

## ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?\*

Michèle Artigue

### 1 Introducción

La investigación educativa se ha estado ocupando del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza en el nivel universitario por más de 20 años. Ha intentado mejorar nuestra comprensión de las dificultades que los alumnos encuentran y las disfunciones del sistema educativo; también ha intentado encontrar vías para superar estos problemas. ¿Qué pueden estas investigaciones ofrecer a un estudio internacional? Ésta es la cuestión que abordaré en este artículo, pero antes me gustaría destacar que no se trata de una cuestión fácil de responder por varias razones, entre las que se encuentran, al menos, las siguientes:

1. La investigación educativa está lejos de ser un campo unificado. Esta característica se mostró claramente en el reciente estudio del ICMI titulado “*What is research in mathematics education and what are its results?*” (ver Sierpinska y Kilpatrick, 1998.) La diversidad de paradigmas existentes contribuye ciertamente a la riqueza del campo pero, al mismo tiempo, dificulta el uso y la síntesis de resultados de investigación.
2. Los procesos de enseñanza y aprendizaje dependen parcialmente de los entornos culturales y sociales en los que se desarrollan. Hasta cierto punto, los resultados que se obtienen dependen, de esta forma, del espacio y del tiempo; su campo de validez es necesariamente limitado. Sin embargo, estos límites no son generalmente fáciles de identificar.
3. Finalmente, el conocimiento basado en la investigación no se transforma fácilmente en estrategias educativas efectivas.

---

\*Este artículo apareció originalmente en inglés en D. Holton et al (2003), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp. 207-220. Esta traducción ha sido realizada por Alejandro S. González-Martín con la autorización de la autora.

Más adelante regresaré a este último punto. Sin embargo, estoy convencida de que la investigación existente puede ayudarnos considerablemente en la actualidad si hacemos sus resultados accesibles a un gran público y si llevamos a cabo los esfuerzos necesarios para relacionar mejor la investigación y la práctica. Espero que este artículo contribuya a que esta convicción no sea sólo personal.

Antes de continuar, me gustaría destacar que la diversidad mencionada más arriba no significa que no se pueda observar tendencias generales. En un nivel teórico, éstas son las indicadas, por ejemplo, por la influencia dominante de los enfoques constructivistas inspirados por la epistemología genética de Piaget o por el movimiento reciente hacia las aproximaciones socio-constructivistas, interaccionistas o antropológicas, que intentan tener más en cuenta las dimensiones sociales y culturales de los procesos de enseñanza y aprendizaje (ver Sierpinska y Lerman, 1996). Dentro de estas perspectivas generales, los investigadores han desarrollado múltiples marcos teóricos locales y metodologías que caracterizan de formas distintas el modo en que las preguntas de investigación se eligen y expresan y el modo en que son abordadas (afectando, por tanto, el tipo de resultados que se puede obtener y el modo en que son descritos). Desde un punto de vista cultural también se observan estas tendencias generales; por ejemplo, en las fuertes regularidades en el comportamiento de los estudiantes y sus dificultades, así como los problemas de enseñanza encontrados por las instituciones educativas. Éstos, hasta ahora, trascienden aparentemente la diversidad de entornos culturales.

En lo que sigue, después de caracterizar los comienzos de los proyectos de investigación, intentaré reducir algunas de las dificultades mencionadas anteriormente presentando resultados de investigación en dos dimensiones principales de los procesos de aprendizaje: cambios cualitativos, reconstrucciones y rupturas por un lado y flexibilidad cognitiva por el otro. Estas dimensiones pueden ser consideradas “transversales”, en cierto grado, con respecto a las diversidades culturales y teóricas, así como a los dominios matemáticos. Sin duda, se trata de una elección personal, inducida por mi propia experiencia como profesora universitaria, como matemática y como investigadora educativa; ésta caracteriza la visión que tengo de los resultados de investigación, visión que no pretende ser objetiva ni exhaustiva.

## **2 Primeros resultados de investigación algunos informes negativos**

Los primeros resultados provenientes de la investigación realizada en niveles universitarios pueden ser considerados negativos. Las investigaciones comienzan sobre el conocimiento de los alumnos en áreas específicas de las Matemáticas, con énfasis particular en el Análisis elemental (o Cálculo, en la cultura an-

glosajona<sup>1</sup>), un área percibida como fuente principal del fracaso en el nivel universitario. Los resultados obtenidos proporcionan evidencias estadísticas de las limitaciones tanto de las prácticas educativas tradicionales como de las prácticas educativas que favorecen los enfoques formales y teóricos que reflejan el estilo Bourbaki. La estructura y contenidos del libro *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991) dan una clara evidencia de estos hechos, advirtiendo que:

- A comienzos de los años ochenta, Orton (1980), en su Tesis Doctoral, mostró el razonable dominio que los alumnos ingleses tenían de lo que podemos catalogar como “Cálculo meramente algebraico”, a saber: cálculo de derivadas y primitivas (anti-derivadas), pero la dificultad significativa que tenían para conceptualizar los procesos límite subyacentes a las nociones de derivada e integral;
- Aproximadamente al mismo tiempo, Tall y Vinner (1981) destacaban la discrepancia entre las definiciones formales que los estudiantes eran capaces de citar y los criterios que utilizaban para comprobar propiedades como la de ser función, la continuidad y la derivabilidad. Esta discrepancia llevó a la introducción de las nociones de *concept definition* y *concept image*<sup>2</sup> para analizar las concepciones de los alumnos;
- Muy pronto, varios autores documentaron las dificultades de los estudiantes con el razonamiento lógico y las demostraciones, con las representaciones gráficas y, de forma especial, con la conexión del trabajo analítico y gráfico de forma flexible.

