SOLUCION DE PROBLEMAS EXISTENCIALES

Sergio Fajardo V.

(Artículo basado en la conferencia dictada en las Octavas Jornadas de Matemática, realizadas en el Jardín Botánico de la UCV en Abril de 1995)

I. INTRODUCCIÓN

En este artículo presento las ideas que expuse durante las VIII Jornadas de Matemáticas de la Asociación Matemática Venezolana en mi presentación «Solución de Problemas Existenciales». He decidido mantener el tono informal que utilicé durante la charla, convencido de que en muchas ocasiones excelentes ideas matemáticas quedan sepultadas bajo un alud de formalidad y rigor que impide descubrir su belleza e importancia.

Estas ideas son el resultado de un trabajo conjunto de investigación con el profesor H. Jerome Keisler y los resultados originales con demostraciones detalladas van a aparecer en la serie de publicaciones [FK 1,2,3,4]. Por lo tanto, todos los lectores que después de leer estas líneas se interesen por las ideas que presento, están invitados a consultar estas referencias para profundizar en el tema.

Antes de iniciar la exposición formal es conveniente explicar el origen de este trabajo. Con la aparición de los métodos del análisis no-estándar en la práctica matemática, se logró, por fin, poner a disposición de los matemáticos las nociones de magnitudes infinitesimales e infinitas. En diferentes áreas el uso de estos conceptos y técnicas ha resultado bastante útil, en particular en la Teoría de Probabilidad y, más concretamente, en el análisis estocástico. Ver por ejemplo [AFHL] y [F].

Utilizando el análisis no-estándar se construyen unos espacios de probabilidad llamados «Hiperfinitos». Estos son espacios inmensamente «ricos» en el siguiente sentido: en ellos se pueden resolver de manera «fuerte» ecuaciones diferenciales estocásticas para las cuales en los espacios clásicos sólo se conseguían soluciones «débiles» (ver [AFHL] o [K] para una explicación de los términos utilizados y para la justificación rigurosa de esta afirmación). La pregunta natural es: ¿qué tienen estos espacios de especial? La respuesta es: ¡fueron construidos utilizando análisis no-estándar!

El problema con esta respuesta es que ¡pocos matemáticos están familiarizados con el análisis no-estándar! Nos quedan entonces dos alternativas: buscar que el número de personas que saben acerca del análisis no-estándar aumente considerablemente, o tratar de encontrar un camino estándar para explicar el análisis no-estándar. Creemos que las dos son válidas. La primera sólo es posible en una perspectiva de largo plazo y el tiempo nos dirá si se tiene éxito en ese propósito. La segunda es la que desarrollamos en nuestro trabajo. Para este efecto hemos introducido la teoría de Espacios Neométricos y esperamos que de esta forma se abran nuevas perspectivas para el análisis no-estándar y para las matemáticas en general. Ustedes tienen la palabra.

II. PROBLEMAS EXISTENCIALES

Una buena parte de la actividad matemática está dedicada a probar que ciertos objetos existen, es decir, a resolver problemas existenciales. Las razones para embarcarse en tal tarea son múltiples, por ejemplo: un físico puede necesitar un modelo para darle un tratamiento riguroso a una teoría que pretende capturar una porción de la realidad; o surge una pregunta puramente matemática con respecto a la existencia de un ente matemático abstracto. De cualquier forma, necesitamos mostrar que algunos objetos existen.

El tema de la existencia de entes matemáticos ha sido objeto de múltiples discusiones a través de toda la historia de la humanidad. En el fondo, es la esencia de la actividad matemática. Acá no me ocupo de la historia del tema; historia que dicho sea de paso nunca tendrá fin, pues estamos ya en el comienzo de nuevos capítulos de la discusión: con la aparición de los computadores, las demostraciones matemáticas no serán las mismas. Incluso, hace pocos días se han vuelto a poner sobre el tapete las relaciones y diferencias entre los métodos, creencias y actitudes de trabajo que existen entre la Física y las Matemáticas, y las posibles formas como una nueva interacción entre estas dos ciencias puede cambiar la forma de desarrollarlas en los años venideros (ver [JQ]). Pero por ahora no discutamos este tópico; de cualquier forma hay algo que sí sabemos: los problemas de existencia no son fáciles de resolver.

