An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 11(2), 2003, 1–14

ASUPRA UNEI CATEGORII DE PROBLEME DE PROGRAMARE MATEMATICĂ LINIARĂ CU COEFICIENŢII INTERVAL

Iulian Antonescu

Abstract

Pentru a rezolva o problemă de programare liniară (LPP), coeficienţii modelului trebuie să fie fixaţi la valori bine determinate. În practică însă, coeficienţii sunt evaluări. Singurul mod de a ne ocupa cu coeficienţii nedeterminaţi constă în încercarea sensibilităţii modelului la schimbări în valorile lor, fie în mod individual, fie în grupuri foarte mici. Propunem o nouă abordare, în care câţiva dintre coeficienţii LPP sunt stabiliţi ca intervale. Găsim, în acest caz, cea mai bună valoare optimă şi cea mai rea valoare optimă pentru model, precum şi punctele de fixare a coeficienţilor tip interval care produc aceste două extreme. Aceasta asigură domeniul funcţiei obiectiv de optimizare, iar fixările de coeficienţi dau o privire generală asupra raportului de probabilitate al acestor extreme.

1 Introducere

Scopul acestei lucrări este valorificarea instrumentelor algoritmice practice pentru a ne ocupa cu LPP, în care coeficienţii sunt cunoscuţi numai aproximativ. Singura ipoteză serioasă este că orice coeficient necunoscut poate fi exprimat ca un interval (un domeniu al numerelor reale, delimitat inferior şi superior). Vom valorifica metode care găsesc cea mai bună valoare optimă (cel mai înalt maxim sau cel mai jos minim corespunzător) şi cea mai rea valoare optimă (cel mai jos maxim sau cel mai înalt minim corespunzător), precum şi fixările de coeficienţi (în interiorul intervalelor lor), care îndeplinesc aceste două extreme. Ne referim la problema găsirii celor două extreme şi fixări de coeficienţi asociate programării liniare cu coeficienţi tip interval (LPIC).

Pentru o mai bună înţelegere, să împărţim variabilele în trei grupe:

- x^0 - mulţimea de variabile care nu sunt asociate cu coeficienţi tip interval şi care pot fi cu restricţii sau fără restricţii de semn;
- x^{rs} - mulţimea de variabile care sunt cu restricţii de semn şi sunt asociate cu cel puţin un coeficient tip interval în model;
- x^{fs} - mulţimea de variabile care sunt fără restricţii de semn şi sunt asociate cu cel puţin un coeficient tip interval în model.

Folosim x pentru a ne referi la toate variabilele într-un model şi folosim exponenţi specifici numai unde este necesară o precizare suplimentară.

Vom considera două clase diferite ale problemei generale LPIC:

- LPIC tip I: în care toate variabilele sunt în x^0 sau x^{rs} şi nu sunt variabile în x^{fs}.
- LPIC tip II: în care cel puţin o variabilă este în x^{fs} şi restul sunt în x^0 sau x^{rs}.

După o scurtă trecere în revistă a unor elemente necesare înţelegerii, restul lucrării valorifică metode pentru rezolvarea problemei LPIC tip I şi prezintă exemple.

2 Tipuri de restricţii. Domenii admisibile

Considerăm o relaţie liniară cu coeficienţi tip interval.

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\underline{a}_j, \overline{a}_j\right] x_j \# \left[\underline{b}, \overline{b}\right], \text{cu } \# \in \{\leqslant, =, \geqslant\}. \tag{1}$$

Bazându-ne pe valorile alese pentru coeficienţii tip interval, pentru varianta de tip interval pot fi construite un număr infinit de restricţii specifice. Variantele specifice se deosebesc între ele prin schimbare, înclinare sau inversare. De exemplu, vor fi stabilite două variante specifice ale restricţiei prin faptul că diferă numai valorile celui de-al doilea termen din membrul stâng. Considerăm pentru aceasta variantele specifice unei restricţii tip interval ilustrat în Fig. 1. Este posibilă de asemenea inversarea unei relaţii liniare ca un caz special de înclinare. Aceasta se întâmplă atunci când coeficienţii variabili traversează zero şi are loc o schimbare simultană a tuturor coeficienţilor variabili (Fig. 2).

Pot fi obţinute variante extreme diferite ale relaţiilor de tip interval prin fixarea coeficienţilor de tip interval la diferite combinaţii ale limitelor lor superioare şi inferioare. Dacă oricare dintre coeficienţii tip interval este fixat la o valoare intermediară, atunci se obţine o variantă intermediară a relaţiei date.

