Enteros y Trascendentes : Más Allá de Fermat

Luis Gómez-Sánchez A.

I

El 7º problema de Hilbert, propuesto en el Congreso Internacional de Matemática de 1900, en París, tiene que ver con números trascendentes. A la época ya se sabía que tanto e (Hermite, 1873) como π (Lindemann, 1882) eran trascendentes, pero se ignoraba aun si e^{π} lo era también. Hilbert pronosticó que su problema sería resuelto después que la Hipótesis de Riemann y la Conjetura de Fermat, pero la realidad comenzó a desmentir este vaticinio con el aporte de Gelfond en 1929 quien demostró que e^{π}es trascendente. El problema culminó de manera definitiva con los trabajos independientes del mismo Gelfond y de Schneider en 1934, habiendo sido esta solución muy vastamente generalizada por Baker en 1966. En la actualidad sabemos que el 7º problema está totalmente y con creces resuelto; en particular tenemos que **si α es algebraico no igual a 0 o 1 y es irracional algebraico entonces el número α^{β} es trascendente** [1] lo cual constituye un resultado portentoso de la teoría de números: al preguntarse Hilbert si $2^{\sqrt{2}}$ era racional, algebraico o trascendente, el intuía muy bien la raigambre sumamente difícil del problema y de allí su pronóstico fallido.

Es muy fácil darse cuenta que el conjunto de los números algebraicos, es decir, aquellos que son raíces de polinomios de Z[X], es numerable ya que dicho conjunto es la reunión numerable de los A_m donde A_m designa el conjunto, claramente finito, de las raíces de los polinomios de Z[X] cuyo grado y cuyo máximo de los valores absolu-

Nota del Editor: Este trabajo fue recibido a principios de 1994. Desde entonces, Wiles junto con Taylor parecen haber completado las lagunas que originalmente tenía la prueba de Wiles.

tos de sus coeficientes son menores o iguales que m. Así pues, el complemento correspondiente en C, es decir, por definición, el conjunto de los números trascendentes, tiene la potencia del continuo y casi todos los números complejos, en el sentido de la medida de Lebesgue, son trascendentes. Sin embargo, fue solo en 1844 que Liouville encontró el primer número trascendente conocido, $a = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ en cuya expresión decimal la aparición del 1, única cifra no nula que interviene, se va enrareciendo muy rápidamente. Hubo que esperar a Hermite para conocer el primer número trascendente «no artificioso», a saber **e**, y al más sustancial trabajo de Lindemann, nueve años después, para conocer bastantes más y en particular acabar, por la negativa, con el problema legendario de la cuadratura del círculo.

Contemporáneamente, la teoría de los números trascendentes anda hermanada con la teoría de la aproximación diofántica dentro de un marco amplio y sofisticado en el que se establece no solo la trascendencia de un número sino también la manera como los racionales no pueden acercarse al número en cuestión; así por ejemplo, no basta con decir que π es trascendente sino que hay que agregar que para todo racional p/q, se cumple

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}}$$

lo cual, por cierto, no tiene absolutamente nada de evidente ni sospechable [2]. Casi todo lo relacionado con números trascendentes es de índole dificultosa y el solo punto de partida, el establecer la naturaleza trascendental de ciertos números, puede ser un problema que desafíe todo esfuerzo. Como ejemplos famosos tenemos la muy útil constante de Euler

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n - \log n)$$

de la que no se sabe si es racional, algebraica o trascendente; asimismo con las sumas de las potencias impares de los inversos de los enteros naturales, es decir, con las imágenes de los impares mayores que 1 por la función zeta de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

función ésta de importancia fundamental en la Aritmética (Apery, en un trabajo muy celebrado por la comunidad matemática internacional, demostró por procedimientos elementales en 1978 que $\zeta(3)$ es irracional). Afortunadamente, a partir de Lindemann se sabe que para α algebraico no nulo, cos α, sen α y tg α son trascendentes, y también log α, si α es además distinto de 1. Esto unido al teorema enunciado que resuelve el 7º problema de Hilbert, nos proporciona una sencilla panoplia para la determinación de muchos números transcendentes.