Veamos de manera informal como se argumenta en la mayoría de los casos para demostrar en Matemáticas, para ser más precisos, en el Análisis Matemático, que un objeto matemático existe. Queremos demostrar que en un conjunto C hay un elemento x que satisface una determinada propiedad matemática $\phi(x)$, en nuestra notación

$$(\exists x \quad C)\ \phi(x).$$

Si no podemos demostrar directamente que el x existe, lo cual es bastante usual, procedemos a buscar «soluciones aproximadas del problema», es decir, construimos objetos «cerca» de C, que pueden o no estar en C, y que «casi» tienen la propiedad ϕ.

Con más rigor lo que hacemos es construir una sucesión $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$, recuerden que $\boldsymbol{N}$ es el conjunto de números naturales $\{1,2,....\}$, donde el elemento x_n de la sucesión es la n-ésima aproximación. La idea es que a medida que avanzamos en la sucesión, las aproximaciones van mejorando, en el sentido que cada vez se «parecen» más al objeto que queremos construir. Si hacemos las cosas bien, esta sucesión tendrá un límite (es decir, converge) y ese límite será precisamente el objeto x buscado. De manera intuitiva podemos observar que si el conjunto original C es «grande» tenemos una mayor fuente de aproximaciones y más candidatos para ser límites de sucesiones de aproximaciones.

Esto es fácil decirlo y bastante difícil hacerlo. La experiencia matemática nos enseña varias lecciones: por lo general es más elemental e intuitivo definir las aproximaciones, en muchos casos por que éstas se reducen a construir de manera natural el objeto que queremos, en un contexto finito. El paso siguiente es el complicado, el paso de lo discreto a lo continuo: el problema de la convergencia de sucesiones de ninguna manera es trivial, y la demostración de pruebas de existencia a menudo consta de complicados argumentos para verificar que una sucesión de aproximaciones converge en algún sentido.

En los cursos de Cálculo Elemental ya tenemos algunas herramientas que nos facilitan el trabajo en este terreno. Por ejemplo, aprendemos que si tenemos una sucesión de números en un intervalo cerrado y acotado de números reales (por ejemplo, $[0,\pi]$), esta sucesión tiene una subsucesión que converge. También sabemos que las funciones continuas definidas sobre este tipo de intervalos siempre toman un valor máximo y un valor mínimo.

En topología, los intervalos cerrados y acotados de números reales son ejemplos de conjuntos compactos; algunas de las propiedades elementales que los compactos tienen son: la imagen de un compacto por medio de una función continua es un compacto; otra, un poco más sofisticada pero crucial y que veremos con más precisión más adelante, es aquella que nos dice que una familia de subconjuntos cerrados de un conjunto compacto, que tiene la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía.

En resumen: sabemos que si trabajamos con conjuntos compactos, todo lo que tiene que ver con problemas de existencia se simplifica pues son conjuntos que tienen propiedades, como las antes mencionadas, que hacen más fácil demostrar que sucesiones construidas en ellos, o «cerca» de ellos, tienen límites. Por desgracia, muchos de los conjuntos en donde queremos demostrar la existencia de un objeto no son compactos, y hasta ahí llegan las buenas intenciones. Nuestro trabajo enfrenta este problema y presenta una teoría que nos permite solucionar en parte estos problemas. Sigamos.

III. EL TEOREMA DE APROXIMACIÓN

Un ejemplo elemental, tomado de la teoría de ecuaciones diferenciales nos sirve para ilustrar algunas de nuestras ideas: el teorema de existencia de Cauchy-Peano. Sólo voy a presentar un caso particular y luego doy una idea de la forma como se demuestra. El lector que no esté familiarizado con algunos de los términos técnicos puede sentirse un poco incómodo, pero he agregado comentarios que espero le permitan obtener una idea, por lo menos intuitiva, de lo que se presenta.

Teorema de Existencia de Cauchy-Peano.- Sea $g : [0,1]\times\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ una función continua y acotada. Si $x_0\in\boldsymbol{R}$ entonces existe una función $\phi : [0,1]\times\boldsymbol{R} \to\boldsymbol{R}$ tal que $\phi(0) = x_0$ y $\phi'(t) = g(t,\phi(t))$.

Idea de la demostración: Para cada $n\in\boldsymbol{N}$, se divide el intervalo $[0,1]$ en n partes iguales $t_0 = 0, t_1= 1/n, \ldots ,t_n = 1$ y se define la función $f_n: [0,1] \to \boldsymbol{R}$ por medio de la fórmula inductiva

$$\phi_n(0) = x_0 \text{ y } (\phi_n (t_{i+1}) - \phi_n (t_i))/ (t_{i+1} - t_i) = f (t_i,\phi_n(t_i))$$

luego se extiende la función ϕ_n a todo el intervalo $[0,1]$ por interpolación lineal.