În această temă, modelele care vor fi valorificate fac uz de variante extreme specifice ale restricţiilor date şi ale funcţiei obiectiv.

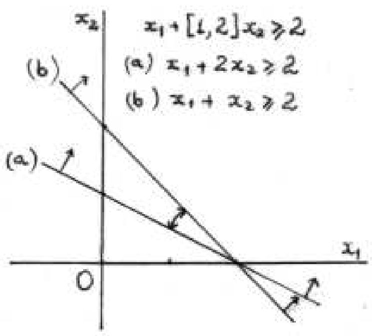

Fig. 1. Restricţie tip inversare

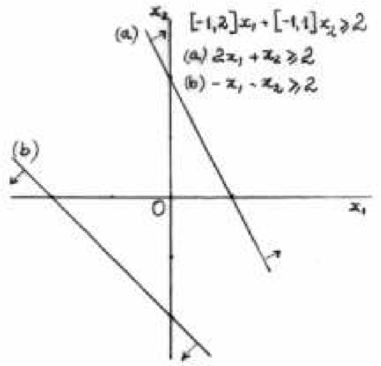

Fig. 2. Restricţie tip înclinare

Bazându-ne pe valorile specifice alese pentru coeficienţii de tip interval ale restricţiilor, există un număr infinit de domenii diferite posibil admisibile. De fapt, alegerea unor valori de coeficient poate îngreuna LPP, care devine imposibilă sau nelimitată. Cu atât mai mult, dacă funcţia obiectiv include coeficienţi tip interval, avem de asemenea o alegere infinită de funcţii obiectiv. Scopul LPIC de găsire a valorilor optime cele mai bune şi cele mai rele este direct afectat de valorile specifice alese pentru coeficienţii de tip interval, deoarece acestea determină pe rând domenii admisibile şi direcţii obiective pentru variantele specifice ale modelului.

Metodele care vor fi prezentate se bazează pe cunoştinţe despre relaţiile între domeniile admisibile create de alegeri diferite ale valorilor specifice pentru coeficienţii de tip interval. Fie o mulţime de restricţii cu coeficienţi tip interval şi fie şi două mulţimi de restricţii diferite din generate de folosirea variantelor extreme diferite ale uneia sau mai multor condiţii. Domeniile admisibile S_I şi S_{II}, generate de către C_I şi C_{II}, sunt în următoarele relaţii posibile:

1. $S_I \subseteq S_{II}$ sau $S_{II} \subseteq S_I$ (un domeniu admisibil conţinut în celălalt).
2. $S_I \neq S_{II}$ şi $S_I \cap S_{II} \neq \emptyset$ (un domeniu admisibil îl intersectează parţial pe celălalt).
3. $S_I \cap S_{II} = \emptyset$ (domeniile admisibile sunt complet diferite).

Considerăm o mulţime de restricţii, după cum urmează:

$$C = \begin{cases} a : 2x_1 - 2x_2 \leqslant [1,2] \\ b : x_1 + x_2 \geqslant [2, 2.5] \\ \quad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

şi fie C_I şi C_{II} date prin:

$$C_I = \begin{cases} a_I : 2x_1 - 2x_2 \leqslant [1,2] \\ b_I : x_1 + x_2 \geqslant [2, 2.5] \\ \quad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}, \qquad C_{II} = \begin{cases} a_{II} : 2x_1 - 2x_2 \leqslant [1,2] \\ b_{II} : x_1 + x_2 \geqslant [2, 2.5] \\ \quad x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Atunci S_{II} (domeniul admisibil delimitat de C_{II}) $\subset S_I$ (domeniul admisibil delimitat de C_I), aşa cum este arătat în Fig. 3.

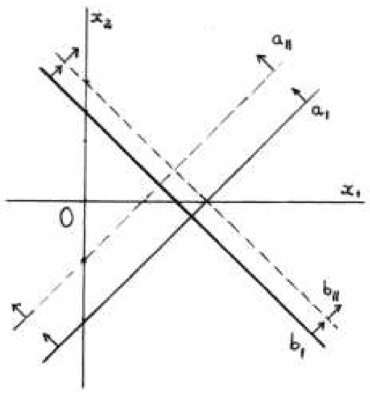

Fig. 3. Domeniu admisibil conţinut în celălalt ($S_{II} \subset S_I$)