Schoenfeld (1985) también documentó el hecho de que, cara a tareas no rutinarias, los alumnos – incluso los alumnos aparentemente brillantes – eran incapaces de utilizar de forma eficiente sus recursos matemáticos.

Las investigaciones también mostraron bastante pronto que las reacciones espontáneas de los sistemas educativos a las dificultades recién citadas probablemente inducirían círculos viciosos como el que exponemos a continuación. A fin de garantizar una proporción aceptable de éxito en los alumnos, cuestión cada vez más importante por razones políticas, los profesores tenderían a aumentar la diferencia entre lo que se enseña y lo que se evalúa. Como los estudiantes consideran que el contenido de las evaluaciones es lo que ellos tienen que aprender, esta situación tendría efectos dramáticos en sus creencias sobre lo que son la Matemática y la actividad matemática. Esta situación, por otro lado, tampoco les ayudaría a enfrentarse a la complejidad del pensamiento matemático avanzado.

---

<sup>1</sup> *Analyse* en francés. En adelante, se utilizará el término Cálculo. N. T.

<sup>2</sup> No se han traducido estos términos debido a su frecuente aparición en inglés en la literatura relacionada. N. T.

Por suerte, los resultados de las investigaciones están lejos de limitarse a unos informes tan negativos. Gracias a un uso creciente de las metodologías cualitativas, que permiten mejores exploraciones del pensamiento de los alumnos y del funcionamiento de las instituciones didácticas (Schoenfeld, 1994), la investigación ha desarrollado y probado modelos cognitivos locales y globales. También se han organizado en estructuras coherentes las varias dificultades que los alumnos encuentran en áreas específicas de las Matemáticas, o en la transición Enseñanza Secundaria-Universidad. Las investigaciones han llevado a diseños de enseñanza basados en sus resultados (o productos de ingeniería<sup>3</sup> que, implementados en entornos experimentales y progresivamente refinados, han demostrado ser efectivos. Sin querer ser exhaustiva, daré algunos ejemplos, clasificados según las dos dimensiones dadas anteriormente (para más detalles, el lector puede referirse a diferentes síntesis en: Artigue, 1996, Dorier, 2000, Schoenfeld, 1994, Tall, 1991 y 1996; a los números especiales dedicados al pensamiento matemático avanzado de las revistas *Educational Studies in Mathematics* editada en 1995 por Dreyfus, *Recherches en Didactique des Mathématiques* editada en 1998 por Rogalski, y a algunos de los diversos monográficos publicados por la *Mathematical Association of America* sobre la reforma del Cálculo o prácticas educativas innovadoras y a las investigaciones sobre temas universitarios específicos, en las *MAA Notes on Collegiate Mathematics Education*).

### **3 Cambios cualitativos, reconstrucciones y rupturas en el desarrollo matemático del conocimiento en el nivel universitario**

Un hallazgo general y trascendente de la investigación en educación matemática es el hecho de que el aprendizaje matemático es un proceso cognitivo que incluye necesariamente “discontinuidades”. Sin embargo, la atención que se presta a estas discontinuidades se expresa de distintas formas, dependiendo del investigador. Para reflejar esta diversidad y las diferentes perspectivas que ésta permite, describiré tres aproximaciones diferentes: la primera, en términos de la dualidad proceso-objeto; la segunda, en términos de obstáculos epistemológicos; la tercera, en términos de reconstrucciones de relaciones con objetos del conocimiento.

#### **3.1 Cambios cualitativos en la transición de proceso a objeto: la teoría APOS**

Como ya hemos dicho, la investigación en el nivel universitario es fuente de modelos teóricos. El caso de la teoría APOS, iniciada por Dubinsky (ver Tall,

---

<sup>3</sup>La autora se refiere a la ingeniería didáctica como diseño de instrucción basado en la investigación. N. T.

1991) y refinada progresivamente (ver Dubinsky y McDonald, 2003), es un ejemplo. Esta teoría, que es una adaptación de la teoría de Piaget sobre la abstracción reflexiva, persigue modelizar las construcciones mentales utilizadas en el aprendizaje matemático avanzado. Considera que “*comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones son luego interiorizadas para formar procesos que son después encapsulados para formar objetos. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas*” (Asiala et al, 1996). Por supuesto, todo esto no sucede a la misma vez y los objetos, una vez construidos, pueden ser utilizados en nuevos procesos, etcétera. Los investigadores que siguen esta teoría la utilizan para construir descomposiciones genéticas<sup>4</sup> de los conceptos que se enseñan en niveles universitarios (en Cálculo, Álgebra abstracta, etc.) y diseñan secuencias de enseñanza que reflejan las estructuras genéticas que han construido y probado.

Igual que sucede con cualquier modelo, el modelo APOS ofrece solamente una visión parcial del desarrollo cognitivo en Matemáticas, pero es innegable hoy día que presta atención a una discontinuidad cualitativa crucial en las relaciones que los alumnos desarrollan con respecto a los conceptos matemáticos. Esta discontinuidad es la transición desde una concepción de proceso a una de objeto, la complejidad de su adquisición y los efectos dramáticos de su subestimación por las prácticas habituales de enseñanza<sup>5</sup>. La investigación relativa a la teoría APOS da también evidencia experimental del papel positivo que pueden jugar las actividades de programación en lenguajes adecuados (como el lenguaje ISETL, cf. Tall, 1991) para ayudar a los alumnos a encapsular procesos en objetos.