II

Este artículo desea ser un ejercicio prospectivo en el que, a propósito de la errada profecía de Hilbert en relación con su 7º problema, se imaginará que la conjetura de Fermat ha sido demostrada y se plantearán algunos interrogantes en torno a números enteros asociados de manera natural a números trascendentes como fácil consecuencia del (entonces) teorema de Fermat y de la solución que hemos reseñado del mencionado 7º problema del gran matemático alemán. Nuestra «hipótesis» sobre Fermat, que antes de junio del 93 hubiera sido vista como un simple divertimento, parecería ser ahora, a partir de octubre del 94, definitivamente cierta. En el interín, mucho escepticismo surgió en el mundo de los especialistas después de la festiva algarabía mundial con que se celebrara el trabajo de Andrew Wiles en 1993 sobre la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil. Son varias las formulaciones, equivalentes por supuesto, de esta cardinal conjetura («*The heart of modern number theory*», según I. Stewart) que son usadas por Wiles en sendas partes de su renombrado trabajo y damos aquí la más fácil de entender: **toda curva elíptica cuya ecuación es a coeficientes racionales, es susceptible de ser parametrizada por formas modulares.**[3]

En esta formulación, a despecho de su aparente simplicidad, subyace una muy profunda sutileza: se sabe, por teoría elemental de curvas elípticas, que estas se parametrizan con funciones de Weierstrass doblemente periódicas pero el hecho de que se puedan también parametrizar mediante formas modulares obedece esencialmente a la presencia de los racionales como coeficientes en la ecuación de la curva (en cambio para la primera parametrización los coeficientes pueden pertenecer a cualquier subcampo de C). Así la Geometría, propia de las curvas elípticas definidas sobre C, y el Análisis, que corresponde a las formas modulares, concurren bajo un comportamiento que es de naturaleza aritmética, lo cual ciertamente supone un acontecimiento inusual.

Este trabajo de Wiles, sumamente notable por razones ajenas a Fermat ya que demuestra la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil para una vasta clase de curvas elípticas (las llamadas semiestables a las cuales corresponde un nivel N que es un producto de factores primos distintos, es decir, libre de factores cuadrados), iba a implicar a Fermat de manera particular pero, como es sabido, Wiles cometió un error en este punto (un error algo fantasmagórico e imperceptible, digno de un matemático de su altura). Ahora, como resultado de un esfuerzo intelectual intenso, sostenido por más de un año, el error está según parece subsanado. Para ello Wiles debió renunciar a un camino prácticamente infranqueable, justificador de escepticismos, cual era el de calcular un eventual defecto entre las representaciones asociadas a una curva elíptica del grupo de Galois G (sobre Q) de la clausura algebraica (en C) de Q y las representaciones de G asociadas a una forma modular, estas de más difícil construcción que aquellas (dichas representaciones deben coincidir según una versión «galoisiana» de la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil). En cambio, Wiles estableció un teorema de estructura sobre las representaciones modulares que implica la igualdad requerida.

Todo esto se describe sin mayor dificultad en sus grandes líneas pero ahondar en sus detalles exigiría de una muy fuerte solvencia, propia de especialistas de alta calificación. Jamás en la historia de la Matemática se había visto tan numerosa pléyade de matemáticos insignes concurriendo con sus aportes imprescindibles a la obtención de un solo fin: Hilbert, Weil, Shafarevich, Grothendieck, Faltings, Serre, Mazur, Tate, Kolyvagin, Ribet, Langlands, Flach y un más bien largo etcétera en el que se impone resaltar a la invalorable escuela japonesa y a Taylor quien marcó el *sine qua non*, el camino final del trabajo de Wiles.