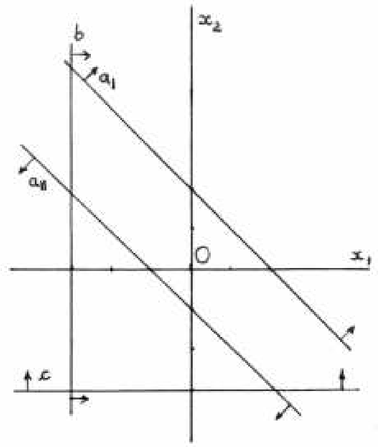

Fig. 4. Domenii admisibile disjuncte

Considerăm o altă mulţime C de restricţii, după cum urmează

$$C = \begin{cases} a : [-1,1]\, x_1 + [-1,1]\, x_2 \geqslant 1 \\ b : x_1 \geqslant -2 \\ c : x_2 \geqslant -2 \end{cases}$$

şi fie C_I şi C_{II} date prin:

$$C_I = \begin{cases} a : x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ b : x_1 \geqslant -2 \\ c : x_2 \geqslant -2 \end{cases}, \qquad C_{II} = \begin{cases} a : -x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ b : x_1 \geqslant -2 \\ c : x_2 \geqslant -2. \end{cases}$$

Atunci S_{II} (domeniul admisibil delimitat de C_{II}) $\cap S_I$ (domeniul admisibil delimitat de C_I) $= \emptyset$, aşa cum se vede în Fig. 4.

2.1 Problema LPIC tip I (toate variabilele sunt de forma x^0 sau x^{rs})

Considerăm cazul cel mai simplu în care toate variabilele $x_j \geqslant 0$ pentru $x_j \in x^0$ sau $x_j \in x^{rs}$:

$$\left(\begin{array}{ll} \sum\limits_{j=0}^{n} {}^{I}a_{ij}x_j \geqslant b_i, i = 1...m & {}^{I}a_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right] \in I(\mathbb{R}) \\ x_j \geqslant 0,\ \text{cu } x_j \in x^{rs} & {}^{I}b_i = \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right] \in I(\mathbb{R}) \\ \sum\limits_{j=0}^{n} {}^{I}c_jx_j = Z(\min) & {}^{I}c_j = \left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right] \in I(\mathbb{R}) \end{array}\right) \tag{2}$$

în care $I(\mathbb{R})$ este mulţimea numerelor de tip interval din $\mathbb{R}$.

Fiecare inegalitate dată de restricţia i de forma $\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right]x_j \geqslant \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$ având p coeficienţi şi un interval pentru termenii liberi, poate fi transformată în 2^{p+1} inegalităţi extreme diferite prin aşezarea coeficienţilor tip interval în combinaţii corespunzătoare ale valorilor limită pe domeniile coeficient.

Definiţia 1.

O formă particulară da unei inegalităţi tip interval obţinută prin aşezarea fiecărui coeficient tip interval particular la limita lui superioară sau inferioară se numeşte *formă caracteristică*.

Considerăm o inegalitate - restricţie tip interval i din (2) şi fie S_k mulţimea soluţiilor pentru varianta k de inegalitate extremă printre cele 2^{p+1} inegalităţi - restricţii extreme diferite ale lui i. Fie acum

$$\overline{S} = \bigcup_{k=1}^{2^{p+1}} S_k \ \text{ şi } \ \underline{S} = \bigcap_{k=1}^{2^{p+1}} S_k$$

Figura 5 arată cum pot apărea mulţimile şi pentru o inegalitate restricţie tip interval având doar două variante extreme posibile.

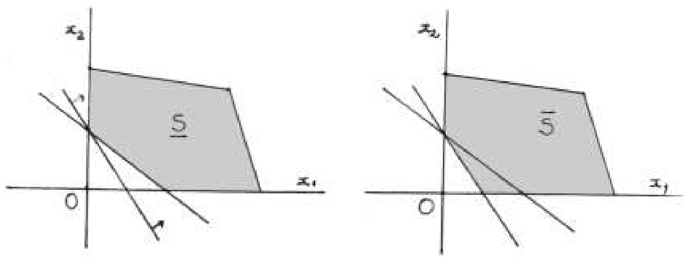

Fig. 5. Mulţimea de soluţii a două inegalităţi diferite

Definiţia 2.

Dacă pentru fiecare inegalitate - restricţie în (2) există o variantă extremă a formei caracteristice astfel ca mulţimea ei de soluţii să fie $\overline{S}$ (sau $\underline{S}$), atunci aceasta se numeşte *inegalitatea-domeniu de valoare maximă* (respectiv, *inegalitate-domeniu de valoare minimă*).

Teorema următoare arată cum se determină inegalităţile - domeniu de valoare maximă şi minimă pentru o restricţie tip interval, atunci când $x_j \geqslant 0$, pentru $x_j \in x^{rs}$.

