HISTORIA

Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica

C. José María Sigarreta Almira y Pilar Ruesga Ramos

Resumen

El trabajo aborda el surgimiento y desarrollo de la Geometría y se evidencia, a través de la evolución de las Geometrías No-Euclidianas, el papel de la práctica y de los factores internos y externos, objetivos y subjetivos en la estructuración de los conocimientos geométricos. Se presenta un estudio del problema del V Postulado y las principales tentativas de "demostración", se analizan algunas proposiciones equivalentes a este y por último se ofrecen resultados importantes que fundamentan las Geometrías de Lobatchevski y de Riemann y la no contradicción de las mismas. Además, desde el punto de vista filosófico se valoran las principales corrientes imperantes en la época y su influencia en el surgimiento de la nueva Geometría, así como el papel de esta naciente ciencia en la revolución del pensamiento humano.

Introducción

Para el surgimiento y desarrollo de la Geometría, como una disciplina matemática, fue necesario que se acumularan resultados de carácter empírico y que se desarrollara el comercio y la comunicación hasta que apareciera la necesidad de acumular todos aquellos resultados y métodos en teorías independientes, es decir, que existiera una relación dialéctica entre los factores internos y externos. En la Geometría, como en las demás ciencias, se debe destacar el papel de la práctica, la cual explica la naturaleza sociohistórica del conocimiento y sus nexos con la realidad. La actividad matemática en general, y en particular la actividad geométrica, está doblemente ligada a la realidad concreta: en el seno de esta se forman los primeros eslabones de la cadena de conceptos geométricos; y se retorna a la práctica, a la postre, en las aplicaciones de estos a las demás ciencias y a la técnica.

La Geometría como ciencia a lo largo de todos estos siglos ha contribuido al desarrollo de la sociedad, pues los conocimientos geométricos se han aplicado en la obra constructiva y cultural de la humanidad, se pueden citar los ejemplos de las famosas construcciones de la antigüedad y del Renacimiento; ha influido en el desarrollo urbano alcanzado por las civilizaciones, resolviendo de esta forma problemas científicos y sociales. Se pueden citar diferentes períodos en el desarrollo de la Matemática, en particular, A. N. Kolmogorov, divide el desarrollo de la Matemática en cuatro períodos:

1. Surgimiento de la Matemática (hasta el siglo VI a.n.e.).
2. Matemática Elemental (desde el siglo VI a.n.e. hasta el XVI).
3. Matemática de las magnitudes variables (desde el siglo XVII hasta mediados del XIX).
4. Matemática Contemporánea (a partir de 1870 aproximadamente).

> "*Se entiende por problemas filosóficos de la matemática cualquier problema relativo a la matemática como ciencia y cuyo tratamiento o solución necesite de la utilización de las categorías y leyes de la Filosofía*" (Sánchez, 1987).

Estos problemas filosóficos pueden ser, entre otros:

- ¿Cuál es el objeto de la Matemática?
- ¿Cuáles son los principales estímulos del desarrollo del saber matemático? etc.

Desarrollo

Este trabajo abarca el tercer período e inicio del cuarto del desarrollo de la Matemática propuestos por A. N. Kolmogorov, que es precisamente donde surge y se desarrollan las Geometrías No-Euclidianas, relacionando esencialmente, el papel de la práctica social en el desarrollo de la Geometría de esta época, aunque se parte desde el segundo período.

Sección 1. El Problema del V Postulado. Tentativas por Demostrarlo

La fiebre que se originó por reducir el sistema de axiomas de Euclides, llevó a los geómetras directamente al V Postulado y aunque las investigaciones relativas al mismo son tan antiguas como los Elementos, estas no culminaron hasta cerca del siglo XIX con importantes descubrimientos. El problema consistía en que los matemáticos se dieron a la tarea de probar que este postulado era un teorema, es decir, que era demostrable a partir de los restantes postulados y axiomas.

Desde Euclides hasta fines del siglo XIX el problema del V Postulado era uno de los más populares de la Geometría. Durante más de veinte siglos se propusieron muchas "*demostraciones*" diferentes de dicho postulado. Todas eran, sin embargo, falsas o erróneas. Por lo común sus autores utilizaban en dichas demostraciones, sin darse cuenta, una proposición equivalente al famoso postulado. Tales análisis no alcanzaron la meta propuesta, ya que el problema era liberar la teoría euclidiana de ese postulado "especial".

