El concepto de infinito

José Ramón Ortiz

Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética: hablo del infinito.
Jorge Luis Borges

Introducción Histórica

¿Cuantas almas caben en un centímetro cubico? ¿Cuántos ángeles pueden bailar en la punta de una aguja?

De acuerdo con Wittgenstein esta clase de preguntas no tenían ninguna aplicación *porque, mientras ellas conjuran una «imagen» (picture), con esta imagen no podemos hacer nada*. Según Wittgenstein, lo mismo podía ser dicho del infinito: *«la clase de todas las clases equinumerable con la clase de series infinitas» , así como «la clase de todos los ángeles que caben en la punta de una aguja», es vacía en tanto no se encuentre un uso para ella. Tal uso, todavía, no sólo no ha sido descubierto, sino que debe ser inventado.* (p. 59e)

Por su parte Poincare exclamaba: *¿Es posible razonar sobre objetos que no pueden ser definidos en un número finito de palabras? ¿Es posible aún hablar de ellos y saber que lo que hablamos tiene algún sentido? ¿O por el contrario, deben ser considerados inconcebibles? Para mí, no dudo en considerarlos mera nada.* (p.60)

Y Hilbert llamaba al orden en su artículo «*Sobre el Infinito*»: *al clarificar la idea de infinito debemos tomar aún en consideración un aspecto más general del problema. Si miramos con atención, encontramos que la literatura matemática está llena de absurdos y sinsentidos, que normalmente son achacados al infinito. Así por ejemplo, algunos enfatizan la estipulación, como una condición restrictiva, que, si queremos mantener el rigor matemático, sólo un número finito de inferencias es admisible en una prueba —como si hubiera habido alguien capaz de llevar a cabo un número infinito de inferencias.* (Van Heijenoort, p. 370)

Uno de los logros más grandes de la matemática como lenguaje ha sido su propio coraje imaginativo para enfrentar el concepto más innaccesible y paradójico que haya podido pretender la fragilidad temporal del intelecto humano: el concepto de infinito. Casi podríamos decir que la matemática es el lenguaje que pretende hablar del infinito, o la ciencia que pretende medir el infinito.

Vulgarmente se utiliza la palabra infinito para denotar algo muy grande, ilimitado, o imposible de contar. Pero el infinito va más allá de lo «muy grande» y de la posibilidad humana (temporal) de contar. La noción de infinito como idea de algo ilimitado o inalcanzable, ha sido una fuente de confusión a través de la historia. Perturbó a los antiguos griegos, quienes trataron inútilmente de comprenderlo sometiendo el infinito a la intuición del sentido común, la cual, lamentablemente, estaba inspirada en un mundo finito y, generalmente, los condujo a conclusiones contradictorias y paradójicas, como la famosa carrera donde Aquiles nunca alcanza a la tortuga.

Para Platón y Pitágoras el infinito era *apeiron*, el caos, el infinito carecía de medida: *metron.* La voz «apeirón» tal como la emplea Anaximandro, significa «*sin fin*» o «*sin límite*», suele traducirse como «*lo infinito», «lo indefinido», «lo ilimitado*».

La idea del infinito también fue rechazada por Aristóteles y los escolásticos, basados en las mismas contradicciones que el concepto de infinito generaba. Uno de los típicos argumentos esgrimido en contra del infinito era el conocido como la «*aniquilación* de los números», según este argumento los números finitos serían absorvidos por los números infinitos, es decir, para todo número finito a, $a+\infty = \infty$ y de esta forma los números infinitos *aniquilaban* a los números finitos.

Aristóteles trató de enfrentar el problema del infinito a través de dos representaciones, dos concepciones complementarias y cuya interacción dialéctica ha influido el propio desarrollo de la matemática. En el tercer libro de su obra *Física*, Aristóteles distingue dos tipos de infinito; el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito *potencial* y el segundo el infinito *actual.*

La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y *así sucesivamente*, donde esta última expresión y «*así sucesivamente*» encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito. Este tipo de infinito potencial es el que sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. Por su parte, la noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría al dividir un segmento de recta en un número infinito de puntos y el infinito actual de los infinitesimales sirvió de soporte heurístico para la posterior formalización del cálculo infinitesimal.