Teorema 1. *Fie inegalitatea de tip interval*

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\underline{a}_j, \overline{a}_j\right] x_j \geqslant \left[\underline{b}, \overline{b}\right], \textit{unde } x_j \in x^0 \cup x^{rs}, \forall j = 1, ..., n.$$

Atunci

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j \geqslant \underline{b} \textit{ este inegalitatea - domeniu de valoare maximă}$$

şi

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_j x_j \geqslant \overline{b} \textit{ este inegalitatea - domeniu de valoare minimă.}$$

Demonstraţie: Fie $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant b$ orice variantă permisă a inegalităţii tip interval, nu neapărat o variantă extremă. Atunci, pentru orice soluţie particulară $x_j \geqslant 0$, pentru $x_j \in x^{rs}$ avem $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_j x_j$. Prin urmare, dacă $\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_j x_j \geqslant \overline{b}$ în x, atunci avem de asemenea $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant \overline{b} \geqslant \underline{b}$, astfel încât un punct x trebuie să satisfacă toate variantele posibile ale inegalităţii tip interval simultane. Deci $\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_j x_j \geqslant \overline{b}$ este inegalitatea domeniu de valoare minimă prin Definiţia 2.

Pentru orice soluţie particulară $x_j \geqslant 0$, pentru $x_j \in x^{rs}$, găsim de asemenea $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant \overline{b} \geqslant \underline{b}$. Prin urmare orice soluţie care satisface orice variantă permisă a inegalităţii de tip interval va fi satisfăcută de asemenea prin $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j \geqslant \underline{b}$. Deci $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j \geqslant \underline{b}$ este inegalitatea domeniu de valoare maximă prin Definiţia 2.

Corolarul 1. *Teorema 1 este valabilă pentru $x_j \in x^{rs}$, cu $x_j \leqslant 0$.*

Demonstraţie: Dacă $x_j \leqslant 0$, facem substituţia $x_j = -x'_j$, unde $x' > 0$ şi, înlocuind pe x_j în problema iniţială, demonstraţia este identică cu cea dată la Teorema 1.

O teoremă similară se aplică la funcţia obiectiv.

Teorema 2. *Fie* $Z = \sum_{j=1}^{n} \left[\overline{c}_j, \underline{c}_j\right] x_j$ *o funcţie obiectiv cu* $x_j \geqslant 0$, *pentru* $x_j \in x^{rs}$. *Atunci* $\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j$, *pentru orice soluţie x dată.*

Demonstraţie: Când $x_j \geqslant 0$, pentru $x_j \in x^{rs}$, demonstraţia este banală.

Corolarul 2. *Teorema 2 este valabilă pentru* $x_j \in x^{rs}$, *cu* $x_j \leqslant 0$.

Demonstraţie: A se vedea demonstraţia de la Corolarul 1.

Fără a reduce generalitatea, ne vom ocupa pe viitor numai cu probleme de minimizare.

Pentru problemele de maximizare trecem la minimizare prin amplificarea funcţiei obiectiv cu (-1).

Definiţia 3. Pentru minimizarea în care $x_j \geqslant 0$, pentru $x_j \in x^{rs}$, $\sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j$ este numită *funcţia obiectiv cea mai favorabilă* şi $\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j$ este numită *funcţia obiectiv cea mai puţin favorabilă*.

Teorema 1 şi Teorema 2 împreună cu corolarele lor permit calcularea soluţiilor optime (celor mai bune şi celor mai rele) pentru problema LPIC tip I, transformând problema originală LPIC în două probleme LP clasice. Mai întâi folosim varianta cea mai favorabilă a funcţiei obiectiv şi inegalităţile - domeniu de valoare maximă, pentru a determina soluţia optimă cea mai bună şi apoi folosim varianta cea mai puţin favorabilă a funcţiei obiectiv şi inegalităţile - domeniu de valoare minimă pentru a determina soluţia optimă cea mai proastă.

Algoritmul 1 descrie metoda generală pentru rezolvarea problemei LPIC tip I pentru minimizare, când restricţiile s-au redus numai la $\geqslant$. Pentru restricţii $\leqslant$ amplificăm cu (-1). Cu restricţii tip interval de egalitate ne vom ocupa mai târziu. Fixările de coeficienţi, care prevăd opţiunea cea mai bună şi cea mai rea, sunt evidente din algoritm.