A continuación se citan algunos de los matemáticos que"*demostraron*" el V Postulado de Euclides:

Posidonio (siglo I a.n.e.): Propone llamar rectas paralelas a dos rectas coplanares y equidistantes. Esta definición y la euclidiana se corresponden, sin embargo los hechos de que sean equidistantes y no se corten pueden tratarse por separado, aspecto que aborda en su obra Gemino. **Gemino** (siglo. I a.n.e.): Plantea que pueden existir rectas paralelas en el sentido de Euclides, pero no así en el sentido de Posidonio, es decir, que prolongadas hasta el infinito no se corten y sin embargo que sean no equidistantes. Tal hecho es calificado por Gemino como el más paradójico de toda la Geometría. **Proclo** (410-485): Su demostración reposa sobre la siguiente proposición que él consideraba evidente: "La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera prolongando suficientemente las dos rectas". Esta proposición fue demostrada rigurosamente por Saccheri años más tarde. Introduce, por consiguiente, la hipótesis de que la distancia de dos paralelas se mantiene finita, hipótesis de la que básicamente se deduce la hipótesis de Euclides. **Aganis** (S. VI): Su demostración la basa en la hipótesis de que existan rectas equidistantes que como Posidonio llama paralelas. De tal hipótesis deduce que la misma distancia entre dos paralelas es la longitud de un segmento perpendicular común a las dos rectas; que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí; que dos paralelas cortadas por una tercera forman ángulos internos de un mismo lado suplementarios y recíprocamente. **Nassir-Eddin** (1201-1274): Hizo su contribución personal al problema del V Postulado, a pesar de adaptarse al criterio dado por Aganis, merece ser recordado por la idea original de anteponer explícitamente el teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo y por la forma acabada de su razonamiento. (Su obra escrita en árabe fue reproducida en 1657 y 1801). **P.A. Cataldi** (?- 1626): Primer geómetra moderno en publicar un trabajo exclusivo sobre el problema de las paralelas. Brinda una demostración del V Postulado recurriendo a la hipótesis de que rectas no equidistantes son convergentes en una región y en la otra divergentes. **Giordano Vitelas** (1633-1711): Escribe su obra: "*Euclides restaurado o bien los antiguos elementos geométricos corregidos y facilitados*". Trata de demostrar que la equidistante de una recta es una recta. Obtiene el resultado más notable hasta el momento. **J. Wallis** (1616-1703): En el 1663, dio un curso que contenía una demostración del postulado de las paralelas. Fundamenta su demostración en que para toda figura existe una semejante de razón arbitraria. Plantea el postulado siguiente: "*La perpendicular AB y la oblicua CD a la secante AC, necesariamente se cortan del lado del ángulo agudo ACD*". Este postulado se le atribuye a Legendre

Existieron otros "demostradores" del postulado, ya que son raros los grandes matemáticos que no se hallaron interesado alguna vez en ese problema: Ampere, Leibniz, Descartes, Lagrange, Legendre, Fourier, Gauss, Jacobi, etc. Todos intentaron "demostrar" el famoso postulado y de hacer luz sobre esa "*mancha oscura de la teoría de las paralelas*".

Tres matemáticos, en sus trabajos, se acercaron bastante a la Geometría No-Euclidiana, ellos fueron Saccheri, Lambert y Legendre, de los cuales se brindan aspectos de sus trabajos, pero antes se citará el ya discutido V Postulado:

> *Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y sólo una a dicha recta.*

Girolamo Saccheri (1677-1733): Los estudios de Saccheri fueron publicados en 1733, bajo el título: "*Euclides depurado de toda mácula, o la experiencia que establece los principios primordiales de la Geometría Universal*". Hace un intento de demostrar el V Postulado por reducción al absurdo. Formuló las siguientes hipótesis, excluyentes y exhaustivas: los ángulos de su cuadrilátero son rectos, son obtusos o son agudos. Saccheri demostró que si una de estas hipótesis es válida para un cuadrilátero, entonces es válida para todos. Demostró que el V Postulado es consecuencia de la hipótesis del ángulo recto, que la hipótesis del ángulo obtuso es contradictoria con el sistema.