Así pues asumiremos aquí que el teorema de Fermat es cierto, lo cual será más que todo una vía cómoda de generalidad; se sabe que de existir un contraejemplo negador, este comprendería enteros muy grandes (mayores que 3 a la potencia un millón, un número muchísimo más enorme que el mítico 2^{64} del ajedrez) por lo cual toda consideración concreta o de orden práctico con enteros naturales, en relación con lo que vamos a exponer, sería teóricamente verdadera ya que dichos enteros no darían contraejemplos.

Vista así la cosa, tal como sucede en realidad con tríos de enteros que podamos escoger, nuestro tema se presta a sugerir un *por qué* de la gran dificultad del teorema de Fermat: su estrecha vinculación con números trascendentes, como vamos a constatar.

III

Antes de entrar propiamente a nuestro tema central, rememoraremos una propiedad que observamos hace mucho tiempo y que habiéndonos parecido en el pasado sólo una simpática curiosidad, no nos parece ahora a priori desprovista de un eventual valor intrínseco. En época de «unificación», cuando se perciben linderos comunes entre ramas aparentemente inconexas de las matemáticas, cuando a partir de la alianza entre la teoría de números y la geometría algebraica es del sentir de especialistas que la matemática contemporánea induce a pensar que estamos en presencia de una realidad fragmentada que espera cohesión y cuya integración teórica es promesa plausible de futuro, no nos parece totalmente improbable que los hechos sencillos, en relación con la conjetura de Fermat y el número trascendente π que vamos a señalar, pudieran explicarse algun día con argumentos profundos de la Aritmética, una vez develado el fino fondo de las cosas, a la luz de un contexto general aún por advenir. Explicitemos los hechos.

La igualdad $a^n + b^n = c^n$, que para n, un entero natural arbitrario, es verificada una infinidad no numerable de veces por reales positivos a, b, c, implica fácilmente que con los segmentos de longitud a, b, c se puede formar un triángulo. Para n = 1, el ángulo γ opuesto al lado mayor c es constantemente igual a π ($= \pi/1$) y para n = 2 el correspondiente ángulo γ es constantemente igual a $\pi/2$. En ambos casos: de constancia del ángulo mayor de los triángulos, hay una infinidad de estos cuyos lados son simultaneamente enteros. Para un n fijo, $n \geq 3$, se verifica sin dificultad que en los triángulos correspondientes el ángulo γ deja de ser constante y que debe satisfacer la desigualdad $\pi/3 < \gamma < \pi/2$ En tal caso la conjetura de Fermat sostiene que ninguno de estos triángulos tiene sus tres lados enteros (y verificando la igualdad del comienzo para el n previamente fijado).

¿La no constancia del ángulo γ está acaso en relación con la no existencia de lados simultáneamente enteros?

¿Son estos hechos «independientes» o derivan de un hecho jerárquicamente superior que los unifica y explica?

Para $n \geq 3$ y fijado, sea inf γ = In y sup γ = Sn;

¿acaso se tiene In = $\pi/3$ o Sn= $\pi/2$?

De no ser así:

¿Son $n \to I_n$ o $n \to S_n$ funciones monotonas? ¿Son «explicitables» en función de n estas funciónes? ¿Interviene π en tal caso?

El número real único ν tal que $a^\nu + b^\nu = c^\nu$

Para valores adecuados de los reales positivos a, b, c, se establece fácilmente que la función $f(x) = a^x + b^x - c^x$ se anula en un punto positivo único ν; que es positiva y no inyectiva sobre $]-\infty, \nu[$ y que es negativa e inyectiva sobre $]v, +\infty[$

Cada imagen positiva tiene exactamente dos preimágenes a excepción del máximo único; el cero, en tanto que caso límite, tiene igualmente dos preimágenes que son ν y $-\infty$. Una condición necesaria y suficiente para que se tenga $\nu > n$ es que f(1), f(2), ... , f(n) sean positivos (en realidad basta que f(n) sea posltivo).