### 3.2 Rupturas en el desarrollo del conocimiento matemático: Obstáculos epistemológicos

La teoría de los obstáculos epistemológicos, introducida originalmente por Bachelard (1938) e importada a la investigación educativa por Brousseau (1997), propone una aproximación complementaria a la evolución cognitiva, centrándose en sus rupturas necesarias. El principio fundamental de esta teoría es que el

---

<sup>4</sup>Una descomposición genética se define como un análisis teórico de un concepto matemático en términos de las construcciones mentales que un estudiante debería hacer para desarrollar su comprensión del concepto. En otras palabras, es una descripción detallada de las construcciones mentales necesarias para enfrentarse con éxito a un concepto matemático dado. N. T.

<sup>5</sup>Obsérvese que una aproximación similar ha sido desarrollada por Sfard, con un énfasis mayor en la dialéctica entre las dimensiones operacional y estructural de los conceptos matemáticos en la actividad matemática (Sfard, 1991).

conocimiento científico no se construye como un proceso continuo, sino que resulta a partir del rechazo de formas previas de conocimiento: los llamados *obstáculos epistemológicos*. Los investigadores que utilizan esta teoría formulan la hipótesis de que algunas dificultades en el aprendizaje, generalmente las más resistentes, provienen de formas de conocimiento que son coherentes y han sido efectivas por un tiempo en contextos sociales y/o educativos. También se formula la hipótesis de que los obstáculos epistemológicos tienen algún tipo de universalidad y, por tanto, se puede seguir su pista en el desarrollo histórico de los conceptos correspondientes. En el nivel universitario, esta aproximación ha sido utilizada fructíferamente en la investigación relativa al concepto de límite (cf. Artigue, 1998 y Tall, 1991, para visiones sintéticas). Investigadores como Sierpínska (1985), Cornu (1991) y Schneider (1991) nos ofrecen evidencia histórica y empírica de la existencia de obstáculos epistemológicos, principalmente los siguientes:

- el significado cotidiano de la palabra “límite”, que induce concepciones resistentes del límite como una barrera o el último término de un proceso, o que tiende a restringir la convergencia a la convergencia monótona;
- la sobre-generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, siguiendo el principio de continuidad enunciado por Leibniz;
- la fuerza de la geometría de las formas, que impide a los alumnos identificar claramente los objetos implicados en el proceso de límite y su topología subyacente. Esto hace que para los alumnos sea difícil apreciar la interacción sutil entre los marcos<sup>6</sup> numérico y geométrico en el proceso de límite.

Veamos un ejemplo (tomado de Artigue, 1998) de esta última resistencia, que se da incluso en alumnos brillantes. En un proyecto de investigación sobre los procesos diferenciales e integrales, se planteó a alumnos destacados la siguiente pregunta de tipo no estándar: “¿Cómo explicarías lo siguiente?: Utilizando la descomposición clásica de una esfera en pequeños cilindros para calcular su volumen y su superficie, se obtiene la respuesta conocida de  $\frac{4}{3}\pi R^3$  para el volumen, pero se obtiene  $\pi^2 R^2$  para la superficie, en lugar de  $4\pi R^2$  ”.

Se observó que, al enfrentarse a esta cuestión, la gran mayoría de los alumnos avanzados se quedaron atascados. Y, aunque fueran capaces de realizar cálculos correctos para la superficie (no todos eran capaces), seguían incapaces de resolver el conflicto.

Tal como dijeron los estudiantes finalmente, como el montón de cilindros tiende geoméricamente a la esfera, las magnitudes asociadas con los cilindros se

---

<sup>6</sup>Traducimos a lo largo de este artículo, en general, el inglés *setting* por el término *marco*, pues la autora alude a la noción de *cadre* que utiliza Regine Douady. N. T.

comportan de la misma forma, por lo que se tiene como límite la correspondiente magnitud de la esfera. Esta resistencia puede parecer extraña, pero parece más normal si consideramos el efecto producido en los matemáticos por el famoso contraejemplo de Schwarz que prueba que, para una superficie tan simple como un cilindro, el límite de las áreas de las triangulaciones cuando el tamaño de los triángulos tiende a cero pueden tomar cualquier valor superior o igual a la superficie del cilindro, hasta infinito, dependiendo de las elecciones tomadas en el proceso de triangulación, efecto bien descrito por Lebesgue (1956). Las implicaciones históricas y universales de la teoría que lleva a resultados como éste pueden discutirse, como ya lo han sido en la actualidad (ver, por ejemplo, Radford, 1997). Sin embargo, lo que no podemos negar es el hecho de que las formas de conocimiento arriba mencionadas constituyen dificultades resistentes para los estudiantes de hoy en día; además, este aprendizaje matemático implica necesariamente un rechazo parcial de las formas previas de conocimiento, lo que no es fácil para los estudiantes.