Comienza a trabajar en la hipótesis del ángulo agudo con el objetivo de encontrar una contradicción. Al no encontrar la misma es incapaz de rechazar dicha hipótesis, basándose en resultados lógicos se refugió en el terreno menos firme de la intuición y llegó a la conclusión en la proposición 32 de su libro de que la hipótesis del ángulo agudo es falsa porque contradice la naturaleza de la línea recta. Evidentemente el propio Saccheri siente aquí que no pudo reducir la hipótesis del ángulo agudo a una contradicción lógica y él regresa a ella, a fin de demostrar que se "contradice a sí misma". Con este fin, calcula de dos maneras diferentes la longitud de cierta línea y obtiene dos valores distintos para ella. Esto sería, en efecto, una contradicción, pero él llegó a ella cometiendo un error de cálculo.

Lambert (1728-1777): Sus ideas desarrolladas en la obra "*Teoría de las líneas paralelas*" (1766), se aproximan a los razonamientos de Saccheri. Considera en el cuadrilátero tres ángulos rectos y con el cuarto, al igual que Saccheri, analiza las tres hipótesis. Y desarrolla la hipótesis del ángulo agudo, en la cual no encontró contradicción lógica alguna y a diferencia de Saccheri no cometió error que le permitiese descartar la hipótesis del ángulo agudo. Lambert en su obra, no afirma haber demostrado el V Postulado y llega a la firme conclusión de que las restantes tentativas en esta dirección no llevaron a la meta deseada. **Legendre** (1752-1833): Es conocido por sus trabajos en el Análisis, Teoría de los números y Mecánica, dejó una herencia importante en Geometría. Intentó por mucho tiempo "demostrar" el V Postulado de Euclides; llegó a publicar algunas de las "demostraciones" del V Postulado y a pesar de que ninguna fue correcta, sus razonamientos son de interés, pues ponen en claro la relación existente entre el V Postulado y la proposición relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo. En su trabajo consideró tres hipótesis: *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que 2R, es igual a 2R o es menor que 2R*. Donde R significa un ángulo de 90^o.

La primera es reducida a una contradicción, mediante razonamientos exactos. Sin embargo, al efectuar la reducción de la tercera a una contradicción, Legendre utilizó una proposición equivalente al V Postulado. Un saldo positivo de su trabajo, se encuentra en que obtuvo proposiciones de gran interés, como por ejemplo: *Si la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a 2R, tiene lugar el V Postulado.* Su mayor mérito está en la forma sencilla y elegante que supo dar a sus investigaciones, por lo que estas alcanzaron aquella difusión que tanto contribuyó a ensanchar el círculo de los cultivadores de las nuevas ideas que entonces estaban formándose.

Farkas Bólyai (1775-1856): Oriundo de Transilvania (parte suroriental de Hungría), viaja a Alemania a la Universidad de Gottinga, donde se dedicó al estudio de las Matemáticas. En dicha Universidad conoció a un joven, dos años menor que él, este respondía al nombre de Karl Friedrich Gauss. Ambos jóvenes entablaron una larga y duradera amistad y el joven Gauss estimuló los intereses de Farkas por los fundamentos de la Geometría y especialmente por la "demostración" del V Postulado. En esta época Farkas formuló una demostración, la cual reelaboró muchas veces y en la literatura se conoce con el nombre de "*La Teoría Gottingeana de las paralelas*", debido a él y a su entrañable amigo. En 1800 conoció a Susana Arkos, hija de un cirujano, con la cual entabló rápidamente matrimonio. De este casamiento nació en Diciembre de 1802 János Bólyai, el cual superó a su padre en el talento, pero heredó de su madre la histeria. De la obra de este famoso matemático se hablara más adelante.