Pentru orice problemă LP sunt posibile trei rezultate în Paşii 1 şi 2 ai Algoritmului 1:

(i) un punct optim finit;

(ii) nemărginire;

(iii) imposibilitate.

Prezentăm mai jos câteva consecinţe ale căror demonstraţii sunt evidente.

- Dacă soluţia optimă cea mai bună este inadmisibilă, atunci întreaga problemă LPIC este inadmisibilă.
- Dacă soluţia optimă cea mai proastă este nelimitată, atunci întreaga problemă LPIC este nelimitată.
- Dacă soluţia optimă cea mai bună este admisibilă cu valoarea $\underline{z}$ şi valoarea optimă cea mai proastă este inadmisibilă, atunci valoarea optimă pentru problema LPIC este situată între $\underline{z}$ şi inadmisibilitate.
- Dacă soluţia optimă cea mai proastă este admisibilă cu valoarea $\overline{z}$ şi valoarea optimă cea mai bună este nelimitată, atunci valoarea optimă pentru problema LPIC este situată între $-\infty$ şi $\overline{z}$.

ALGORITMUL 1.
Rezolvarea problemei LPIC cu inegalităţi.
Fie

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} \left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right] x_j,$$

cu restricţiile

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right] x_j \geqslant \left[\underline{b}_i \overline{b}_i\right], \text{ pentru } i = 1, ..., m \text{ şi } \forall x_j \in x^0 \cup x^{rs}.$$

1. Găsim cea mai bună valoare optimă pentru rezolvarea următoarei probleme LP:

$$\min \underline{z} = \sum_{j=1}^{n} c'_j x_j, \text{ unde } c'_j = \begin{cases} \underline{c}_j, & \text{dacă } x_j \geqslant 0 \\ \overline{c}_j, & \text{dacă } x_j \leqslant 0 \end{cases}, \text{ pentru } x_j \in x^{rs},$$

   cu restricţiile

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \geqslant \underline{b}_i, \forall i, \text{ unde } a'_{ij} = \begin{cases} \overline{a}_{ij}, & \text{dacă } x_j \geqslant 0 \\ \underline{a}_{ij}, & \text{dacă } x_j \leqslant 0 \end{cases}, \text{ pentru } x_j \in x^{rs}.$$

2. Găsim valoarea optimă cea mai rea pentru rezolvarea următoarei probleme LP:

$$\min \overline{z} = \sum_{j=1}^{n} c''_j x_j, \text{ unde } c''_j = \begin{cases} \overline{c}_j, & \text{dacă } x_j \geqslant 0 \\ \underline{c}_j, & \text{dacă } x_j \leqslant 0 \end{cases}, \text{ pentru } x_j \in x^{rs},$$

   cu restricţiile

$$\sum_{j=1}^{n} a''_{ij} x_j \geqslant \overline{b}_i, \forall i, \text{ unde } a''_{ij} = \begin{cases} \underline{a}_{ij}, & \text{dacă } x_j \geqslant 0 \\ \overline{a}_{ij}, & \text{dacă } x_j \leqslant 0 \end{cases}, \text{ pentru } x_j \in x^{rs}.$$

Este necesar un procedeu special pentru a ne ocupa cu restricţiile egalitate tip interval. O restricţie egalitate tip interval este mai dificil de folosit deoarece, când sunt alese valori specifice pentru coeficienţii tip interval, ea descrie un domeniu de dimensiune inferioară, de exemplu o dreaptă în reperul bidimensional, în loc de semiplanul descris de o inegalitate. Folosim următoarea teoremă:

Teorema 3. *Pentru o restricţie egalitate tip interval*

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\underline{a}_j, \overline{a}_j\right] x_j \geqslant \left[\underline{b}, \overline{b}\right], \tag{3}$$

o pereche de restricţii tip inegalitate

$$\sum_{j=1}^{n} a'_j x_j \geqslant \underline{b}, \text{ unde } a'_j = \begin{cases} \overline{a}_j, & \text{dacă } x_j \geqslant 0 \\ \underline{a}_j, & \text{dacă } x_j \leqslant 0 \end{cases}, \text{ pentru } x_j \in x^{rs}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a''_j x_j \geqslant \overline{b}, \text{ unde } a''_j = \begin{cases} \underline{a}_j, & \text{dacă } x_j \geqslant 0 \\ \overline{a}_j, & \text{dacă } x_j \leqslant 0 \end{cases}, \text{ pentru } x_j \in x^{rs}, \tag{5}$$

defineşte un domeniu convex de posibilităţi, în care fiecare punct poate satisface o variantă permisă a restricţiei egalitate iniţială tip interval printr-o alegere corespunzătoare a valorilor fixe pentru coeficienţii tip interval.