### **3.3 Reconstrucciones en la transición Secundaria-Universidad: El caso del Cálculo**

Los cambios cualitativos en las relaciones que los estudiantes desarrollan con respecto a los conceptos matemáticos pueden ser enfocados de una forma menos radical: en términos de reconstrucciones necesarias. En esta sección ilustramos algunos resultados de la investigación. Nos centraremos en las reconstrucciones que han mostrado jugar un papel crucial en la enseñanza del Cálculo en la transición de la Enseñanza Secundaria a la Universidad, al menos en la situación educativa que tiende a predominar, donde un enfoque intuitivo y práctico del Cálculo en el currículum de Secundaria precede al enfoque formal introducido en la Universidad. Algunas de estas reconstrucciones tratan con objetos matemáticos ya familiares a los alumnos antes de la enseñanza oficial del Cálculo.

Un ejemplo típico lo constituyen los números reales. Aparecen pronto en el currículum de Secundaria como objetos algebraicos con un orden denso, con una representación geométrica en la recta real y con aproximaciones decimales que pueden ser fácilmente obtenidas con calculadoras de bolsillo. Sin embargo, muchas investigaciones muestran que, incluso tras su ingreso en la Universidad, las concepciones de los alumnos permanecen borrosas, incoherentes y poco adaptadas a las necesidades del mundo del Cálculo. Por ejemplo, la ordenación de los números reales se reconoce como un orden denso. No obstante, según el contexto, los estudiantes pueden conciliar esta propiedad con la existencia de números justo antes o después de un número dado (0.999... es así visto a menudo como el predecesor de 1). Más del 40% de los alumnos de nuevo ingreso en las universidades francesas opinan que, si dos números  $A$  y  $B$  distan en menos de  $\frac{1}{N}$ , para todo positivo  $N$ , no son necesariamente iguales, sino

indefinidamente próximos. Las relaciones entre los números irracionales y sus aproximaciones decimales permanecen borrosas. No hay duda de que son necesarias algunas reconstrucciones para comprender los “modos de pensamiento en Cálculo”. La investigación muestra que éstas no son fácilmente inducidas con el tipo de análisis intuitivo y algebraico que es el foco principal de la instrucción del Cálculo en los centros de Enseñanza Secundaria y que las construcciones del cuerpo de los números reales en el nivel universitario tienen poco efecto si los alumnos no se enfrentan a la incoherencia de sus concepciones y los conflictos cognitivos consecuentes.

Una segunda categoría de reconstrucciones proviene del hecho de que sólo se puede introducir algunas facetas de un concepto matemático en el primer contacto con él. El concepto de integral ilustra bastante bien este caso. En muchos países el primer contacto con las integrales se da al final del nivel Secundario por medio de la noción de anti-derivada y una aproximación práctica al Teorema Fundamental del Cálculo que permite conectar las anti-derivadas con una noción intuitiva de área. La teoría de integración no se desarrolla hasta la Universidad; primero con la teoría de las integrales de Riemann y, después, en un nivel superior, con la teoría de Lebesgue. Todo esto requiere reconstrucciones sucesivas de las relaciones que los alumnos tienen con el concepto de integral. Muchas investigaciones se han centrado en este tema con una gran consistencia de los resultados obtenidos en todo el mundo, documentando las limitaciones de las estrategias de enseñanza habituales. Estos resultados muestran claramente que la reconstrucción no puede surgir a partir de una mera presentación de la teoría de las integrales de Riemann. A través de prácticas docentes estándar, los alumnos obtienen un razonable éxito en cuestiones estándar, pero nada más. Por ejemplo, si se plantea a los estudiantes cuestiones de modelización para que decidan por sí mismos si un problema requiere un proceso integral para su resolución, se quedan estancados por completo o basan sus respuestas en “pistas” lingüísticas, en caso de haberlas, que han aprendido a percibir en las versiones estándar de tales tareas. La mayoría de los alumnos piensa que la forma más segura de enfrentarse con éxito a este dominio no es intentar comprender, sino simplemente comportarse mecánicamente. Me gustaría añadir que no tenemos que ver esto como una especie de fatalidad cognitiva. Simplemente observamos las formas económicas de adaptación de nuestros alumnos a prácticas docentes inadecuadas.

La investigación, como se ha señalado anteriormente, no se limita sólo a informes negativos como éstos. Me gustaría presentar ahora una situación creada por Legrand (1997), en el contexto de un proyecto de investigación que implicaba a matemáticos y físicos con el objetivo de hacer que los alumnos de primer año de Universidad sintieran realmente la necesidad del concepto de integral. La situación se basa en el siguiente problema, aparentemente muy sencillo (las situaciones más efectivas encontradas por los investigadores son, muy a menudo,



las aparentemente más sencillas). Una barra lineal de masa  $M_1$  y un punto de masa  $M_2$  están colocados como se muestra. Se pide a los estudiantes que calculen la intensidad de la atracción entre ambas masas.