Estas son las llamadas líneas poligonales de Euler. Observen que estas funciones ϕ_n son las aproximaciones naturales e intuitivas para describir una solución a la ecuación que queremos resolver; el problema consiste entonces en demostrar que la sucesión así definida converge a una solución del problema. Para lograr este objetivo se recurre a un conocido teorema del Análisis, el Teorema de Arzelà (ver por ejemplo [BM] o [P]) que garantiza después de verificar ciertas condiciones de las funciones ϕ_n, que ésta converge a una solución final del problema.

La anterior demostración se puede decir que es «típica» en la teoría de ecuaciones diferenciales, ya que la mayoría de ecuaciones que se encuentran en la práctica no se pueden resolver explícitamente y se hace necesario recurrir a métodos de aproximación, muchas veces inspirados en el que acabo de describir.

Si se escribe en forma simbólica el enunciado de la afirmación que queremos probar en el teorema, obtenemos una expresión del tipo: $(\exists x \in C)\,(f(x) \in D)$. El procedimiento de aproximación que se aplica nos muestra que la siguiente propiedad es cierta:

Para todo $n \in \mathbf{N}$, $(\exists x \in C^{l/n})(f(x) \in D^{l/n})$

La notación anterior tiene el significado tradicional: dado un conjunto A, el conjunto $A^{l/n}$ esta compuesto por todos aquellos elementos que están a una distancia menor o igual a l/n del conjunto A, es decir, $A^{l/n} = \{x : \rho(x, A) \leq l/n\}$, en donde ρ es la distancia (la métrica) del espacio donde está definido C. En este caso particular el lector interesado puede, como ejercicio, descubrir cuáles son los espacios en los que estamos trabajando y encontrar la función f que se utiliza. Para lo que pretendo decir acá es suficiente con visualizar el esquema y no es necesario tener los detalles precisos.

Ahora, juntando el enunciado y la demostración del teorema podemos sintetizar todo lo hecho en los siguientes términos:

$(\forall n \in \mathbf{N})\ (\exists x \in C^{l/n})(f(x) \in D^{l/n})$ + Teorema de Arzelà $(\exists x \in C)$ $(f(x) \in D)$.

En palabras:
Argumento de Aproximación +
Argumento de Convergencia (Compacidad)
Teorema de Existencia.

Ya puedo dar una primera (imprecisa) respuesta al interrogante que me inspiró a escoger este tema: ¿Qué hicimos nosotros? Probamos, entre otras cosas, un teorema que llamamos de aproximación, que intuitivamente dice: «es suficiente aproximar» o «si usted sabe cómo aproximar, se puede olvidar del argumento de convergencia». De acuerdo a los esquemas anteriores se puede enunciar el teorema informal (si es que existen tales teoremas).

Teorema Informal (Fajardo-Keisler)
(a) $(\forall n\in \mathbf{N})\ (\exists x\in C^{l/n})(f(x)\in D^{l/n}) \qquad (\exists x\in C)(f(x)\in D)$ (*)
(b) En palabras: Argumento de Aproximación   Teorema de Existencia.

Otro buen ejercicio para el lector interesado es verificar que la afirmación señalada con (*) es cierta en el siguiente caso: C es un subconjunto compacto de un espacio métrico completo y separable M, D es un subconjunto cerrado de otro (no necesariamente distinto) espacio métrico completo y separable N y f es una función continua entre M y N.

De este punto en adelante me veo forzado a emplear, sin pudor, una terminología matemática mas avanzada, a la vez que asumo un conocimiento básico de los conceptos empleados. Para no dejar el drama empezado, en la siguiente sección doy las definiciones de los nuevos conceptos que hemos introducido y enuncio formalmente el teorema que captura la ideas presentadas.

IV. NEOCOMPACIDAD

El principal concepto que introdujimos en [FK1] es el de conjunto neocompacto. Una familia de conjuntos neocompactos es una generalización de una familia de conjuntos compactos, que retiene muchas de sus principales propiedades. La definición formal esta dada a continuación. Las letras $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{O}$ se utilizan para denotar espacios métricos completos.