Como se puede apreciar, el V Postulado fue blanco de los más duros ataques, sin embargo, la grandeza de Euclides descansó en el mismo. En su comentario sobre los Elementos de Euclides, Heath, señaló:

> *"Cuando se consideran los innumerables intentos hechos a través de veinte siglos para demostrar este postulado, muchos de ellos por geómetras de primera fila, no se puede por menos de admirar el genio del hombre que llegó a la conclusión de que tal hipótesis, necesaria para la validez de todo el sistema, es realmente indemostrable".*
> (Blumenthal, 1965, p. 7)

En este largo período de tiempo no existieron las condiciones internas dentro de la Matemática para poder llegar a conclusiones válidas sobre la imposibilidad de la demostración del V Postulado a partir del resto de los axiomas y postulados formulados por Euclides, pues desde el punto de vista subjetivo la mayoría de los matemáticos no se percataban del uso de proposiciones equivalentes y de sus errores en las diferentes demostraciones que hacían, además reinaban las concepciones filosóficas idealistas y otros resultados contrarios a los de Euclides eran inaceptables por la sociedad científica de estas épocas. Aún no estaban creadas las condiciones internas y externas para el surgimiento de las Geometrías No-Euclidianas.

Sección 2: Proposiciones Equivalentes al V Postulado

Aunque las "*demostraciones*" anteriores del V Postulado no fueron válidas, sí se obtuvieron resultados positivos, como por ejemplo, se formularon proposiciones equivalentes al V Postulado, como las siguientes:

1. Dos rectas paralelas son equidistantes. (Proclo)
2. De un triángulo cualquiera puede siempre construirse un triángulo semejante de magnitud arbitraria. (Wallis)
3. Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia. (F. Bólyai)
4. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. (Saccheri y Legendre)
5. Si k es un entero cualquiera, existe siempre un triángulo cuya área en mayor que k. (Gauss)

Por otro lado, con los intentos por demostrar este famoso postulado se obtuvo al inicio del siglo XIX la llamada Geometría de Lobatchevski y posteriormente la Geometría de Riemann.

Sección 3: Surgimiento de las Geometrías No Euclidianas

Probablemente, el primero que obtuvo un concepto claro sobre una Geometría distinta a la de Euclides fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855), el más grande matemático del siglo XIX y quizás de todos los tiempos. Gauss estudió durante 40 años la teoría de las paralelas y después de muchas reflexiones formuló una nueva Geometría que llamó no euclidiana y comenzó su desarrollo.

Los documentos que permitieron una reconstrucción aproximada de las investigaciones gaussianas sobre la teoría de las paralelas son la correspondencia de Gauss con F. Bólyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus y Bessel; dos pequeñas notas en Gottgelehrte Anzigen (1816-1822) y algunos apuntes encontrados entre sus cartas en 1831. Revisando las cartas de Gauss se pudo fijar como fecha de partida de sus meditaciones sobre la teoría de las paralelas el año 1792. El segundo período en el estudio de la teoría de las paralelas es después del 1813, ilustrado principalmente por algunas cartas dirigidas a Wachter en 1816, a Gerling en 1819, a Taurinus en 1824 y Schumacher en 1831 y por los apuntes encontrados en las cartas de Gauss.

Todos estos documentos muestran que a partir de aquí Gauss obtuvo algunos de los teoremas fundamentales de la nueva Geometría, que él llamó primero antieuclideana, después Geometría Astral y finalmente No-Euclidiana. Sin embargo, Gauss no dejó traslucidar sus ideas por temor a no ser comprendido; sólo a algunos amigos íntimos confió algo de sus investigaciones y cuando por necesidad se vio obligado a escribir a Taurinus en 1824, le ruega que guarde en silencio sobre las comunicaciones que le hace.

Pero además, el llamado "*Príncipe de las Matemáticas*" no publicó sus resultados por temor a la crítica del mundo matemático de aquella época y el golpe que una tal Geometría significaba para las concepciones filosóficas imperantes, el Kantismo, su creador Enmanuel Kant (1724-1804). Este filósofo, sostenía la doctrina de que la Geometría Euclidiana es inherente a la naturaleza del mundo físico. Así, mientras Platón decía que sólo Dios hacía Geometría, Kant afirmaba que Dios hace Geometría de acuerdo a los Elementos de Euclides. *Efectivamente, Gauss evitó las críticas y después de su muerte, sólo encontraron en sus papeles fragmentos aislados, esbozos de las proposiciones primeras de la Geometría No-Euclidiana. Estos fragmentos figuran en el tomo VIII de sus obras; es suficiente revisarlos para constatar hasta qué punto es insignificante esa herencia del matemático alemán con respecto a las obras de Lobatchevski* (Kagan, 1984).