Demonstraţie. Fie $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ oricare variantă permisă a restricţiei egalitate tip interval, nu neapărat o variantă extremă şi x un punct care o satisface. Atunci pentru $x_j \geqslant 0$, unde $x_j \in x^{rs}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j - b\right) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \underline{a}_j x_j$ şi $\overline{b} \geqslant b \geqslant \underline{b}$.

Prin urmare x satisface atât $\sum\limits_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j \geqslant \underline{b}$ cât şi $\sum\limits_{j=1}^{n} \underline{a}_j x_j \leqslant \overline{b}$. De asemenea, aceasta este adevărată pentru $x_j \leqslant 0$, $x \in x^{rs}$ prin folosirea unei schimbări de variabilă ca în Corolarul 1. Deci (4) şi (5) definesc un domeniu convex al posibilităţii în care fiecare punct satisface o variantă permisă a restricţiei egalitate iniţială printr-o alegere corespunzătoare a valorilor fixe pentru coeficienţii de tip interval.

Folosind Teorema 3, procedeul pentru găsirea celei mai bune valori optime este direct. Când modelul include restricţii egalitate tip interval, el include pur şi simplu atât (4) cât şi (5) în modelul LPP rezolvat în timpul Pasului 1 al Algoritmului 1. Soluţia modelului LPP va prevedea valoarea funcţiei obiectiv cea mai bună.

Pentru restabilirea fixărilor de coeficient pentru restricţiile egalităţii tip interval cere un pas special, care revine la găsirea unei variante specifice a restricţiei egalitate tip interval, care a trecut prin punctul optim acum cunoscut. Deoarece pot fi numeroase restricţiile egalitate tip interval, un mijloc simplu de a face aceasta este de a rezolva problema în raport cu coeficienţi necunoscuţi simultan prin construirea unei LPP, cum se arată în Algoritmul 2, în care coeficienţii necunoscuţi sunt trataţi ca variabile şi variabilele iniţiale sunt tratate ca nişte constante cu valorile lor fixate la un punct optim din rezolvarea lui LPP în Pasul 1 al Algoritmului 1. Dacă Pasul 1 al Algoritmului 1 se termină la un punct admisibil finit, atunci pentru această LPP este garantată o soluţie admisibilă. Funcţia obiectiv este irelevantă deoarece orice soluţie posibilă este acceptată, astfel soluţia LPP poate fi terminată la sfârşitul procedurii Fazei 1 (care, după construcţia unei soluţii posibile de bază, nu este în mod necesar optimă).

ALGORITMUL 2.

Determinarea fixărilor de coeficient "de cea mai bună valoare optimă" pentru restricţii egalitate de tip interval.

Fie k restricţii egalitate tip interval ale formei (3) şi punctul optim cel mai bun . Precizări: a_{ij} şi b_i sunt variabile şi $x_j \in x^*$ sunt constante fixe. Rezolvăm Faza 1 a LPP pentru următoarea mulţime de restricţii:

$$\max\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{k} b_i\right),$$

supusă la

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} - b_i = 0, \text{ pentru } i = 1, ..., k,$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a}_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant \overline{a}_{ij} \\ \underline{b}_{ij} \leqslant b_{ij} \leqslant \overline{b}_{ij} \end{array}\right\}, \text{ pentru } i = 1, ..., k, j = 1, ..., n$$

$$a_{ij}, b_i \text{ sunt fără restricţii de semn.}$$

Teorema 4 (care urmează) este necesară pentru a dezvolta o metodă de găsire a celei mai rele soluţii optime când restricţiile egalitate tip interval sunt incluse în model.

Teorema 4. *Când o restricţie egalitate tip interval a formei* (3) *este inclusă în model, atunci soluţia optimă cea mai rea va avea loc la fiecare din două*:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j = \underline{b}_i, \textit{unde } a'_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} \overline{a}_{ij}, & \textit{dacă } x_j \geqslant 0 \\ \underline{a}_{ij}, & \textit{dacă } x_j \leqslant 0 \end{array}\right., \textit{pentru } x_j \in x^{rs}, \qquad (6)$$

sau

$$\sum_{j=1}^{n} a''_{ij} x_j = \overline{b}_i, \, unde \; a''_j = \begin{cases} \underline{a}_j, & dacă \; x_j \geqslant 0 \\ \overline{a}_j, & dacă \; x_j \leqslant 0 \end{cases}, pentru \; x_j \in x^{rs}. \tag{7}$$