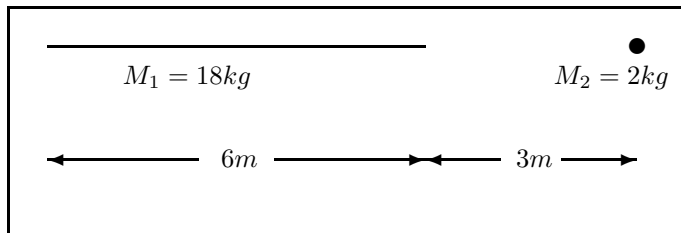


Figura 1. Atracción entre una barra y una masa puntual

Esta situación ha resultado ser efectiva en varios experimentos en distintos contextos. ¿Por qué es efectiva? Para responder a esta cuestión necesitamos un breve análisis didáctico. Cuando se hace esta pregunta sin ninguna pista lingüística, los estudiantes de primer año no la reconocen como un problema a resolver utilizando integrales. El primer punto importante es que los alumnos no se quedan desprovistos de recursos, ya que pueden contar con estrategias basadas, a menudo, en la Física: concentrar la masa de la barra en su centro de gravedad y aplicar la ley de atracción entre dos masas puntuales ya conocida. En las distintas experimentaciones esta estrategia es la que siempre ha predominado. Sin embargo, en un grupo de tamaño razonable, como suele suceder en el nivel universitario, siempre hay alumnos que tienen algunas dudas. “¿Es el principio del centro de gravedad válido en ese caso particular?”. Una segunda virtud de esta situación proviene del hecho de que se puede comprobar la validez de este principio simplemente aplicándolo de otra forma. Los estudiantes normalmente sugieren que la barra sea cortada en dos mitades y se aplique el principio del centro de gravedad a cada mitad. Por supuesto, esta operación no da el mismo resultado y el principio resulta no ser válido en este caso particular. Sin embargo, esta respuesta negativa resulta ser también positiva, ya que hace destacar un hecho esencial: la contribución de un trozo de la barra a la fuerza de atracción depende de su distancia a la masa  $x$ . Esto permite a los alumnos proponer cotas superiores e inferiores para la intensidad requerida. Además, la técnica que ha sido la base del proceso de invalidación puede ser utilizada posteriormente en un proceso de refinamiento progresivo, que lleva a los estudiantes a la convicción de que la fuerza, cuya existencia es físicamente atestiguada, puede ser aproximada con tanta precisión como se desee. Subyacente se encuentra simplemente el proceso integral fundamental.

En el diseño didáctico elaborado por Legrand éste es justamente el punto de partida. Los alumnos tienen entonces que trabajar en situaciones que, en distintos contextos, requieran el mismo proceso de solución. Posteriormente

tienen que buscar y discutir las analogías entre las soluciones con el objetivo de convertir el proceso integral en una herramienta explícita (en el sentido de la distinción entre las dos dimensiones, herramienta y objeto, de los conceptos matemáticos introducida por Douady, 1987). Es tan sólo en este punto cuando el profesor universitario conecta este trabajo con la teoría de las integrales de Riemann y desarrolla la noción de integral como un objeto matemático que será reutilizado posteriormente en situaciones más complejas.

Antes de abandonar este punto, quisiera remarcar el siguiente hecho: la eficiencia aquí no está solamente ligada a las características del problema que acabo de describir, sino que depende enormemente del tipo de escenario desarrollado para organizar el encuentro de los alumnos con esta nueva faceta del concepto de integral. De forma crucial, este escenario participa del carácter social de los procesos de aprendizaje. Es a través de la discusión grupal que la estrategia inicial se invalida. Es el juego colectivo el que permite encontrar una solución en un tiempo razonable y el que promueve algunas regularidades en la dinámica de la situación, que no se podrían asegurar si los estudiantes se enfrentaran al mismo problema de forma individual o en pequeños grupos (un apunte similar se hace en Stigler y Hiebert, 1999, p. 164). Tampoco queda duda de que el efecto sería distinto si el profesor simplemente presentara este ejemplo particular durante una sesión de clase.

Este ejemplo pudiera parecer idílico. Pero tengo que confesar que la educación educativa no provee tan fácilmente de medios efectivos para tratar con todas las reconstrucciones necesarias. Por ejemplo, las diferencias se tornan evidentes si se considera el concepto de límite, central en el Cálculo. Con este ejemplo particular llegamos a una tercera categoría de reconstrucciones; reconstrucciones necesarias porque, como ya ha sido reconocido al comienzo del último siglo por el famoso matemático Poincaré (1904), necesariamente los conceptos no pueden enseñarse desde el principio en su forma definitiva. En niveles de Enseñanza Secundaria, en la mayoría de países en la actualidad, ha sido reconocida la imposibilidad de introducir el campo del Cálculo formalmente. La enseñanza actual se apoya tanto en una concepción dinámica del límite, basada en exploraciones gráficas y numéricas, como en técnicas de naturaleza algebraica (Artigue, 1996). Esto permite a los alumnos resolver simples, pero a su vez interesantes, problemas de variación y optimización. La transición hacia aproximaciones más formales, que tiene lugar en la Universidad, representa un salto tremendo, tanto conceptual como técnicamente.

Desde un enfoque conceptual, un punto esencial es el siguiente: a través de la formalización del concepto de límite lo que está en juego es, sobre todo, una respuesta a las necesidades de fundamento, unificación y de generalización (véase Dorier, 1995, Robert, 1998, o Robert y Speer, 2003). No es sencillo sensibilizar a los jóvenes estudiantes con estas necesidades, ya que éstas no forman realmente parte de su cultura matemática. Desde un punto de vista

técnico, lo que sigue es esencial: en el análisis algebraico de su primer contacto, el trabajo técnico no rompe realmente con el trabajo algebraico ordinario. Sin embargo, esto deja de ser así cuando se entra en el campo del Cálculo formal. Por ejemplo, los alumnos deben reconstruir el significado de igualdad y comprender que éstas no vienen dadas, necesariamente, como en álgebra, por una serie de equivalencias sucesivas, sino a partir de la proximidad para cualquier positivo. Otro punto a considerar es que las desigualdades se vuelven más frecuentes que las igualdades, generando un fuerte incremento en la complejidad técnica, en particular debido a los modos de razonamiento asociados, que se basan a menudo en condiciones suficientes. Estos nuevos modos requieren una pérdida de información cuidadosamente controlada basada en una toma de conciencia adecuada de los respectivos órdenes de magnitud de las diferentes partes de las expresiones que los alumnos tienen que manejar. Resumiendo, los alumnos tienen un mundo técnico completamente nuevo a identificar y que aprender a dominar. Esta tarea está lejos de ser fácil y es, necesariamente, un proceso a largo plazo.