Durante la Edad Media, la mayor parte de la matemática relacionada con lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño tomó la forma de un conjunto de especulaciones en torno a las ideas de Platón y Aristóteles sobre la relación entre punto y recta, la naturaleza de lo inconmensurable, las paradojas de Zenón, la existencia de lo indivisible y la potencialidad y actualidad de lo infinito. Aunque en esta época, el debate sobre la naturaleza del infinito tomó connotaciones teológicas más bien que matemáticas, al considerarse el infinito como propiedad exclusiva de la majestad divina de Dios. Así, San Agustín creía que sólo Dios y sus pensamientos eran infinitos y, Santo Tomás de Aquino, por su parte, demostraba en el *Summa Theologiae* que, aunque Dios era ilimitado él no podía crear cosas absolutamente ilimitadas.

Esta controversia sobre el infinito se prolongó durante el Renacimiento y en 1600 llevó a la hoguera, por obra de la Inquisición y un traidor veneciano, al gran mago renacentista Giordano Bruno, quien predicó un universo constituido por infinitos mundos.

En ese mismo año de 1600, Galileo Galilei, aunque con cierta ambigüedad, rechazó la idea del infinito como paradójica, ya que atentaba contra la razón. Galileo llegó a esta conclusión después de observar que los puntos de dos segmentos de recta de diferente longitud podían hacerse corresponder biunívocamente, es decir, el infinito permitía que la *parte* fuera del mismo tamaño que el *todo*. Otro ejemplo muy utilizado por Galileo, y popular por esa época, fue el del conjunto de los números perfectos: el conjunto de los *números perfectos* es apenas una parte del conjunto de los números naturales, sin embargo cada número natural es la raiz cuadrada de un único número natural ($n \rightarrow n^2$).

Galileo no escribió ningún libro sobre los aspectos matemáticos de su trabajo, pero, a pesar de rechazar por *sin sentido* o *Inquisición* al infinito actual, frecuentemente consideró un segmento de recta formado por un número infinito de puntos y aceptó el continuo de la recta como un infinito actual.

La revolución científica del siglo XVII, de la cual la ciencia moderna es raíz y fruto, representó un cambio paradigmático de un mundo cerrado a un universo infinito, (Koyré). A partir de este siglo se comienza a usar la curva *lemniscata* (∞) como símbolo del infinito y aparece en las populares cartas del Tarot a manera de sombrero sobre la cabeza del Mago o Juglar, en la carta del mismo nombre. El matemático John Wallis, en su obra *Arithmetica Infinitorum,* fue el primero en usar la *lemniscata* (∞) para representar el infinito.

Kant, en el siglo XIX, coincidía con Aristóteles al señalar que el límite absoluto es imposible en la experiencia, es decir, nunca podemos llegar al infinito (actual). Y el gran matemático Karl Friedrich Gauss, en 1831, enfatizaba su protesta contra el uso del infinito como algo consumado: «*Protesto contra el uso de una cantidad infinita como una entidad actual; ésta nunca se puede permitir en matemática. El infinito es sólo una forma de hablar, cuando en realidad deberíamos hablar de límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse tanto como se desee, mientras otras son permitidas crecer ilimitadamente*».

Gauss no fue el único matemático de su época en rechazar el infinito actual. También Cauchy rechazó la idea de una colección infinita, por razones parecidas a las de Galileo; es decir, la existencia de una biyección entre la totalidad infinita y una de sus partes, lo cual echaba por tierra el axioma euclidiano de que el todo es mayor que la parte.

El teólogo y matemático checo Bernhard Bolzano fue el primero en tratar de fundamentar la noción de infinito actual, en su obra póstuma *Paradojas del infinito* (1851), defendió la existencia de un infinito actual y enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos. Bolzano aceptó como algo normal que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos mismos. Esta definición del infinito fue utilizada posteriormente por Cantor y Dedekind.

A pesar de que la obra de Bolzano *Paradojas del infinito* era más bien de corte filosófico que matemático, ya que carecía de conceptos cruciales como conjunto y número cardinal (potencia), podríamos decir que Bolzano fue el primer matemático en dar las bases para la construcción de una teoría de conjuntos.

La muerte como eternidad

En una novela de Arthur Schnitzler (Flight into Darkness, p. 29-30. Simon and Schuster, New York, 1931), uno de los personajes, el Dr. Leinbach recurre al infinito para demostrar que la muerte no existe:

«Leinbach ha descubierto una prueba de que la muerte no existe. Más allá de toda duda, ha declarado, que en todo tipo de muerte, no sólo en la muerte por inmersión, se vuelve a vivir en el último momento toda la vida pasada, a una velocidad inconcebible para los demás. Esta vida recordada debe tener también un último momento, y este último momento su propio último momento y así sucesivamente. Por lo tanto morir era la eternidad. De acuerdo con la teoría de límites uno se aproxima a la muerte, pero nunca la alcanza — Una figura cuestionable, este doctor Leinbach.» (Bernardet, p. 72)

El Paraiso Transfinito de Cantor

A finales del siglo XIX, Cantor desarrolla una teoría formal sobre el infinito actual. Todos los argumentos dados, señala Cantor, en contra del infinito han sido insensatos, ya que han tratado la aritmética de los números infinitos como una extensión de la aritmética de los números finitos.