Similares resultados obtuvo János Bólyai (1802-1860) en 1832 después de 10 años de trabajo. János estudió las consecuencias que se derivan de negar el V Postulado, suponiendo que no existe ninguna paralela o que existe más de una. La primera hipótesis se pudo rechazar fácilmente, como lo había sido la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri; fue la segunda hipótesis la que condujo a Bólyai a una nueva e interesante Geometría derivada del ángulo agudo de Saccheri. Sin embargo, los puntos de vista de Bólyai y Saccheri son distintos por completo: cuando Saccheri se hallaba convencido de que encontraría una contradicción si llegaba suficientemente lejos en su estudio, Bólyai sabía que estaba desarrollando una nueva Geometría.

Este matemático húngaro escribió, en 1832, en un apéndice de 26 páginas los resultados de sus investigaciones sobre la nueva Geometría, y que junto a su padre publicaron en el trabajo titulado "Tentamen" en dos tomos, de ahí que el nombre con el cual pasó a la historia fuera Appendix. Luego que Bólyai obtuvo la Geometría No-Euclidiana, su padre escribió a Gauss con el objetivo de que el "Príncipe de las Matemáticas" diera su opinión con respecto al trabajo del hijo. Al conocer el trabajo del joven Bólyai, Gauss lo calificaría como "genio geométrico de primera magnitud" pero le respondió a Farkas que no podía dictaminar dicho trabajo puesto que eso equivaldría a alabarse él mismo.

Esto fue un golpe muy duro para János, en primer lugar porque no podía creer que Gauss hubiera tenido esas ideas antes que él y estimaba que éste quería arrancarle la prioridad de su descubrimiento. Ya a finales de su vida János sufrió una nueva decepción que le afectó mucho ya que el 17 de Octubre de 1841 recibió de su padre un folleto escrito por Lobatchevski en el cual se trataba la Geometría No-Euclidiana y que Lobatchevski había publicado en el año 1829, es decir, tres años antes que él.

A pesar que János Bólyai no pudo disfrutar de ser el primero en encontrar esta nueva Geometría, a la hora de hablar de las Geometrías No-Euclidianas, hay que dejar un espacio muy especial a su obra y el papel de éste en esta magistral teoría. Se han analizado los trabajos de F. Gauss y J. Bólyai creadores de la Geometría No-Euclidiana, sin embargo, el mérito de tal descubrimiento recae sobre Nikolai Ivanovich Lobatchevski (1793-1856), quien el 11(23) de Febrero del año 1826 en la reunión de la sección de ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Kazán expuso su obra con una conferencia y por primera vez informó de los resultados de sus investigaciones sobre la teoría de las paralelas, bajo el nombre de "*Exposición breve de los fundamentos de la Geometría con una demostración lógica del teorema de las paralelas*", este día se puede considerar como el certificado de nacimiento de las Geometrías No-Euclidianas.

Lobatchevski estudió Matemáticas en la Universidad de Kazán bajo la dirección del alemán J.M.C. Bartels (1769-1836), amigo y compatriota de Gauss, se licenció en 1813 y permaneció en la Universidad de Kazán primero como profesor auxiliar, después como profesor enseñando todas las ramas de la Matemática, la Física y la Astronomía . En 1815, se ocupa de la teoría de las paralelas, y en un manuscrito suyo relativo a las lecciones de 1815-1817, se encuentran tentativas por demostrar el V Postulado e investigaciones semejantes a Legendre. Pero sólo después de 1823 concibió la ya mencionada Geometría No-Euclidiana.