Supondremos en adelante que a, b, c son enteros naturales, primos entre sí dos a dos y que f(1) y f(2) son positivos, es decir, $\nu > 2$. El teorema de Fermat asegura entonces que ν no es entero natural. La teoría elemental de números algebraicos asegura además que ν debe ser irracional ya que si ν fuera racional, los números a^ν, b^ν y c^ν deberían ser linealmente independientes sobre Q (el caso en que $\nu = p/q$ y a, b y c son potencias q-ésimas perfectas implicaría una negación del teorema de Fermat para $p > 2$ porque si $p = 1$ o 2, entonces $\nu \geq 2$. El caso en que uno o dos de los enteros a, b, c lo sean se descarta por independencia lineal sobre Q). Así ν es un número irracional único que debe ser en consecuencia o algebraico o trascendente.

<u>ν es algebraico</u>: entonces por el notable teorema que responde al 7o. problema de Hilbert, la igualdad $a^\nu + b^\nu - c^\nu = 0$ equivale claramente a la existencia de tres números trascendentes linealmente dependientes sobre Q y asociados respectivamente a los enteros a, b, c por la mediación de un irracional único ν.

<u>ν es trascendente</u>: en tal caso los tres sumandos en $a^\nu + b^\nu - c^\nu = 0$ podrían ser enteros o racionales o algebraicos o trascendentes.

En los dos posibles casos vemos que, tal como lo anunciamos en II, aparecen de manera natural números trascendentes. Empero, no es claro que ambas situaciones puedan efectivamente producirse en la realidad.

La intuición geométrica nos hace comunmente ver como algo raro el hecho de que una curva plana no acotada carezca totalmente de puntos racionales tal como sucede con $y^2 = x^3 - 5$. Pero a decir verdad es más bien lo contrario lo que debería asombrarnos, es decir, que la curva tenga uno o más de dichos puntos; y asombrarnos mucho más si la curva posee una infinidad densa (en la curva) de puntos racionales tal como acontece con $y^2 = x^3 - 2$. Volviendo a nuestro problema, recuérdese que los números algebraicos pueden formar una sucesión numerable en C mientras que los trascendentes no. Es decir, sabiendo como sabemos que ν es irracional, es más «probable» que ν sea trascendente en lugar de ser algebraico. Agreguemos, informalmente hablando, que el caso en que ν es algebraico produce, como acabamos de ver, tres números trascendentes sometidos a una muy «forzada» concatenación, que parecería tanto más improbable cuanto más «desligados» son los enteros a, b y c, entiéndase coprimos en Z. Dejando por un instante de lado esta ultima condición de coprimalidad así como la restricción $\nu > 2$, notemos que si $a = b$ entonces $2a^\nu = c^\nu$ de donde, por el teorema citado, ν no puede ser algebraico. Así tenemos explicitado un caso en que ν es trascendente.

¿Puede ser ν algebraico o es siempre trascendente?

¿Si ν es trascendente, se producen las cuatro posibilidades mencionadas con los números a^ν , b^ν y c^ν ? ¿son estos números enteros o racionales solamente?

Sean los conjuntos

$A = \{(a, b, c) \quad N^3 / a < b < c$ y coprimos; $f(1)$ y $f(2)$ positivos$\}$

$I = \{$irracionales reales mayores que 2$\}$

No se olvide que estamos suponiendo que la conjetura de Fermat es cierta por lo cual la función

$$F: A \rightarrow I$$
$$(a,b,c) \rightarrow \nu$$

está bien definida sobre A. Hemos visto que F es no acotada y es claro, por otro lado, que F no puede ser sobreyectiva porque I es no numerable. Sabemos también que F(A) admite una partición B C donde B o es vacío o todos sus elementos son irracionales algebraicos y donde C o es vacío o todos sus elementos son números trascendentes.

¿Cómo caracterizar F(A)?