Uno de los objetivos de su obra *Grundlagen* era demostrar que no había ninguna razón para aceptar las viejas ideas en contra del infinito actual. Si los conjuntos infinitos se comportan de manera diferente a los conjuntos finitos no quiere decir que estos sean inconsistentes, sino que obedecen a una aritmética diferente.

Cantor demostró, contra la famosa aniquilación de lo finito por lo infinito, que los números infinitos eran susceptibles de ser modificados por los números finitos. Así, la distincion de ω y $\omega+1$ demostraba, dentro de la teoría de los números transfinitos, que los números finitos podían ser sumados a los números infinitos sin ser *aniquilados*, (Dauben, p. 121). También rechazó la distinción aristotélica entre infinito actual e infinito potencial, ya que todo infinito potencial presupone la existencia de un infinito actual.

Georg Cantor fue el creador de la teoría de conjuntos transfinitos y, siguiendo los pasos de Bolzano, consideró que la idea de una biyección sería el principio básico para comparar conjuntos infinitos. Si existe una biyección entre dos conjuntos, podemos decir que dichos conjuntos son equipolentes o tienen la misma potencia. El término de potencia de un conjunto dio paso al término de *número cardinal*.

Bolzano introdujo las siguientes definiciones de conjunto infinito:

Un conjunto no vacio A es finito si para algún entero positivo n, A es equipolente a {1,2,....,n}; de otra forma A es infinito.

Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A equipolente a A; en cualquier otro caso A es finito. (Moore, p. 22)

Cantor y Dedekind utilizaron esta definición reflexiva del infinto:

Cantor (1878): *Un conjunto finito es uno cuya potencia es un entero positivo. Para tal conjunto todo subconjunto propio tiene una potencia menor, mientras que un conjunto infinito A tiene la misma potencia que algún subconjunto propio de A.* (Implícitamente dio estas propiedades cuando demostró que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R^n}$ tenían la misma potencia).

Dedekind (1882): *Un conjunto A es Dedekind-infinito si algún subconjunto propio B de A es equipolente a A; en cualquier otro caso A es Dedekind-finito.* (Carta de Dedekind a Cantor, 1882).

Cantor (1882): *Por un conjunto finito entendemos un conjunto M, el cual surge a partir de un elemneto original a través de la adición sucesiva de nuevos elementos de tal forma que el elemento original puede ser obtenido a partir de M eliminando sucesivamente los elementos añadidos en el orden reverso*. (Esta es la primera definición explícita de un conjunto finito dada por Cantor).

Cantor (1883, *Grundlagen*): *Mientras que un conjunto finito siempre retiene el mismo número ordinal, independientemente de la forma en que estén ordenados sus elementos, un conjunto infinito puede ser reordenado de tal forma que tenga más de un ordinal*.

Cantor definió que dos conjuntos tenían el mismo número de elementos si existía una correspondencia biunívoca entre los miembros de ambos conjuntos; a diferencia de Bolzano, quien concluyó que la existencia de una correspondecia entre dos conjuntos infinitos A y B no justificaba la inferencia de su igualdad, con respecto a la multiplicidad de sus miembros,

La razón por la cual la definición de Cantor y sus consecuencias han sido aceptadas no es porque estén, ciertamente, mas cerca del uso común sino más bien porque son más útiles para la matemática. Aún hoy en día tendemos a pensar que existen más números naturales que números pares. (Wang, p. 70).

Cantor consideraba tres contextos donde surge el concepto de infinito actual: *primero cuando es realizado en la forma más completa, en un ser independiente de otro mundo, en Dios, al cual llamo el Infinito Absoluto o simplemente Absoluto; segundo cuando ocurre en lo contingente, en el mundo físico; tercero cuando la mente lo aprehende en abstracto como una magnitud matemática, número, o tipo de orden. Quiero hacer un claro contraste entre el Absoluto y lo que yo llamo Transfinito,es decir, los infinitos actuales de las dos últimas clases, los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y por lo tanto relacionados con lo finito.*(Gesammelte Abhandlungen. p. 378).

