^\top x_{j-1}^1\right]^{-1}$ pornind de la $Z^0 = \left[\left(x_{j-1}^0\right)^\top x_{j-1}^0\right]^{-1}$.

Pentru a simplifica scrierea, facem următoarele notaţii:

$$\alpha_i = 1 - \frac{\left(x_{i,j-1}\right)^2}{Z^0}, \quad \alpha_k = 1 + \frac{\left(x_{k,j-1}\right)^2}{Z^0},$$

$$\beta_{ik} = \frac{x_{i,j-1}x_{k,j-1}}{Z^0}, \quad \alpha_{ik} = \alpha_i\alpha_k + \beta_{ik}^2$$

Prin calcul direct, pornind de la formulele (4.18)-(4.20) pentru X_j^1, se obţin următoarele formule iterative, corespunzătoare celor trei cazuri:

$$\begin{aligned}&\beta\left(\delta^1\right) = \beta\left(\delta^0\right) - \tfrac{e_i^0 Z^0 x_{i,j-1}}{\alpha_i} \\ &\beta\left(\delta^1\right) = \beta\left(\delta^0\right) + \tfrac{e_k^0 Z^0 x_{k,j-1}}{\alpha_k} \\ &\beta\left(\delta^1\right) = \beta\left(\delta^0\right) + \left(\tfrac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}}e_k^0 - \tfrac{\alpha_k}{\alpha_{ik}}e_i^0\right)Z^0 x_{i,j-1} + \left(\tfrac{\alpha_i}{\alpha_{ik}}e_k^0 + \tfrac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}}e_i^0\right)Z^0 x_{k,j-1}\end{aligned}$$

unde

$$e_i^0 = X_{ij} - X_{j-1}^i\beta\left(\delta^0\right), \quad e_k^0 = X_{kj} - X_{j-1}^k\beta\left(\delta^0\right).$$

Suntem acum în măsura de a calcula îmbunătăţirea ce se obţine pentru funcţia obiectiv $Z(\delta)$ din (3.8) prin trecerea de la $\delta^0 \in \Delta_j$ la un vecin $\delta^1 \in \Delta_j$.

Să notăm cu ΔZ_i, ΔZ^k şi ΔZ_i^k cantitatea $Z\left(\delta^1\right) - Z\left(\delta^0\right)$ respectiv în cazul (4.18)-(4.20). Se obţine:

$$\Delta Z_i = -\frac{\left(e_i^0\right)^2}{\alpha_i}, \quad \Delta Z^k = \frac{\left(e_k^0\right)^2}{\alpha_k}, \quad \Delta Z_i^k = \frac{\alpha_i\left(e_k^0\right)^2 + 2\beta_{ik}e_i^0 e_k^0 - \alpha_k\left(e_i^0\right)^2}{\alpha_{ik}}$$

Din cele de mai sus, putem deducem algoritmul local de determinare a parametrilor regresiei LTS.

Algoritmul 4.1
Date de intrare: $n-j+1$, h, x_{j-1}, X_j.
Pas 0. Se determină o mulţime acceptabilă $H_0 \subseteq \mathbb{N}$ cu $|H_0| = h$, şi fie $\delta^0 \in \mathbb{R}^{n-j+1}$ cu

$$\delta_k^0 = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad k \in H_0 \\ 0 & \text{dacă} \quad k \in \mathbb{N} \diagdown H_0 \end{cases}.$$

Pas 1. Calculăm Z^0, $\beta\left(\delta^0\right)$ şi $e^0 = X_j - X_{j-1}\beta\left(\delta^0\right)$.
Calculăm $\Delta Z_{\min} = \min\left\{ \Delta Z_i^k \middle| \ i \in H_0,\ k \in \mathbb{N} \diagdown H_0 \right\}$.
Pas 2. Dacă $\Delta Z_{\min} \geq 0$, stop: δ^0 este optim local pentru problema (3.4). Altfel, înlocuim H_0 cu $H_1 = H_0 \diagdown \{i\} + \{k\}$, unde $i \in H_0,\ k \in \mathbb{N} \diagdown H_0$ astfel încât $\Delta Z_{\min}$ să fie atins, si apoi se repetă pasul 1.

