Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología

Fernando Hitt

Resumen

En este documento analizaremos la construcción de conceptos desde una teoría de las representaciones por parte de los estudiantes, y en particular sobre la problemática del uso de la calculadora gráfica para la construcción de conceptos en el aula de matemáticas. El desarrollo de la tecnología y la capacidad de graficación de las computadoras y calculadoras impulsó el estudio del rol que juegan las diferentes representaciones de un concepto matemático en su construcción. Sabemos que las representaciones de un concepto matemático, solo representan una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que nos permitirá su construcción. Es decir, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en cuestión. ¿Cuál es el papel de la tecnología en este contexto? Nuestro propósito es el de discutir sobre el uso reflexivo de la tecnología en el aula de matemáticas.

Summary

This paper focuses on students construction of concepts from a theoretical perspective based on representations. In particular, we recognize that representations associated with a mathematical concept only represent part of it, and the process of relating and transforming those representations will play a fundamental role in its construction. That is, conversions among distinct representations and coherent treatments (manipulation of transformations) will eventually lead to a solid construction of such concept. What is the role of technology in this context? Our goal in this paper is to discuss the reflexive use of technology in students' mathematical learning.

Problemática en el aprendizaje de las matemáticas

Investigaciones recientes que intentan explicar los fenómenos ligados al aprendizaje de las matemáticas han mostrado lo complejo que puede ser la adquisición de conocimientos. Las metodologías de investigación para analizar la construcción de conceptos matemáticos cada vez son más finas, y los resultados de investigación nos muestran que, en general, debemos abordar esta problemática desde varios puntos de vista. Uno, de corte general, que tiene que ver, con la adquisición de conocimiento y consideraciones teóricas sobre la construcción de conceptos matemáticos; y otro, que tiene que ver directamente con la complejidad intrínseca del concepto matemático en cuestión.

Los dos puntos de vista se deben tratar desde una misma base teórica. Nuestro planteamiento se puede ubicar desde una perspectiva constructivista. Dentro de esta teoría del aprendizaje es importante especificar qué aspectos teóricos son los que uno trata, ya que en general, uno se ubica dentro de esta corriente como oposición a la teoría conductista sin explicitar los elementos teóricos considerados al tomar alguna posición. En lo que sigue, iremos describiendo esos aspectos teóricos y conectándolos con aplicaciones hacia la enseñanza de las matemáticas. En este documento no es nuestra intención profundizar sobre esos aspectos teóricos (para una mejor acercamiento de ese punto de vista ver Hitt, 2002a, 2003a).

El avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta pero que no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Estos aspectos teóricos son la base para entender el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de conceptos. Ahora, con la tecnología, es importante el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes muy diferentes a los que se seguían en el pasado.

Desde una perspectiva teórica, donde la tecnología no queda excluida pero tampoco es central, Duval (1998, p. 175) señala que:

> "...estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos".

Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval (Idem, p. 185) establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación.

Dentro de este marco de referencia, la visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema. Desde este punto de vista, en un primer acercamiento, no solamente es importante entender las dificultades para manipular cada una de esas representaciones, también lo es el análisis de las tareas de conversión entre representaciones que debemos proponer a nuestros estudiantes. También es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de otras cuando estamos promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático. Skemp (1971) ya señalaba que no debemos olvidar que en la transición hacia un pensamiento matemático avanzado la formalización y sistematización de la matemática es una de las últimas etapas y no la única actividad matemática.

En lo que sigue, intentamos clarificar nuestra posición con diferentes ejemplos con experimentaciones realizadas tanto con estudiantes como con profesores en formación para la escuela preuniversitaria. Además, a lo largo de este artículo queremos hacer énfasis en que el uso de la tecnología per se no va a resolver el problema del aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes; es por ello, que hemos iniciado este trabajo con algunas consideraciones teóricas que serán importantes de tener en cuenta cuando elaboremos materiales para el aula de matemáticas en ambientes de los llamados "*papel, lápiz y tecnología*".

Desarrollo de habilidades sobre la visualización matemática

¿Por qué debemos desarrollar habilidades en nuestros estudiantes sobre la visualización matemática? Existen muchas investigaciones que nos muestran de manera contundente que los estudiantes de diferentes niveles educativos tienen una gran resistencia a utilizar diferentes representaciones que podrían ayudarlos tanto en la construcción de conocimiento matemático como en la resolución de problemas. Por ejemplo, Eisenberg y Dreyfus (1990) nos han demostrado que existe una resistencia por parte de estudiantes y profesores a visualizar en matemáticas.