El Infinito Absoluto es el Absoluto, por definición lo imposible de alcanzar: lo inalcanzable. El grado máximo de independencia, autonomía y completitud. En la categoría de Infinito Absoluto o Absoluto entran Dios, el último ordinal Ω y la clase **V** de todos los conjuntos. Para Cantor desentrañar el infinito absoluto era una labor mística: la busqueda de Dios. Más recientemente, Gaisi Takeuti definía de la siguiente manera su trabajo sobre Teoría de Conjuntos: «Tratamos de obtener una descripción exacta de los pensamientos de una mente infinita»(Rucker, p.)

Para Cantor, tanto el infinito actual de la matemática como el infinito físico actual constituían lo *Transfinito*, donde, a diferencia del infinito absoluto, inalcanzable, existían una infinitud de infinitos: *los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y por lo tanto relacionados con lo finito*.

En 1872, Dedekind, demostró que la línea recta L es infinitamente más rica en puntos-individuales que el dominio **R** de los números racionales en números-individuales, (Dauben, p. 48). Lo cual traía como consecuencia la existencia de al menos dos tamaños diferentes de infinito, dos cardinalidades infintas. El infinito numerable de los números naturales, *el infinito discreto* y el *infinito continuo* de (los números reales) la linea recta cuya cardinalidad es c o $2^{\aleph_0}$.

En una carta de Cantor a a Dedekind, fechada el 29-11-1873, este le plantea el problema: *Consideremos la colección de todos los números enteros positivos* ***n*** *y denótemosla por* ***(n)****; entonces consideremos la colección de todos los números reales y denotémosla por* ***(x)****; la pregunta es simplemente si* ***(n)*** *y* ***(x)*** *podrán ponerse en correspondencia de tal forma que cada individuo de una colección correspondiera a uno y sólo uno de la otra colección. A primera vista se podría decir que no, que no es posible, ya que* ***(n)*** *consiste de partes discretas mientras que* ***(x)*** *constituye un continuo; pero no ganamos nada con esta objeción, y soy de la opinión de que no se puede hallar tal correspondencia entre* ***(n)*** *y* ***(x)*** *pero no encuentro la razón de ello, quizás porque le doy demasida importancia y la razón podría ser muy sencilla.* (Dauben, p. 49) .

Si identificamos los números reales con conjuntos arbitrarios de números naturales, el problema de caracterizar el continuo es transformado en el problema de caracterizar conjuntos arbitrarios de números naturales.

Cantor se había dado cuenta de que los números racionales y los números algebraicos eran numerables (la misma cardinalidad de los números naturales). Sin embargo, Liouville había establecido la existencia de números no algebraicos, los números transcendentales, pero a pesar de sus esfuerzos, Cantor no podía encontrar la razón para afirmar o negar la numerabilidad de los números reales.

La prueba original de que los números reales eran no numerables fue desarrollada durante el mes de Diciembre de 1873 y publicada en 1874 (*On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers*). La prueba fue dada por Cantor demostraba una aplicación de la conclusión de que el conjunto A de todos los números algebraicos era numerable. Esta aplicación era una corroboración de la prueba de Liouville de que en todo intervalo (a,b) hay un número infinito de números transcendentales. Como A era numerable y R no era numerable, Cantor afirmó el mismo resultado. (Dauben, p. 51).

Los números ordinales transfinitos surgen de la operación de contar y pueden ser construidos en forma *naive* de la siguiente manera:

i) 0 es un numero ordinal .

ii) Si a es un numero ordinal entonces a +1 es un numero ordinal (el numero ordinal sucesor)

iii) Si se tiene una sucesión de ordinales **(a)** entonces existe un último ordinal **lim(a)** el cual es mayor que todo **a** en **(a)**

A parftir de i) y aplicando ii) obtenemos: 0,1,2,3,.......

Para superar la sucesión infinita de ordinales finitos usamos iii) para obtener lim(n) = ω

Así obtenemos 0, 1, 2,....., ω

Utilizando otra vez ii) obtenemos 0, 1, 2,...., ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$,....

Y aplicando iii) a lim (ω+n) obtenemos $\omega+\omega$ o $\omega.2$

De esta forma podemos obtener:

0, 1, 2, ...ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ...,$\omega.2$, $\omega.2 + 1$, $\omega.2 + 2$,....,$\omega.3$, $\omega.3+1$, $\omega.3+2$,... ....$\omega.\omega$, $\omega.\omega+1$, ...,$\omega.\omega.+\omega$, ...,$\omega.\omega+\omega.2$, ...$\omega.\omega.2$, ...,$\omega.\omega.3$, ...,$\omega.\omega.\omega$, ..., ...,ω^{ω}.

La construcción formal de ordinales se basa en la idea de identificar los números ordinales con conjuntos:

$$\alpha < \beta \text{ iff } \alpha \quad \beta \text{ y } \beta = \{\alpha: \alpha < \beta\}$$

Un conjunto α es un ordinal (número orninal) si es transitivo y bien ordenado por .