Definición 1. Sea $\mathcal{M}$ una colección de espacios métricos completos, cerrada bajo productos cartesianos finitos. Para cada $\mathbf{M}$ **en** $\mathcal{M}$ sea $\mathbf{B(M)}$ una colección de subconjuntos de $\mathbf{M}$, la cual llamamos *conjuntos básicos*. Una *familia neocompacta* sobre $(\mathbf{M},\mathbf{B})$ es una terna $(\mathcal{M},\mathbf{B},\mathbf{C})$ donde para cada $\mathbf{M}\in\mathcal{M}$, $\mathbf{C(M)}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbf{M}$ con las siguientes propiedades, donde $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{O}$ varían en $\mathcal{M}$:

(a) $\mathbf{B(M)} \subseteq \mathbf{C(M)}$.

(b) $\mathbf{C(M)}$ es cerrada bajo uniones finitas; es decir, si A, $B\in\mathbf{C(M)}$ entonces $A \quad B\in\mathbf{C(M)}$.

(c) $\mathbf{C(M)}$ es cerrada bajo uniones finitas y contables.

(d) Si $C\in\mathbf{C(M)}$ y $D\in\mathbf{C(N)}$ entonces $C\times D \quad \mathbf{C(M\times N)}$;

(e) Si $C\in\mathbf{C}(\mathbf{M}\times\mathrm{N}\times\mathrm{O})$ entonces el conjunto

$$\{ (x,z): (\exists y\in D)\ (x,y,z)\in C\}$$

pertenece a $\mathbf{C(M \times O)}$ La condición análoga se cumple para cada factor en un producto cartesiano finito.

(f) Si $\mathcal{C}\in\mathcal{C}(\mathcal{M}\times\mathcal{N}\times\mathcal{O})$, y D es no vacío en $\mathcal{B}(\mathcal{M})$, entonces

$\{(x,z)\colon (\forall y\in D)\ (x,y,z)\in C\}$

pertenece a $\mathcal{C}(\mathcal{M}\times\mathcal{O})$. La condición análoga se cumple para cada factor en un producto cartesiano finito.

Los conjuntos en los $\mathcal{C}(M)$ son llamados *conjuntos neocompactos.*

El ejemplo clásico de una familia neocompacta es la familia usual de conjuntos compactos en un espacio métrico, tomando como **M** la clase de todos los espacios métricos, para la cual es fácil verificar que se cumplen las condiciones (a) - (f). Así, si $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ es la familia de los subconjuntos compactos de $\mathcal{M}$, entonces tenemos que los neocompactos que se obtienen son los compactos usuales. Por razones obvias, decimos que esta es la familia trivial.

Una de las principales razones por las que los conjuntos compactos son útiles en la demostración de teoremas de existencia es que tienen la siguiente propiedad:

Si C es un conjunto de conjuntos compactos tal que todo subconjunto finito de C tiene intersección no vacía, entonces C tiene intersección no vacía.

De hecho, en muchos casos se necesita sólo la siguiente propiedad más débil.

Definición 2. Una familia neocompacta $(M,\mathcal{B},\mathcal{C})$ tiene la *propiedad de compacidad contable* si para cada $\mathcal{M}\in M$, toda cadena decreciente

$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ de conjuntos no vacíos en $\mathbf{C(M)}$ tiene intersección no vacía.

Después de leer estas definiciones el lector se puede preguntar de donde aparecen estos conceptos. Nosotros tenemos el secreto: del análisis no-estándar. Pero no es nuestra intención guardarlo para siempre, de hecho ya está revelado, basta con consultar los artículos [FK2,3].

Antes de continuar necesitamos escoger dentro de las familias neocompactas unas que tienen el comportamiento adecuado, las familias neométricas.

Definición 3. Una familia neocompacta $(\mathcal{M},\mathbf{B},\mathbf{C})$ se llama NEOMETRICA si las funciones de distancia (las métricas) en cada espacio $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ son neocontinuas. Esto significa que el espacio de los reales $\mathbb{R}$ está contenido en algún miembro $\mathbf{R}$ de $\mathcal{M}$, y para cada $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ la distancia ρ de $\mathbf{M}$ es neocontinua como función de $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$ en $\mathbf{R}$.