### **3.4 Algunas observaciones para terminar: Desde el Cálculo al Álgebra Lineal**

Hasta ahora me he centrado en los cambios cualitativos y en las reconstrucciones más o menos radicales. Como ya se ha destacado, la investigación muestra que las prácticas de enseñanza no estiman suficientemente los costes conceptuales ni técnicos de estos cambios. La enseñanza tiende a dejar la responsabilidad de la mayoría de las reorganizaciones a los alumnos, con efectos dramáticos para la mayoría de éstos, especialmente en la transición Secundaria-Universidad. La investigación también nos muestra que se puede desarrollar estrategias alternativas con resultados fructíferos. Ya se han dado ejemplos para el Cálculo, un dominio ampliamente explorado por la investigación. Pero la cantidad creciente de trabajos de investigación en Álgebra Lineal atestigua la existencia de un fenómeno similar (véase Dorier y Sierpinska, 2003).

Por ejemplo, el concepto de espacio vectorial abstracto, en su forma axiomática, desde un punto de vista epistemológico ha demostrado compartir algunas características comunes con el concepto formal de límite. Cuando entró en la escena matemática, su valor como concepto generalizador, unificador y formalizador fue mucho más fuerte que su potencial para resolver nuevos problemas y no fue fácilmente aceptado por los matemáticos. La misma situación sucede con nuestros estudiantes, que no necesitan esta construcción abstracta para resolver la mayoría de los problemas de un primer curso de Álgebra Lineal. En Francia algunos investigadores han desarrollado estrategias didácticas específicas que pretenden posibilitar a los estudiantes hacer el trabajo reflexivo y cultural necesario (véase Dorier et al. 2000). En otros países, estas dificultades tienden a ser eliminadas mediante la reducción de tópicos en los primeros cursos

de Álgebra Lineal a los de espacios isomorfos a  $\mathbf{R}^n$  y mediante el énfasis en el cálculo matricial y sus aplicaciones (Carlson et al., 1993). Investigaciones recientes en Canadá (Hillel y Sierpínska, 1994) sugieren que esta opción no es tan benigna como podría parecer en principio. Vivir en un mundo de Álgebra Lineal construido a partir de la estructura de  $\mathbf{R}^n$  hace difícil diferenciar vectores y transformaciones de sus representaciones canónicas y puede inducir nuevos obstáculos.

### 3.5 Flexibilidad Cognitiva en los Procesos de Enseñanza y Aprendizaje

El resultado recién mencionado está ligado con una cuestión más general, que es la de las relaciones entre los conceptos matemáticos y sus representaciones semióticas, una cuestión a la que la investigación educativa presta una atención creciente. Este hecho no parece independiente de la evolución global de los marcos teóricos mencionados al principio de este artículo, ya que las aproximaciones socioculturales y antropológicas son especialmente sensibles al papel jugado por las herramientas materiales y simbólicas de la actividad matemática en los procesos de aprendizaje. Según la perspectiva teórica, esta atención se expresa de formas distintas; pero el punto fundamental es que rompe con una visión común de competencias instrumentales y semióticas como producto de la conceptualización y formula como hipótesis relaciones dialécticas más fuertes en su desarrollo mutuo. Esto tiene una importancia particular, especialmente si se tiene en mente la actual evolución tecnológica de los instrumentos de la actividad matemática. De forma general, el aprendizaje matemático no puede seguir siendo visto, como sucede a menudo, solamente como una ascensión regular hacia niveles más altos de abstracción y formalización. Las conexiones entre los campos matemáticos de la experiencia, los diferentes puntos de vista, los distintos marcos y los registros semióticos son una parte fundamental. Con tales consideraciones presentes, entramos en un dominio más amplio que podría ser etiquetado como “el dominio de la flexibilidad cognitiva”, que cada vez es objeto de mayor investigación (véase, por ejemplo, Dreyfus y Eisenberg, 1996).

Utilizaré algunos ejemplos tomados de recientes investigaciones en Álgebra Lineal para ilustrar este punto. Como ya ha sido destacado por Dorier (2000), históricamente el Álgebra Lineal ayudó a unificar diferentes marcos matemáticos pre-existentes: Geometría, sistemas lineales en finitas e infinitas dimensiones y determinantes, ecuaciones diferenciales y análisis funcional. Este papel unificador y su poder es un valor epistemológico esencial del Álgebra Lineal que tiene que ser entendido y utilizado por los alumnos. Pero esto no se puede conseguir sin el desarrollo de conexiones complejas entre los modos de razonamiento, los puntos de vista, lenguajes y sistemas de representaciones simbólicas. Una vez más, la investigación nos ayuda a comprender la complejidad de las construcciones cognitivas necesarias y, a la vez, muestra la insensibilidad del sistema