Un ordinal se determina dando un ejemplo de un conjunto ordenado A tal que si se pudiera contar A en el orden correcto entonces se contaría hasta a, donde a se considera el tipo de orden de A. Podemos decir que el ordinal a se obtiene del conjunto ordenado A ignorando la apariencia de los elementos de A y observando el arreglo u orden de estos elementos.

Ahora bien, todos los ordinales que enumeramos anteriormente, cabrían en el Hotel de Hilbert, un hotel con ω habitaciones inventado por Hilbert para ilustrar sus ideas sobre el infinito. En este hotel podemos alojar tantos huespedes como la cardinalidad ω. Es decir, todos estos ordinales tienen cardinalidad ω, de tal forma que podemos hallar una correspondencia biunívoca entre $\omega+\omega$ y ω, entre ω y ω^2 o entre ω^{ω} y ω.

Un número ordinal α es un número cardinal si y sólo si α no tiene la misma cardinalidad que ningún β menor que α. Así, todos los números naturales son cardinales y ω es el primer cardinal infinito.

Cantor llamó a los cardinales infinitos *alefs*, alef-cero: «$\aleph_0$», es el primer cardinal infinito correspondiente al ordinal ω. «$\aleph_1$» es el primer ordinal con cardinalidad mayor que ω, es decir el primer ordinal que no puede ponerse en correspondencia biunívoca con ω.

Concebir el primer ordinal infinito es equivalente a considerar la multiplicidad de todos los ordinales finitos como una unidad: como el conjunto: {0,1,2,3,....}. El ordinal ω existe como ordinal, en tanto el conjunto de los números naturales sea considerado como una unidad existencial. Debemos recordar que Cantor definía conjunto como *una multiplicidad que puede ser pensada como una unidad*. (Cantor, p. 204)

Los alefs están ordenados y en general alef-n, $\aleph_n$, es el enésimo cardinal infinito : $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \ldots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{\omega^\omega}, \ldots. \aleph_{\aleph_1}, \ldots \aleph_{\aleph_\omega} \ldots\ldots.$

Inclusive podríamos hallar un cardinal infinito θ tal que $\theta = \aleph_\theta$. El cardinal θ es el primer cardinal inaccesible mayor que $\aleph_0$. Un cardinal se llama *inaccesible* porque es muy dificil de alcanzarlo desde abajo, es decir, no se puede alcanzar por medio de la suma de θ ordinales menores que θ, (formalmente se dice que θ es *regular*); y tampoco se puede alcanzar por medio de la operación límite sobre un cardinal menor que θ. De esta forma θ es el primer cardinal regular límite después de ω. Así como ω es el primer cardinal infinito, θ es el primer *cardinal grande*.

Existe toda una teoría de cardinales grandes, entre los que encontramos: cardinales indescriptibles, inefables, Ramsey, Mahlo, fuertemente compactos, supercompactos y, finalmente, los cardinales extensibles. Estos últimos son los cardinales más grandes que se consideran actualmente en la Teoría de Conjuntos.

Para Cantor la introducción de los números transfinitos en la matemática era tan legítima como la introducción de los números irracionales, porque ontológicamente su estatus era el mismo, ambos son definidos en función de conjuntos infinitos y por procedimientos similares. Su obra *Grundlagen* definía consistentemente a los números transfinitos y construía una teoría conceptualmente consistente y matemáticamente válida.

El universo transfinito de Cantor no podía alcanzar el infinito absoluto, ya que según el *principio de reflexión* es imposible alcanzar el Absoluto, o dicho de otra forma: el Absoluto es inconcebible. Por ejemplo, el último ordinal Ω es inconcebible porque cualquier descripción de Ω puede ser aplicada a un ordinal $\alpha < \Omega$. Burali-Forti en 1897, *A Question on Transfinite Numbers*, fue el primero en señalar la imposibilidad de definir un último ordinal correspondiente al orden de todos los números ordinales ya que si tal ordinal Ω existiera, entonces inmediatamente tendríamos $\Omega+1$.

Lo mismo sucede con V, la clase de todos los conjuntos. El *principio de reflexión* se expresa en la teoría de conjuntos como: Toda propiedad concebible para V es también concebible para un conjunto a V. La definición de V como un conjunto, al concebirlo como una unidad, trajo como consecuencia las paradojas de Burali-Forti y Russell.