Tomemos un ejemplo desarrollado en Hitt (2003b), supongamos que proponemos a nuestros estudiantes que resuelvan la siguiente ecuación $(x-1)^2 = (x+1)^2$. Nuestra experiencia nos indica que en general este tipo de ejercicios es difícil para los estudiantes de enseñanza media ¿Por qué? Una explicación es que, los estudiantes están acostumbrados a trabajar en el sistema algebraico por lo que son propensos a cometer errores que dificultan sus procesos de resolución. Un ejemplo de actuación sería transformar la expresión $(x-1)^2 = (x+1)^2$, en la expresión $\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2}$ y obtener que $(x-1) = (x+1)$, llegando a que $-1 = 1$ y de aqui inferir resultados contradictorios.

Una gráfica como la de la Figura 1, seguramente les plantearía la necesidad de revisar su proceso algebraico.

Figura 1

¿Por qué nuestros estudiantes no consideran las representaciones geométricas como complementarias en los procesos de resolución de problemas?

En este contexto surge el siguiente interrogante:

¿El profesor de matemáticas se ha preocupado por construir un concepto matemático en términos de una articulación coherente entre representaciones del concepto en cuestión?

De acuerdo a las consideraciones teóricas de Duval (Idem), para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar las actividades dentro de un solo sistema de representación, sino también realizar las tareas de conversión de una representación a otra, y viceversa. Son éstas las que propiciarán la construcción de los conceptos matemáticos. Las investigaciones en educación matemática señalan que en general el sistema algebraico es el preferido por los profesores de matemáticas en su práctica docente.

Entonces, de acuerdo a la teoría sobre la importancia del uso de diferentes representaciones en la enseñanza de las matemáticas, lo que debemos hacer es introducir los conceptos matemáticos a través de actividades que propicien el trabajo con diferentes representaciones.

La tarea así puesta parece fácil, pero ¿Habrá algún tipo de dificultad con esta nueva orientación de la enseñanza?

Percibir y visualizar

La percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo. Por ejemplo, podemos percibir una mosca que vuela y no prestamos atención a ese hecho, sin embargo, al querer atravesar una calle y vemos un coche que viene hacia nosotros, realizamos un acto de conocimiento directo en términos de evaluar su velocidad y decidir si es conveniente atravesar o no la calle. Esto último, visualizar, generalmente lo hacemos inconscientemente. ¿Es posible desarrollar en nuestros estudiantes habilidades sobre la visualización matemática?

En este contexto y en relación con la problemática que hemos estado argumentando, Zimmermann (1990, p. 136) afirma que:

> *Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y ... en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido.*

Con lo anterior queremos señalar que por ejemplo, podemos proporcionar una gráfica a un estudiante y él podrá percibir algunos rasgos de lo que se presenta, pero, posiblemente, no haya mayor trascendencia. Si queremos que el estudiante visualice una gráfica, esta tarea demanda una actividad mental más profunda en el sentido de reconocimiento de ciertos subconceptos allí representados. De hecho, desde el punto de vista teórico de Duval, debemos centrar nuestra atención a entender los problemas que surgen al desarrollar una tarea de conversión entre representaciones.

Clarifiquemos este punto con un ejemplo de un caso de una entrevista a un profesor de enseñanza media. Se le solicitó al profesor que proporcionara una definición de derivada de una función en un punto.

El profesor señaló que una función *f* es derivable en un punto "*x*" si el siguiente límite existe:

$$Lim_{h \to 0} \; (f(x+h) - f(x)) / h$$

Al solicitarle que explicara gráficamente la expresión algebraica, mostró la figura adjunta. Figura clásica que se encuentra en los libros de texto.

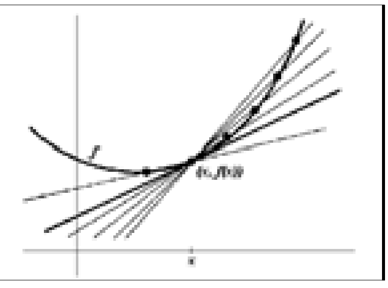


Figura 2

Posterior a esta respuesta, se le pidió que graficara la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y que la analizara para "$x = 0$". El profesor realizó un dibujo como el siguiente y afirmó que la derivada en $x = 0$ era igual a cero (ver Figuras 3 y 4).