Demonstraţie. Presupunem că punctul de valoare optimă cea mai rea x satisface o variantă specifică arbitrară a restricţiei egalitate de tip interval, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ şi are o valoare a funcţiei obiectiv a lui $\overline{z}$ când LPP a Pasului 2 al Algoritmului 1 este rezolvată. Cum s-a văzut în Teorema 4, acest punct se va găsi în domeniul convex al posibilităţii, definit prin relaţiile (4) şi (5). Acum fie $\overline{z}'$ valoarea funcţiei obiectiv obţinută când aceeaşi LPP este rezolvată cu $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ înlocuită prin (6) şi fie $\overline{z}''$ valoarea funcţiei obiectiv obţinută când aceeaşi LPP este rezolvată cu $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ înlocuită prin (7). Observăm că relaţiile (6) şi (7) sunt pur şi simplu variante de egalitate ale inegalităţilor (4) şi (5). Acum $\overline{z} \geqslant \overline{z}'$ şi $\overline{z} \geqslant \overline{z}''$ prin ipoteză. Totuşi, din cauza convexităţii domeniului posibilităţii definit de (4) şi (5), $\overline{z} = \max[\overline{z}', \overline{z}'']$. Totuşi, nu s-a demonstrat faptul că punctul optim cel mai rău va avea loc când o variantă specifică arbitrară a restricţiei egalitate tip interval este inclusă în LPP; punctul optim cel mai rău va fi găsit când este inclusă în LPP o variantă specifică corespunzătoare lui (6) sau (7).

Din păcate, nu se cunoaşte care dintre relaţiile (6) sau (7) va produce valoarea funcţiei obiectiv optimă cea mai rea. În această situaţie, algoritmul constă în rezolvarea a două LPP: una incluzând (6), cealaltă incluzând (7) şi alegem pentru funcţia obiectiv valoarea cea mai rea dintre cele două rezultate. Dacă sunt k restricţii egalitate tip interval în model, atunci trebuie să fie rezolvate LPP pentru a găsi soluţia optimă cea mai rea. Totuşi, restricţiile egalitate tip interval sunt mai rare în modelele reale. Restricţiile egalitate exprimă în general adevăruri fizice, astfel ca menţinere de flux, în care este puţin probabil să apară coeficienţii tip interval.

Fixările de coeficienţi care dau valoarea optimă cea mai rea sunt cunoscute din varianta lui (6) sau (7) obişnuită cu construcţia modelului care produce valoarea optimă cea mai rea. Un algoritm general pentru rezolvarea problemei LPIC tip I este dat în Algoritmul 3.

ALGORITMUL 3.

Completarea algoritmului pentru rezolvarea problemei LPIC tip I.

Fie problema LPIC tip I cu k restricţii egalitate tip interval.

1. Se găseşte valoarea optimă după cum urmează:

1.1. Se transformă cele k restricţii egalitate tip interval în perechi de inegalităţi non-interval folosind Teorema 3.

1.2. Se rezolvă folosind, ca în Algoritmul 1, cea mai bună amplasare de model.

1.3. Pentru refacerea soluţiei:

1.3.1. Z şi x sunt date direct de tipul de soluţie.

1.3.2. Valorile punctuale ale coeficienţilor tip interval în restricţii egalitate tip interval sunt date direct de amplasarea modelului.

1.3.3. Valorile punctuale ale coeficienţilor tip interval în restricţii egalitate tip interval sunt date prin Algoritmul 2.

2. Se găseşte valoarea optimă cea mai rea după cum urmează:

2.1. Pentru fiecare din cele 2^k modele date de enumerarea restricţiilor egalitate tip interval prin Teorema 4:

2.1.1. Se transformă restricţia egalitate tip interval în varianta non-interval corespunzătoare prin Teorema 4.

2.1.2. Se rezolvă folosind cea mai rea amplasare de model ca în Algoritmul 1 şi se notează Z şi x.

2.2. Pentru refacerea soluţiei:

2.2.1. Se notează cu modelul care se presupune cel mai rău.

2.2.2. Valorile de punct ale coeficienţilor tip interval sunt date direct de amplasarea de model selecţionată în Pasul 2.2.1.