educativo a esta complejidad. En Dorier (2000), por ejemplo, por un lado, Hillel señala la interacción necesaria en el Álgebra Lineal entre tres niveles distintos de lenguaje y representaciones: los de la teoría general, los de geometría y los de  $\nabla^n$ . Por otro lado, Sierpinska et al. muestran la interacción necesaria entre tres modos de razonamiento diferentes, denominados respectivamente como sintético y geométrico, analítico y aritmético, analítico y estructural<sup>7</sup>. Ambos trabajos muestran la no-adequación de las distintas prácticas de enseñanza documentadas, desde las clases magistrales a los tutoriales. Alves Dias (1998), en su reciente Tesis Doctoral, analiza las relaciones entre dos puntos de vista fundamentales en el Álgebra Lineal: los puntos de vista paramétrico y cartesiano<sup>8</sup>. Muestra claramente que, incluso si la conversión entre las representaciones paramétrica y cartesiana de subespacios vectoriales se consigue, a priori, de forma sencilla gracias a técnicas ordinarias para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, cuando se manejan espacios vectoriales de dimensiones finitas, los alumnos avanzados de Francia y Brasil están lejos de dominar una conexión flexible entre estos dos puntos de vista. Los símbolos matemáticos, tales como matrices, pueden promover errores en el uso de estas representaciones formales porque los alumnos operan sobre los símbolos formales sin intentar ver si las operaciones que desarrollan son significativas en términos de los objetos que los símbolos representan. Esto conduce a menudo a resultados absurdos que no son reconocidos por los alumnos porque no interpretan o comprueban sus resultados a través de argumentos geométricos o dimensionales. El análisis detallado de libros de texto que Alves Dias desarrolló muestra que no prestan atención a estas cuestiones o desarrollan argumentos teóricos, por ejemplo en términos de dualidad, lo que queda muy lejos del nivel técnico necesario para que nuestros alumnos sean capaces de controlar la conexión.

Éstos son ejemplos de Álgebra Lineal. Como ya ha sido documentado por la investigación, *mutatis mutandis*, hay ejemplos similares en el Cálculo. En esta área, explorada más extensamente, la investigación también ofrece evidencia experimental de que las tecnologías informáticas, si se usan apropiadamente (lo que no resulta tan fácil), pueden jugar un papel crucial en la promoción de conexiones flexibles entre representaciones semióticas. Por ejemplo, entre representaciones gráficas, numéricas y simbólicas de funciones, y ayudar a las representaciones gráficas a convertirse en herramientas efectivas del tra-

---

<sup>7</sup>En el modo sintético, los objetos matemáticos son, de alguna forma, dados directamente a la mente, que intenta asimilarlos y describirlos. En el modo analítico, son dados indirectamente: contruidos a través de definiciones y propiedades de sus elementos. Este modo analítico es dividido por los investigadores en dos sub-modos distintos: el analítico-aritmético, donde los objetos vienen dados por una fórmula que hace posible calcularlos, y el analítico-estructural, donde los objetos se definen por un conjunto de propiedades.

<sup>8</sup>Se adopta un punto de vista paramétrico con un subespacio vectorial, por ejemplo, si el subespacio viene caracterizado por algún conjunto de generadores. Un punto de vista cartesiano consiste en caracterizar un subespacio como las soluciones de un sistema lineal o como el espacio anulador de un operador lineal.

bajo matemático (véase Tall, 1991 y Dubinsky y Harel, 1992). La investigación también muestra que el uso efectivo de las tecnologías informáticas requiere del desarrollo de un conocimiento matemático específico, un requisito que no es fácilmente aceptado por la institución educativa, cuyos valores han sido tradicionalmente definidos con respecto a entornos de lápiz y papel.

#### **4 Potencialidades y Límites de la Investigación para la Acción en el Sistema Educativo**

Tal como hemos tratado de mostrar en este artículo, la investigación desarrollada en el nivel universitario nos ayuda a entender mejor las dificultades de aprendizaje que nuestros estudiantes tienen que afrontar, la resistencia sorprendente de algunas, y las limitaciones y disfunciones de algunas prácticas de enseñanza. Además, en varios casos, la investigación ha conducido a la producción de diseños de instrucción que han mostrado ser efectivos, al menos en entornos experimentales. Sin embargo, también debemos reconocer que la investigación no nos da una forma general de mejorar fácilmente los procesos de enseñanza y aprendizaje. Algunas razones pueden ser encontradas en el actual estado de la investigación: hasta ahora, se han concentrado esfuerzos en unos pocos dominios enseñados en el nivel universitario. Además, la preparación de futuros matemáticos, a pesar de la gran diversidad de estudiantes que toman cursos de Matemáticas en la Universidad, ha sido más o menos privilegiado de forma implícita. La investigación continúa, así, siendo muy parcial debido tanto al contenido de lo que se explora como a su visión de la forma y del contenido esperados del conocimiento. En mi opinión, la forma en que la cuestión de las tecnologías informáticas ha sido generalmente tratada, evidencia este hecho. Principalmente se focaliza en las formas en que las tecnologías informáticas pueden apoyar la conceptualización y la flexibilidad cognitiva, reconocida como un componente esencial de esta conceptualización. Pero no se ha prestado la misma atención a lo que es realmente una actividad matemática profesional asistida por las tecnologías informáticas, y las necesidades matemáticas específicas y no-específicas, dependientes de la especialización profesional, requerida para convertirse en un usuario eficiente y crítico, y cómo el conocimiento correspondiente puede construirse en cursos matemáticos ordinarios o especiales. Sin embargo, esto es también un desafío que debemos afrontar hoy día, teniendo en cuenta el hecho de que, en la Universidad, nuestro compromiso principal ya no es el desarrollo de algún tipo de cultura matemática general.