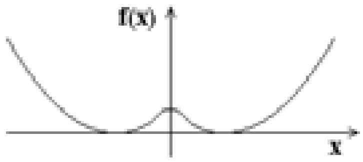


Figura 3

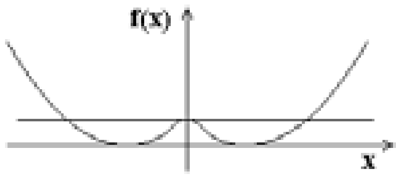


Figura 4

Mi sugerencia en ese momento fue que tomara su idea geométrica como conjetura y que la justificara con un proceso algebraico. Su respuesta fue:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^2-(0+1)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0} (h-2) = -2$$

Si el profesor hubiera utilizado una calculadora gráfica, probablemente el resultado en pantalla le hubiera sugerido revisar su primera idea permitiéndole observar que en cero la función no es derivable. Debo mencionar que el profesor en esta experimentación tenía acceso a una calculadora TI-92 que tiene posibilidades para graficar funciones por partes. Para los fines de la experimentación, en este caso, la calculadora no hubiera permitido que el profesor confrontara sus ideas intuitivas sobre la gráfica de la función y su definición de derivada. De hecho, el profesor mencionó que en su definición la "h" era positiva! A insistencia del entrevistador, el profesor tuvo la oportunidad de reflexionar sobre su definición y examinar con mayor detalle la representación gráfica de su definición, otorgándole mayor atención al cálculo de la derivada por la izquierda y por la derecha y a darse cuenta que la representación gráfica que siempre había utilizado le había hecho creer que la "h" siempre era positiva.

Por otro lado, es importante señalar el hecho de que para el profesor fue importante que se percatara por sí mismo de la existencia de una contradicción, ello fue un elemento de avance en su reconstrucción del concepto de derivada.

Con este ejemplo, queremos señalar que tenemos una gran tendencia a dar por sentado que la lectura de gráficas es una habilidad menor que no tiene mucha trascendencia en la construcción de conceptos y dentro de una teoría de las representaciones no es así. Es decir, que la coordinación entre representaciones no es trivial (ver Hitt, 1994 y 1998) y que promover la articulación entre representaciones es una tarea que tenemos que considerar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Veamos algunos ejemplos sobre la importancia de usar la tecnología con mayor cuidado del que usualmente se tiene en el aula de matemáticas. La lectura de gráficas no es una actividad fácil para los estudiantes. De hecho, existen muchas dificultades al respecto. Cuando se empezó a utilizar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, los primeros problemas que se detectaron fueron los de falsas interpretaciones por parte de los estudiantes, porque exclusivamente realizaban una sola gráfica.

Veamos el siguiente ejemplo. Si un estudiante se restringe a lo que percibe en pantalla podría asegurar que en la gráfica representada existe un punto de intersección entre las funciones $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = x^3 - x^2 - 6x$ para $-1 < x < 0$ (ver Figura 5, primeras dos gráficas). Sin embargo, utilizando la instrucción "zoom" se observa que no es así.

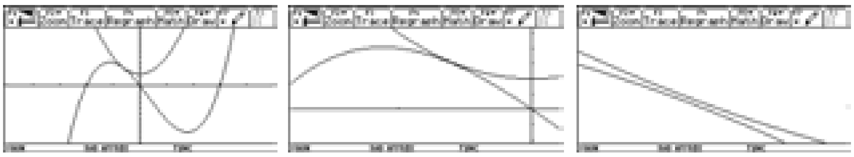


Figura 5

Insistiendo en la búsqueda de intersecciones, los estudiantes se sorprenderán que en realidad la intersección se realiza en el primer cuadrante. Una actividad interesante es la de transformar las dos funciones en otra que represente la diferencia de las mismas y buscar la raíz correspondiente por el método de Newton.

Investigaciones sobre el uso de la tecnología en países en que los alumnos de enseñanza secundaria cuentan con una calculadora gráfica, nos muestran que la problemática sobre el uso de la tecnología en el aula de matemáticas es mucho más compleja de lo que anteriormente se pensaba.