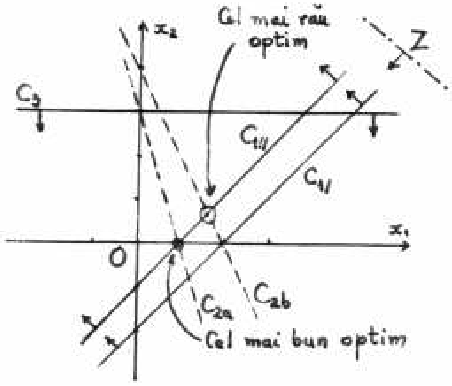

Fig. 6. Variante extreme diferite pemtru exemplul de problemă LPIC tip I

Ca **exemplu** de folosire a Algoritmului 3, considerăm următoarea problemă LPIC tip I (aşa cum este reprezentată în Fig. 6).

$$\min Z = x_1 + x_2,$$

cu restricţiile:

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad -x_1 + x_2 \geqslant [-2,1], \\ C_2 &: \quad [2,3]\, x_1 + x_2 = [3,4]\,. \\ C_3 &: \quad x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 &\geqslant \quad 0. \end{aligned}$$

Pasul 1.1 Se transformă C_2 în două restricţii tip inegalitate: $C_{2a}:\ 3x_1 + x_2 \geqslant 3$, $C_{2b}:\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4$

Pasul 1.2 Se caută cel mai bun optim al LPP: $\min Z = x_1 + x_2$ cu restricţiile:

$$C_{1I}:\ -x_1 + x_2 \geqslant 2,\ C_{2a}:\ 3x_1 + x_2 \geqslant 3,$$
$$C_{2b}:\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4,\ C_3:\ x_2 \leqslant 3,\ x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Pasul 1.3.1 Cea mai bună soluţie este $Z = 1$ la $(1,0)$.

Pasul 1.3.2 Cea mai bună amploare optimă pentru C_1 este dată în Pasul 1.2.

Pasul 1.3.3 Pentru a găsi cea mai bună amplasare optimă pentru C_2, se va rezolva următoarea LPP

$$\max (a + b)$$

cu restricţiile

$$\begin{gathered} 1a + 0 = b, \\ 2 \leqslant a \leqslant 3, \\ 3 \leqslant b \leqslant 4. \end{gathered}$$

Soluţia este $a = 3$ şi $b = 3$, deci varianta specifică a lui C_2 pentru cea mai bună valoare optimă este $3x_1 + x_2 = 3$.

Pasul 2.1 Există două modele pentru enumerare şi rezolvare, după cum urmează:

Modelul A:

$$\min Z = x_1 + x_2$$

cu restricţiile

$$\begin{aligned} C_{1II} &: \quad -x_1 + x_2 \geqslant -1, \\ C_{2a} &: \quad 3x_1 + x_2 \geqslant 3, \\ C_3 &: \quad x_2 \leqslant 3, \\ x_1, x_2 &\geqslant \quad 0, \end{aligned}$$

cu rezultat în $Z = 1$ în punctul $(1, 0)$.

Modelul B:

$$\min Z = x_1 + x_2$$

cu restricţiile

$$\begin{aligned} C_{1II} &: \quad -x_1 + x_2 \geqslant -1, \\ C_{2b} &: \quad 2x_1 + x_2 = 4, \\ C_3 &: \quad x_2 \leqslant 3, \\ x_1, x_2 &\geqslant \quad 0, \end{aligned}$$

cu rezultat în $Z = 2.333$ în punctul $(1.667, 0.667)$.

Pasul 2.2.1 Modelul B precede cel mai rău Z.

Pasul 2.2.2 Variantele specifice ale restricţiilor tip interval care prevăd valoarea optimă cea mai rea sunt date de Modelul B.

Bibliografie

1. Wendell, R.E., *A preview of a tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming*, Discrete Math. **38** (1982), 121 - 124.

2. Brandley, S.P., Hax, A.C. and Magnanti T.L., *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1977.

3. Alefeld G. and Herzberger J., *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, 1983.

4. Ramadan K., *Linear Programming with Interval Coefficients*, M.Sc. Thesis, Department of Systems and Computer Engineering, Carleton University, Ottawa, Canada, 1977.

5. Ben-Israel A. and Robers P.D., *A decomposition method for interval linear programming*, *Mgmt* Sci., **15** (1977), 374 - 384.

6. Levin, V.I., *Boolean linear programming with interval coefficients*, Autom. and Remote Control, **55** (1994), 1019 - 1028.

7. Stancu-Minasian, I.M., Ţigan, S., *Inexact mathematical programming*, Cluj-Napoca Univ., Seminar on Optimisation Theory, 99 - 116, Preprint, 87 - 8, Univ. ,,Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1987.

Departamentul de Matematică
Academia Navală "Mircea cel Bâtran"
Strada Fulgerului, nr.1, 900218 Constanţa, România