Nuestro trabajo demuestra que hay importantes casos de conjuntos neocompactos que tienen la propiedad de compacidad contable, y en esos casos se pueden usar para probar teoremas de existencia en la misma forma que en la práctica usual se usan los conjuntos compactos. Los conjuntos neocompactos son útiles pues a pesar de las muchas propiedades que tienen en común con los compactos hay conjuntos neocompactos que no son compactos. En [FKl] presentamos un buen número de ejemplos que ilustran esta afirmación en el contexto de la Probabilidad. El siguiente teorema es crucial y su prueba aparece en [FK2].

Teorema 3. Hay familias neométricas no triviales $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ con la propiedad de compacidad contable.

Ya estamos listos para introducir la última noción que necesitamos para enunciar el teorema de aproximación: las funciones neocontinuas. Recordemos que el producto cartesiano $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$ de dos espacios métricos es un espacio métrico con la métrica del producto. La definición está inspirada en una propiedad conocida de las funciones continuas en espacios métricos.

Definición 4. Una función $f : \boldsymbol{M} \rightarrow \boldsymbol{N}$ es *Neocontinua* de $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{N}$ si para todo neocompacto C $\boldsymbol{M}$, su grafo $\{(x,f(x)):x \quad C\}$ es neocompacto en $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$.

La siguiente lista de propiedades nos da una idea acerca de las propiedades de las funciones neocontinuas.

- La composición de funciones neocontinuas es neocontinua.
- Si f es neocontinua de $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{N}$, entonces f es continua.
- La imagen de un conjunto neocompacto por medio de una función neocontinua es neocompacto.
- En la familia trivial los conceptos con el prefijo neo, coinciden con los conceptos sin él. Es decir un conjunto es neocerrado si y solamente si es cerrado, etc.

El siguiente teorema ahora tiene sentido. Suponemos que trabajamos sobre una familia noecompacta que satisface la propiedad de compacidad contable, cuya existencia está garantizada por el teorema anterior.

Teorema de Aproximación. Sean f : $\boldsymbol{M} \rightarrow \boldsymbol{N}$ una función neocontinua, B un conjunto neocompacto en $\boldsymbol{M}$ y D neocompacto en $\boldsymbol{N}$. Supongamos que para cada $\varepsilon>0$,

$$(\ x \ \ B^{\varepsilon})\ f(x) \ \ D^{\varepsilon}.$$

Entonces

$$(\ x \ \ B)\ f(x) \ \ D.$$

Este resultado junto con una buena provisión de funciones neocontinuas conduce a pruebas muy cortas de una gran gama de teoremas de existencia. El método también es útil para ayudar a descubrir nuevos resultados y para desarrollar pruebas que capturan ideas de aproximación de manera natural. El paso siguiente consiste en consultar las referencias que aparecen a continuación y ver en detalle cómo las afirmaciones y promesas hechas a través de estas líneas tienen una verdadera existencia matemática.

REFERENCIAS

[AFHL] S. Albeverio, J. E. Fenstad, R. Hoegh-Krohn, and T. Lindstrøm. Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics. Academic Press, New York (1986).

[BM] W. Brock and A. Malliaris. Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics. Advanced Textbooks in Economics. North-Holland. 1989.

[CK] N. Cutland and H.J. Keisler. Applications of Neocompact Sets to Navier-Stokes Equations. To appear.

[F] S. Fajardo. Introducción al Análisis No-estándar y sus aplicaciones en la Probabilidad. Cuadernos de Probabilidad y Estadística Matemática. Regional Latinoamericana de la Sociedad Bernoulli. Fondo Editorial Acta Científica Venezolana. #3. Caracas 1990.

[FKl] S. Fajardo y H.J. Keisler. Existence Theorems in Probability Theory. Por aparecer en Advances in Mathematics.

[FK2] S. Fajardo y H.J.Keisler. Neometric Spaces. Por aparecer en Advances in Mathematics.

[FK3] S. Fajardo y H.J.Keisler. Long Sequences and Neocompact sets. Por aparecer en «Developments in Nonstandard Analysis». Pitman Research Notes.

[FK4] S. Fajardo y H.J.Keisler. Neometric Forcing. Por aparecer.

[JQ] A. Jaffe and F. Quinn. «Theoretical Mathematics»: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. Bulletin of the American Mathematical Society. Vol 29, #1, July 1993.

[K] H.J. Keisler. An Infinitesimal Approach to Stochastic Analysis. Memoirs. American Math. Soc. 297 (1984).

[P] I.G. Petrovski. Ordinary Differential Equations. Dover publications. 1973.