Guin y Trouche (1998) señalan las dificultades que tuvieron sus estudiantes bajo estudio al tratar de resolver la ecuación $\tan(x) = x$, en R :

"*En una clase de 32 alumnos (17 años), solamente cuatro estudiantes señalaron una infinidad de soluciones... Los otros estudiantes mencionaron un número finito de soluciones (correspondiente a los que son visibles en la pantalla*" (ver Figura 6). En la resolución de la ecuación $\frac{\sin x}{x} = 0$, en $[0, 600]$ (ver Figura 7), señalan lo siguiente: “Entre 40 estudiantes en Terminal científico (18 años) y primer año científico de universidad (19 años) solamente el 10% respondieron cada vez que $\sin x$ se anula”'.

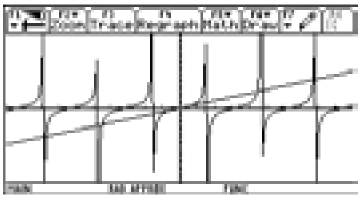


Figura 6

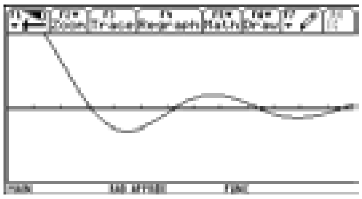


Figura 7

Es decir que la dificultad estriba en que los estudiantes no toman la pantalla como si fuera una ventana en donde solamente estamos observando una parte de la gráfica. Otra dificultad es interpretar lo que se percibe en esa ventana. Los mismos autores (Guin y Trouche) señalan que algunos alumnos consideran las asíntotas como parte de la representación gráfica de la función y por tanto, proponen más intersecciones; y otros señalan que la intersección entre las dos funciones cerca del cero se da en una infinidad de puntos.

Podría parecer que nuestro propósito es el de mostrar que el uso de tecnología no es adecuado en el aula de matemáticas, pero más bien, lo que estamos queriendo enfatizar es la importancia de hacer un uso reflexivo de la misma. Nuestra intención es la de promover habilidades de visualización matemática en el sentido de Hershkowitz, citado por Arcavi (2002), que trata la visualización matemática como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflexionar sobre información visual.

Por otro lado, es muy común que en nuestro acercamiento de enseñanza propongamos problemas que requieran una actividad bien delimitada, como la utilización de un algoritmo o un proceso por etapas como cálculos de mínimos, máximos y puntos de inflexión de alguna función derivable. En este tipo de acercamientos no dejamos cabida a lo que hace algunos años se llegó a denominar como el desarrollo del pensamiento divergente, que tiene como objetivo principal promover la conjetura y verificación de la misma con la intención de provocar una reflexión más profunda antes de promover lo que se designaba como el pensamiento convergente. En otras palabras, lo que queremos señalar es la importancia de proponer actividades a nuestros estudiantes en donde no es explícito el camino o algoritmo a seguir, para promover este tipo de pensamiento divergente.

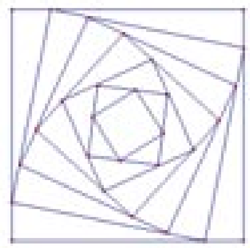
Un par de actividades que hemos considerado interesantes se exponen a continuación y en ellas, a priori, no es fácil de determinar si estamos frente a un proceso finito o no. De hecho, en el primer caso el proceso es finito y en el segundo no, pese a que la intuición de nuestros estudiantes y de nosotros mismos, generalmente nos dice lo contrario.

Una hormiga camina sobre una tira elástica. Inicia en un extremo y recorre 6 cm por minuto. Al inicio, la tira elástica tiene 24 cm. Después de cada minuto, el elástico se alarga 12 cm. Suponga que la tira se puede alargar indefinidamente de manera uniforme.

a. *¿La hormiga llegará al otro extremo de la tira elástica? Explique su respuesta.*

b. *Si respondiste afirmativamente al inciso a), ¿en cuánto tiempo llegará la hormiga al otro extremo?*

Partiendo de un cuadrado de lado mayor que uno, trace otro al interior desplazando sus vértices como se indica en la figura: cada vértice está sobre un lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Trace otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro más y así sucesivamente.
¿Hasta dónde se puede realizar esta construcción?
Si designamos por l_n el lado del n-ésimo cuadrado, ¿Existe el límite de l_n cuando n va a infinito?