El jardín de senderos que se bifurcan

En el relato de Jorge Luis Borges «*El jardín de senderos que se bifurcan*» se plantea lo siguiente:

El jardín de senderos que se bifurcan es una imagen incompleta, pero no falsa, del universo tal como lo concebía Ts'ui Pen. A diferencia de Newton y de Schopenhauer, su antepasado no creía en un tiempo uniforme, absoluto. Creía en infinitas series de tiempos, en una red creciente y vertiginosa de tiempos divergentes, convergentes y paralelos. Esa trama de tiempos que se aproximan, se bifurcan, se cortan o que secularmente se ignoran, abarca *todas* las posibilidades. No existimos en la mayoría de esos tiempos; en algunos existe usted y no yo; en otros, yo, no usted; en otros, los dos. En éste, que un favorable azar me depara, usted ha llegado a mi casa; en otro, usted, al atravesar el jardín, me ha encontrado muerto; en otro, yo digo estas mismas palabras, pero soy un error, un fantasma.

¿Es necesario, como plantea Borges, que el infinito sea exhaustivo? Es decir, que un infinito número de mundos contenga todos los mundos posibles.

Este no es el caso, y para demostrarlo podemos utilizar la siguiente analogía numérica: Sea P el conjunto de todos los números pares. P contiene un número infinito de elementos pero no contiene todas las clases de números: Por ejemplo, sin ir muy lejos, no contiene el número 3, ni ningún número impar.

El infinito físico

Desde tiempos de Aristóteles se tenía la intuición de que el espacio y el tiempo podían ser extendidos ilimitadamente y un intervalo espacial o temporal podía ser dividido indefinidamete. Pero hoy en día se considera que somos incapaces de percibir el infinito. Ya Giordano Bruno había advertido por boca de Filoteo: N*o hay sentido que vea el infinito, no hay sentido de quien se pueda exigir esta conclusión, porque el infinito no puede ser objeto de los sentidos, y, en consecuencia, quien pretende conocerlo por medio de los sentidos es semejante a quien quisiera ver con los ojos la substancia y la esencia.* (p. 63).

En general,el espacio puede ser infinito de tres formas diferentes:

1) Existe un nivel n para el cual el espacio n-dimensional es real e infinitamente extendido: dentro de esta posibilidad está un universo de tres dimensiones infinitamente grande.

2) Existe un n para el cual existe un único espacio real de dimension n. Este espacio es finito e ilimitado, y el espacio de dimensión $n + 1$ no es real. Es el caso de nuestro espacio de tres dimensiones finito e ilimitado donde se niega la realidad de un espacio de cuatro dimensiones.

3) Existen espacios reales de todas las dimensiones, y cada uno de estos espacios es finito e ilimitado. En este caso, podemos tener un infinito número de universos: el multiverso. Un *duoverso,* en este sentido, es un universo de cuatro dimensiones que contiene universos de tres dimensiones.

Además, de acuerdo con el conocimiento actual, y suponiendo cierta la teoría de la relatividad de Einstein, podemos decir que existen dos posibilidades de universo:

i) Hiperesférico: Cerrado e ilimitado, se expande y se contrae. Posibilidad de espacio infinito tipo 2) o tipo 3)

ii) Espacio infinito: se expande por siempre. Posibilidad de espacio infinito tipo 1).

Todo lo que podemos decir del espacio físico es que no hay puebas conclusivas de que todo en el universo sea finito, y por lo tanto el infinito continua siendo una posibilidad ontológica.

Lo infinitamente pequeño despierta las mismas paradojas que lo infinitametne grande. Como un punto carece de la dimensión longitud, no importa el número finito de puntos que tomemos, jamás podrán constituir un segmento de recta, el cual si posee longitud. Por lo tanto cabe suponer que todo segmento de recta, toda región del plano o del espacio debe estar constituida por un número infinito de puntos. De la misma manera podemos considerar que un intervalo de tiempo está constituido por un número infinito de instantes.

En el universo matemático esto parece correcto, pero no así en el universo físico, donde la construcción matemática no siempre posee un modelo material que la satisfaga. Así, la pregunta sobre la existencia de los infinitesimales se transforma en la pregunta sobre la posibilidad de que la materia sea infinitamente divisible.

Uno de los patrones comunes de la investigación científica ha sido el análisis, la descomposición de algo en sus partes constitutivas. Esto conlleva la suposición de que todas las cosas están compuestas por cosas más pequeñas y a la descomposición de la materia en sus partes constituyentes. Hasta los momentos, la historia del problema de la divisibilidad de la materia ha producido la siguiente jerarquía: Materia, moléculas, átomos, partículas subatómicas, leptons y quarks.....

Y esto parece, siguiendo a Aristóteles, una divisibilidad potencial de la materia, ya que para cada partícula que encontremos, siempre podemos argüir que si aplicamos la energía suficiente a dicha partícula mínima, ésta sería dividida.