¿Es $F^{-1}(\{v\})$ finito para todo $\nu \in$ F(A)?

¿Existe una constante M tal que $F^{-1}(\{v\})$ es finito para todo ν en F(A) que sea mayor que M?

Podemos ver en este ejercicio prospectivo que si la prueba de Wiles, de la que se hiciera tan sonora noticia hace poco, fuese correcta, aún el teorema de Fermat plantearía problemas consecuenciales que tienen que ver con números trascendentes y de cuya mayor o menor dificultad no podemos, en lo personal, sino decir que nos parecen bastante difíciles.

Dos cosas para terminar con nuestro breve *escenario* :

a) Las interrogantes dadas aquí obedecen a una doble vertiente: por un lado esta la inquietud matemática, el conocimiento *per se*, bajo cuya égida estarían aquellos totalmente justificados; por otro lado, no se puede asegurar, sin más, que una respuesta satisfactoria a los mismos no pudiera eventualmente coadyuvar a establecer la veracidad del hecho p*ortador de futuro* que hemos supuesto ser verdadero sin que sepamos por ahora que haya de serlo necesariamente.

b) En vista de que diversos escenarios elaborados por los prospectivistas, se han equivocado en sus proyecciones (¿hay alguno que no? ¿por qué impedirnos de predecir aquí que el conjunto F(A) está constituido sólo por números trascendentes y llamarlo entonces, en provisoria consecuencia cultural, *El conjunto Trascendente de Fermat?* cuestión de estética, y a quien no le parezca, sentimos contrariarlo pero lo que es a nosotros nos parecería ... ¡Bellísimo!

A. BAKER, *Trascendental Number Theory*, Cambrldge Unlver~lty Press, London, 1979.

A. BESICOVITCH, *On the llnear independence of fractional powers of lntegers*, J. London Math. Soc. 15 (1940) p. 3-6.

C. GOLDSTEIN, *Le Théorème de Fermat,* La RECHERCHE, No. 263, Mars 1994. p. 268-275.

A. JACKSON, *Update on proof of Fermat's Last Theorem* NOTICES AMS, March 1994. volume 41. Number 3.

N. KOBLITZ, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, Springer-Verlag G.T.M. 97 (1984).
J.P. SERRE, Cours d' Arithmetique, Presses Universitaires de France, 1970

R. TAYLOR and A. WILES, *Ring Theoretic Properties of Certaln Hecke Algebras* (preprint, 7/10/94).

A.J. VAN DER POORTEN, *A proof that Euler missed—Apery's proof of the lrratlonallty of* $\xi(3)$, Mat. Intelligencer, 1,(1978-1979) p. 195-203.

A. WILES, *Modular Elliptic Curves And Fermat's Last Theorem* (preprint, 7/10/94).

NOTAS

[1] Nótese que este elegante y conciso resultado comprende la transcendencia de e^{π} debido a la igualdad $e^{\pi}=(-i)^{-i}$ que es consecuencia inmediata de la conocida igualdad $e^{\pi} + 1 = 0$. Se ha dicho en reiteradas ocasiones que esta última igualdad es la más maravillosa de toda la matemática: aquí se encuentran los cinco números más esenciales de la matemática en una sencilla y armoniosa relación.

[2] Así como entre dos números reales distintos hay siempre una infinidad de números racionales, así también entre dos números reales distintos siempre existen racionales con numeradores y/o denominadores inmensamente grandes

.

[3] Se entiende por esto que la función es holomorfa y nula en el infinito, de peso 2 y de un cierto nivel N bien determinado para cada curva. Estas formas generan un espacio vectorial (complejo) de dimensión finita y son entonces vectores propios para ciertos operadores lineales conmutativos, los cuales a su vez generan una cierta Álgebra de Hecke, estructura ésta de importancia decisiva en el trabajo rectificatorio de Wiles y usada también en el primer trabajo de 1993.