En ambos problemas es posible representar la situación mediante la tecnología lo que nos ayudaría a establecer alguna conjetura y posteriormente confirmarla con un proceso algebraico. Por ejemplo se puede utilizar la calculadora o Excel en el primer caso y algún paquete de geometría dinámica (Cabri Géomètre o SketchPad) en el otro.

Reflexiones

En general el profesor de matemáticas que rechaza el uso de tecnología dice a sus alumnos que no es necesario utilizarla ya que de cualquier modo no les servirá para realizar un proceso algebraico. Sin embargo, en el desarrollo de habilidades matemáticas, el uso de diferentes representaciones constituye una herramienta fundamental para la resolución de problemas.

Los problemas que genera el uso creativo de las calculadoras graficas son de interés en distintos países. Guin y Trouche (idem) mencionan que a pesar de que una gran mayoría de estudiantes del ciclo secundario en Francia (edades de 14 a 17 años) cuentan con una calculadora gráfica, solamente alrededor del 15% de los profesores de enseñanza media las utilizan en el salón de clases. Los mismos autores señalan que en Francia la actividad de aprender a leer gráficas no está en el currículum, y que esa habilidad, los alumnos la deben adquirir fuera del aula de matemáticas.

En el mismo sentido, Malabar et al. (1998) mencionan que a pesar del diseño del software como el Graphics Calculus (Tall et al., 1988) para utilizarse entre los 16 y 19 años en los cursos preuniversitarios en el Reino Unido, no parece ser utilizado salvo por una minoría de profesores. En donde parece haber un fuerte impulso para el uso de calculadoras gráficas es en los Estados Unidos (ver por ejemplo, Waits et al.,1998).

Desde nuestro punto de vista, tanto por los elementos teóricos considerados al inicio de este documento, como por los ejemplos desarrollados, hemos puesto de manifiesto que nos inclinamos por el uso reflexivo de la tecnología. Para ello, es necesario implementar en el aula de matemáticas (ver Hitt, 2002b) tareas en las que la actividad matemática demande el uso coherente de diferentes representaciones. La tecnología, desde este punto de vista, servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.

Referencias

Arcavi A. & Hadas N. (2002) Computer mediated learning: an example of an approach. In F. Hitt (Editor), Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

Duval R. (1998) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5 (1993).

Duval R. (1995) Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Eisenberg T. & Dreyfus T. (1990) On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Visualization in Teaching and Mathematics (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MAA Series. USA.

Guin D. et Trouche L. (1998) Environnements "Calculatrice symbolique": Necessité d'une socialisation des processus d'instrumentation. Evolution des comportements d'eleves au cours de ces processus. Actes du Colloque Francophone Européen Calculatrices symboliques et géometriques dans l'enseignement des mathématics (Dominique Guin Ed.). IREM de Monntpellier, France.

Guin D. & Trouche L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. International Journal of Computers for Mathematical Learning 3, pp. 195-227.

Hitt F. (1994) Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol.

16, No. 4, pp. 10-20.
Hitt F. (1998) Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behavior , 17(1), pp. 123-134.
Hitt F. (Editor, 2002a) Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.
Hitt F. (2002b) Funciones en Contexto. México: Pearson Educación (Prentice Hall).
Hitt F. (2003a) Le caractère fonctionnel des représentations. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg, Vol. 8, pp. 255-271.
Hitt F. (2003b) The role of the external representations in the constructions of mathematical concepts. L'educazione Matematica. Italia.
Malabar I., Pountney D. C. & Townend M. S. (1998) Combining Visual and Symbolic Skills in the Teaching and Learning of Mathematics. Proceedings of the 3rd International Derive and TI-92 Conference, Gettysburg, Penn.
Skemp R. (1971) The psychology of learning mathematics. London, Pelican.
Tall D., Van Blockland P. & Kok D. (1988) Graphics Calculus. Rivendell Software. U. K.
Waits B., Longhart F. y Longhart K. (1998) Le Rôle des Calculatrices Symboliques dans la Reforme de l'Enseignement des Mathematiques. Actes du Colloque Francophone Européen Calculatrices symboliques et géometriques dans l'enseignement des mathématics (Dominique Guin Ed.). IREM de Monntpellier, France.
Zimmermann W. (1990) Visual Thinking in Calculus. In Visualization in Teaching and Mathematics (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MAA, No. 19.

Fernando Hitt
Département de Mathématiques,
Université du Québec à Montréal
Canada
e-mail: hitt.fernando@uqam.ca