Quizás la pregunta sobre si la materia es infinitametne divisible no tenga sentido una vez que nos adentramos en el mundo subatómico; sin embargo, no existen pruebas contundentes de que todo lo que existe en el universo sea finito, y cualquier concepción *finitista* del universo es a priori, independiente de toda evidencia científica. Es decir, la imposibilidad de que exista un número infinito implica, de antemano, que el número de estrellas es finito.

El problema de la Hipótesis del *Continuo*

Hoy en día podríamos decir que existen dos posiciones frente al problema del *continuo*, como señala acertadamente Donald A Martin en su artículo «Hilbert's first problem: The Cotinuum Hypothesis». Una posición cuestiona si el problema de la hipótesis del continuo ha sido matemáticamente resuelto y otra posición, más extrema, cuestiona si la hipótesis del continuo es, tal como ha sido planteada, un problema matemático, (Browder, p. 81).

La primera posición encara el problema planteado por Hilbert como el *Problema de Cantor sobre la cardinalidad del continuo*. La segunda posición, independientemente que consideremos el problema desde el punto de vista matemático o filosófico, enfrenta, indirectamente, la pregunta sobre si la matemática es una disciplina objetiva, es decir, si las entidades matemáticas existen independientemente de la concepción que los matemáticos tienen de ellas, y ésta es una pregunta abierta. Utilizamos la palabra «objetiva» en un sentido amplio, queriendo significar con ella que no requerimos que las entidades matemáticas existan ontológicamente sino que sean independientes de las afirmaciones que hacemos acerca de ellas. En este sentido consideramos la existencia matemática como posibilidad ontológica.

Cuando decimos que existe un sucesor para cada número natural, estamos afirmando que para cada clase de *n* mangos, donde *n* es cualquier número natural, siempre es posible que exista una clase de *n*+1 mangos. Aquí la existencia actual en sentido matemático es la posibilidad de existencia en sentido ontológico.

La Hipótesis del *Continuo* de Cantor dice que el número cardinal del continuo **c**, $2^{\aleph_0}$, (del conjunto de los números reales) es $\aleph_1$, el menor cardinal no numerable. El cardinal **c** o $2^{\aleph_0}$ no estaba definido de ninguna forma tal que se identificara con un *alef* y Cantor supuso que correspondía al primer ordinal de la segunda clase, $\aleph_1$.

La hipótesis generalizada del continuo dice que para todo número cardinal infinito $\aleph_\alpha$, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ El número cardinal de la colección de todos los subconjuntos de un conjunto de cardinalidad $\aleph_\alpha$ es el menor número cardinal mayor que $\aleph_\alpha$. El caso de la hipótesis del continuo es el caso particular: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

En 1940 Kurt Gödel demostró que la Hipótesis del Continuo es consistente en la teoría axiomatica de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Es decir, a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel no podemos probar que la cardinalidad del continuo $c \neq \aleph_1$. La demostración de Gödel se basa en la construcción de un universo posible en el cual todos los axiomas del sistema de Zermelo-Fraenkel eran satisfechos y en el cual la cardinalidad del conjunto de partes de ω, cardinalidad de $P(\omega) = \aleph_1$. Este universo L, es el universo de los *conjuntos constructibles.*

En 1963, Paul Cohen probó que la negación de la Hipótesis del Continuo es consistente con el sistema de Zermelo-Fraenkel. Por medio del método de *forcing*, Cohen construyó varios universos posibles en los cuales todos los axiomas del sistema Zermelo-Fraenkel fueran satisfechos y la cardinalidad de $P(\omega) = \aleph_2$ o $\aleph_\omega$ o cualquier otro *alef*.

De esta forma, la existencia de estos universos posibles traían como consecuencia la independencia de la Hipótesis del *Continuo* de los axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Hilbert, al presentar el problema de la cardinalidad del continuo, suponía que la teoría de conjuntos formalizada por Zermelo-Fraenkel, era suficientemente fuerte para decidir sobre este problema. Es difícil saber si el mismo Hilbert hubiese considerado los resultados de Gödel y Cohen como solución al problema.

Por su parte Gödel pensaba que el significado de la Hipótesis del *Continuo* era independiente de cualquier sistema formal de axiomas y que la prueba de su independencia sólo demostraba la debilidad de estos axiomas, Para Gödel estaba claro que la Hipótesis del Continuo era verdadera o falsa, y el problema consistía en construir un sistema formal para decidir cuál era el caso.