Otras razones como la siguiente parecen más fundamentales: es raro que la investigación nos permita pensar que a través de adaptaciones mínimas y sencillas podamos obtener ganancias sustanciales. Por el contrario, la mayoría de los diseños basados en la investigación requieren de más implicación y dominio por parte de los profesores, y cambios significativos en sus prácticas (véase, por

ejemplo, Dubinsky, Mathews y Reynolds, 1997, con respecto al aprendizaje colaborativo). Ésta es una razón esencial. Lo que tiene que reorganizarse no es solamente el contenido de la enseñanza (no es suficiente con escribir o adoptar nuevos libros de texto), sino cuestiones más globales, tales como las formas del trabajo de los alumnos, los modos de interacción entre alumnos y profesores, y las formas y contenidos de la evaluación. Esto no es fácil de conseguir y no es solamente cuestión de buenas intenciones personales.

Otro punto fundamental es la complejidad de los sistemas donde el aprendizaje y la enseñanza se dan lugar. Debido a esta complejidad, el conocimiento que podemos inferir de la investigación educativa es necesariamente muy parcial. Los modelos que podemos elaborar son necesariamente simplísticos. Podemos aprender mucho incluso a partir de modelos simplísticos, pero no podemos esperar que nos den los medios para controlar realmente los sistemas didácticos. Por tanto, debemos ser realistas en nuestras expectativas y cuidadosos con nuestras generalizaciones. Esto no significa, en mi opinión, que el mundo de la investigación y el mundo de la práctica deban vivir y desarrollarse de forma separada. Todo lo contrario. Pero ello significa que encontrar formas de hacer que el conocimiento basado en la investigación sea útil fuera de las comunidades y los entornos experimentales donde se desarrolla no puede ser dejado bajo la sola responsabilidad de los investigadores. Es nuestra tarea común.

## Referencias

- Alves Dias, M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Tesis Doctoral. Université Paris 7.
- Artigue, M. (1996). Learning and Teaching Elementary Analysis. En C. Alsina, J.M. Alvarez, M.Niss, Aérez, L.Rico, A.Sfard (Eds.), 8th International Congress on Mathematics Education – Selected Lectures, pp. 15-30. Sevilla: S.A.E.M. Thales.
- Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18.2, 231-261.
- Artigue, M. (1999). The teaching and learning of mathematics at the university level: Questions for contemporary research in education. *Notices of the American Mathematical Society*, 46(11), 1377–1385.
- Asiala, M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D. y Thomas K. (1996). A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education*. vol. 6. 1-32.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: J. Vrin.
- Brousseau, G. (1997). *The Theory of Didactic Situations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Carlson, D., Johnson C., Lay D. y Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *College Mathematics Journal*, 24.1, 41-46.
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 153-166. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J.L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, num. 29.2, 175-197.
- Dorier, J.L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications*, 275-276, 141-160.
- Dorier, J.L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski M. (2000). The meta lever. En J.L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, pp. 151-176. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J.L. y Sieprinska, A. (2003), Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton et al. (Ed), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp.255-274.
- Douady, R. (1987). Dialectique outil/objet et jeux de cadres. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 5-32.
- Dreyfus, T. (Ed.) (1995). Special issue on Advanced Mathematical Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 29.2.
- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. En R.J. Sternberg y T. Ben-zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking*, pp. 253-284. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.) (1992). *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes num. 25. Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Dubinsky, E. y MacDonald, M.A. (2003). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En D. Holton et al. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp.275-282.
- Dubinsky, E., Mathews, D. y Reynolds, B.E. (1997). *Readings in Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics*. MAA Notes num. 44. Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Hillel, J. y Sierpinska, A. (1994). On One Persistent Mistake in Linear Algebra. En J. Pedro da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. III, pp. 65-72. Lisbon : Universidade de Lisboa.
- Lebesgue, H. (1956). *La mesure des grandeurs*. Paris: Gauthier Villars.
- Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique. *Repères IREM*, num. 27, 81-125.



- Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Tesis Doctoral, University of Leeds, England.
- Poincaré, H. (1904). Les définitions en mathématiques *L'Enseignement des Mathématiques*, num. 6, 255- 283.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics : towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol. 17.1, 26-30.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner dans l'enseignement supérieur. à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18.2, 139-190.
- Robert, A. y Speer, N. (2003), Research on the Teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. En D. Holton et al. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp.283-300.
- Rogalski, M. (Ed.) (1998). Analyse épistémologique et didactique des connaissances à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Special issue*, vol. 18.2.
- Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11/2.3, 241-294.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A.H. (1994). Some Notes on the Enterprise (Research in Collegiate Mathematics Education, That Is). *CBMS Issues in Mathematics Education*, vol. 4, 1-19.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, num. 22, 1-36.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 6.1, 5-68.
- Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.) (1998). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 827-876. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: Free Press.
- Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 289-325. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12-2, 151-169.

MICHÈLE ARTIGUE  
UNIVERSITÉ PARIS 7,  
FRANCE  
*e-mail: artigue@math.jussieu.fr*