Algoritmul 4.1 poate fi modificat în baza unei idei adaptate a lui Tuy [7] a metodei planului de secţiune: mai întâi rulăm algoritmul 4.1 pentru a obţine un optim local δ^{L_1}. Fie $H_1 = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \delta_k^{L_1} = 1 \right\}$şi reţinem valorile δ^{L_1} precum şi valoarea funcţiei obiectiv $Z\left(\delta^{L_1}\right)$ ca fiind cele mai bune până în momentul curent. Pentru a defini iteraţia, înlocuim politopul Δ_j prin $\Delta_j^1 = \Delta_j \cap \left\{ \delta \in \mathbb{R}^{n-j+1} \middle| \sum\limits_{k \in \mathbb{N} \diagdown H_1} \delta_k \geq 2 \right\}$. Utilizând, de exemplu, algoritmul aditiv al lui Balas [1], determinăm un vector $0-1$ $\delta \in \Delta_j^1$ pentru care aplicăm din nou algoritmul 4.1 având ca punct de pornire δ.

Astfel se va obţine un nou optim local, δ^{L_2}, care, dacă va fi nevoie, îl marcăm ca fiind cea mai bună soluţie până la momentul curent. Notând $H_2 = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \delta_k^{L_2} = 1 \right\}$înlocuim Δ_j^1 prin $\Delta_j^2 = \Delta_j^1 \cap \left\{ \delta \in \mathbb{R}^{n-j+1} \middle| \sum\limits_{k \in \mathbb{N} \diagdown H_2} \delta_k \geq 2 \right\}$ şi astfel continuăm iteraţia.

Numărul de puncte de extrem ale lui Δ_j ce trebuie comparate poate fi redus la C_{n-j+1}^h.

Fie $\Delta_s = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^{n-j+1} \middle| 2 < \sum\limits_{i=1}^{n-j+1} \delta_i = s < h;\ \ 0 \leq \delta_i \leq 1;\ \ s \text{ întreg} \right\}$.

Definiţia 4.2 *Se numesc extensii ale punctului de extrem $\xi \in \Delta_s$ pe Δ_j toate punctele de extrem $\delta \in \Delta_j$ ce satisfac relaţia $\delta \geq \xi$.*

Arătăm în cele ce urmează că pentru un punct de extrem $\delta^0 \in \Delta_j$ dat şi valoarea corespunzătoare a funcţiei obiectiv $Z\left(\delta^0\right)$, orice punct de extrem $\delta \in \Delta_j$ care este extensia unui $\xi \in \Delta_s$ cu $Z(\xi) \geq Z\left(\delta^0\right)$ poate să fie exclus din calcule.

Teorema 4.2 *Pentru un set de observaţii (x_{j-1}, X_j), dacă există $\xi \in \Delta_s$ şi $\delta^0 \in \Delta_j$ punct de extrem cu $Z(\xi) \geq Z\left(\delta^0\right)$ atunci orice extensie $\delta \in \Delta_j$ a lui ξ pe Δ_j are proprietatea că $Z(\delta) \geq Z(\xi)$.*

Bibliografie

1. Balas, E., *An additive algorithm for solving linear programs with 0-1 variables,* Operations Research, 13, 517-546, 1965.

2. Falk, J.E., Hoffmann, K.L., *A successive underestimating method for concave minimization problems*, Mathematics of Operations Research, 1, 251-259, 1976.

3. Hoffmann, K.L., *A method for globally minimizing concave functions over convex sets*, Mathematical Programming, 20, 22-32, 1981.

4. Kremer, E., *Random Coefficient Autoregressive Loss Reserving*, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Vol XXI, p. 237-240, 1993.

5. Padberg, M., *Linear Optimization and Extensions*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

6. Rousseeuw, P.J., Leroy, A.M., *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley, New York, 1987.

7. Tuy, H., *Concave programming under linear constraints*, Soviet Math. Doklady, 4, 1437-1440, 1964.

High Quality Software
Str. Ion Nedeleanu, nr.13, bl.V22, sc.2, ap.51, 051722, Bucureşti
E-mail: cosmin@hqs.ro