Paul Cohen (p. 151), sugiere que la tendencia general con el tiempo será la de aceptar la Hipótesis del Continuo como falsa. Para ello, Cohen se basa en que $\aleph_1$ es el conjunto de ordinales numerables, y esta es la forma más simple de generar un cardinal infinito, por medio de un proceso discreto de añadir un conjunto a la vez (Axioma de remplazo). Sin embargo, el conjunto **c**, del continuo, se genera por medio de una operación mucho más compleja de teoría de conjuntos: el Axioma del Conjunto Potencia o de Partes. Dado un conjunto A siempre podemos considerar el conjunto de todos los subconjuntos de A: $\mathcal{P}(A)$. Así, c es mucho mas complejo que $\aleph_1$, $\aleph_\omega$, o $\aleph_{\aleph_\omega}$, y parece imposible que a partir de un proceso discreto de añadir un conjunto a la vez, de la forma que Cantor construye sus clases de números ordinales, se pueda alcanzar c, un infinito infinitamente más rico.

Según Yu. I. Manin (Browder, p. 36), hoy en día podemos señalar prospectivamente dos líneas de investigación:

1) Encontrar nuevos axiomas para fundamentar la teoría de conjuntos donde se pueda resolver el problema de la Hipótesis del *Continuo.*

2) Desarrollar un nuevo lenguaje para hablar del infinito

Como hemos visto, a pesar de que el concepto de infinito ha sido el principal protagonista de dos de las mayores revoluciones en la historia de la matemática como lo fueron la creación del calculo infinitesimal y la teoría (transfinita) de conjuntos, y de haber estado involucrado en toda conjetura sobre la estructura del universo (desde Lucrecio hasta Hawking). Todavía, el concepto de infinito, representa un lugar indefinido, de descripción ambigua e identidad ilegítima y despierta un sentimiento de desesperación (*horror al infinito*).

Para finalizar podemos señalar que la independencia de la Hipótesis del *Continuo* y la posible brecha infinita entre lo *discreto* y lo *continuo* están allí para recordarnos que la naturaleza del infinito, el primer problema de la lista de Hilbert, todavía es un problema abierto y sólo nos queda esperar con Paul Cohen que «*las futuras generaciones puedan ver este problema con más claridad y expresarlo de forma más elocuente*». (p.151).

BIBLIOGRAFÍA

BERNARDETE, Jose A.
Infinity An Essay in Metaphysics. Clarendon. Oxford,1964.
BORGES, Jorge Luis
«Avatares de la tortuga», *Discusión*. Emecé. Buenos Aires, 1964.
«El jardín de senderos que se bifurcan». *Ficciones*. Emecé. Buenos Aires, 1956
BROWDER, Felix E.
Mathematical Developments Arising From Hilbert Problems. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, (Volume XXVIII),.AMS, 1976.
BRUNO, Giordano
Sobre el infinito universo y los mundos. Orbis.
CANTOR, Georg
Gesammelte Abhandlungen. Eds. A. Fraenkel y E. Zermelo. Springer-Verlag, 1932.
COHEN, Paul J.
Set Theory and the Continium Hypothesis. W.A. Benjamin. New York,1966.
DAUBEN, J.W.
Georg Cantor his mathematics and philosophy of the infinity. Princeton U.P.,1990 (1979).
JECH, Thomas
Set Theory. Academic Press. New York,1978.
KEISLER, H. Jerome
Model Theory for Infinitary Logic. North Holland. Amsterdam,1971.
KOYRE, Alexandre
From the Closed World to the Infinite Universe. John Hopkins Press. Baltimore,(1957)1968.
MAOR, Eli
To Infinity and Beyond A cultural history of the infinity. Birkhauser. Boston,1986.
MOORE, G. H.

Zermelo's Axiom of Choice. Its origins development and influence. Springer. 1982.

ORTIZ, José Ramón

Matemática y Ciencia. UNA, Caracas 1988.

La Lógica del Caos. Editorial Kapelusz-FEUNA, Caracas,1991

POINCARE, Henri

Last Essays

SCHNITZLER, Arthur

Flight into Darkness. Simon and Schuster. New York, 1931

REID, C.

Hilbert. Springer-Verlang,1970.

VAN HEIJENOORT, J. (Ed.)

From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic,1879-1931. Harvard U.P.,1967.

WAISMANN, Friedrich

Lectures on the Philosophy of Mathematics. Rodopi. Amsterdam,1982.

WANG, Hao

*From Mathematics to Philosophy***.** Routledge & Keagan Paul. London,1974.

WITTGENSTEIN, Ludwig

Remarks on the Foundations of Mathematics. Basil Blackwell. Oxford,1967.