En 1829, editó su obra, en forma ampliada, bajo la denominación: "*Sobre los elementos de la Geometría*". En lo sucesivo Lobatchevski desarrolló una nueva Geometría, publicando una serie de trabajos, entre los que se encuentran: "*Geometría Imaginaria*" (1835), "*Aplicación de la Geometría Imaginaria a ciertas Integrales*" (1836), "*Nuevos Elementos de la Geometría con una Teoría Completa de las Paralelas*" (1834-1838), un pequeño libro, "*Investigaciones Geométricas*" (1840), "*Pangeometría*" (1855).

El punto de partida de las investigaciones de Lobatchevski sobre la Geometría fue el axioma de las paralelas de Euclides, que supuso no se cumplía, conservó los restantes postulados y sustituyó el axioma de las paralelas por su negación.

¿Cómo Lobatchevski se vio llevado a ocuparse de las paralelas y a descubrir la Geometría No-Euclidiana?

A pesar de que Lobatchevski fue instruido por Bartels, amigo de Gauss, y que pasó con este dos años en Brunswick antes de ser elegido para trabajar en Kazán (1807), no pudo haberle trasmitido a Lobatchevski algo positivo de los trabajos de Gauss sobre las paralelas, pues hasta 1807, Gauss no tenía aún clara la idea sobre la Geometría No-Euclidiana. Luego, se puede concluir que Lobatchevski creó su Geometría independientemente de cualquier influjo gaussiano.

Puede suponerse que Lobatchevski conocía las obras de Saccheri y Lambert, lo que le permitió recibir otros influjos, aunque esto es pura suposición y no existe nada que pueda probarlo. De todos modo, o la falta de demostraciones de sus predecesores, o la inutilidad de sus primeras investigaciones (1815-1817), indujeron a Lobatchevski, como antes a Gauss, a pensar en el desarrollo de una nueva teoría.

Lobatchevski expresa claramente esta idea en 1835 cuando escribe: *"La infructuosidad de las tentativas, hechos desde la época de Euclides por espacio de dos milenios despertó en mí la sospecha de que en los mismos datos no estuviese contenida la verdad que se había querido demostrar, y que para su conformación pudieran servir, como en el caso de otras leyes naturales, las experiencias, a ejemplo de las observaciones astronómicas...*" (Bonola, 1951, p. 97)

En síntesis, los resultados obtenidos por Lobatchevski pueden resumirse de la siguiente forma:

- El axioma de las paralelas no es una consecuencia de los restantes axiomas de la Geometría Euclidiana, o sea, es independiente de ellos.

- Al lado de la Geometría de Euclides donde sí se cumple el axioma de las paralelas, existe otra, la Geometría No-Euclidiana en la cual no se cumple.

La Geometría, en dependencia de que se utilice o no el axioma de las paralelas, se divide en dos partes: Aquella parte, donde se incluyen proposiciones que no se apoyan en el axioma, lleva el nombre de "*Geometría Absoluta*". Lobatchevski, el cual inicialmente se esforzó por dar la demostración del mencionado postulado, enseguida se convenció de la posibilidad de dividir la Geometría en absoluta y no absoluta y lo llevó a cabo. La Geometría de Lobatchevski en su parte absoluta no se diferencia en esencia de la Geometría de Euclides.

Lobatchevski desarrolló la Geometría No-Euclidiana hasta el nivel de la de Euclides, sin embargo, nunca pudo probar la consistencia lógica de su Geometría, es decir, no pudo probar la no contradicción de dicha Geometría. Él comprendió de manera profunda la relación entre la Geometría de Euclides y su "*Geometría Imaginaria*", ambas son lógicamente no contradictorias, ahora bien, el problema de cuál de estas Geometría corresponde más a las propiedades del espacio real, es algo que debe decidirse experimentalmente y Lobatchevski intentó verificar si nuestro espacio se rige por la Geometría No-Euclidiana. Ya se sabe que el dilema que oponía la Geometría de Euclides a la Geometría No-Euclidiana, es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual o menor que dos rectos. Él quería evaluar esa suma en el caso de un triángulo con lados suficientemente grandes, evaluó la suma de un triángulo cuyos vértices son la Tierra, el Sol y la estrella Sirio, y llegó a la conclusión de que esa suma difería de 2R menos de 0,000372.

No obstante, a todos los esfuerzos de Lobatchevski por probar la no-contradicción de su geometría, esta se resuelve después de su muerte y los primeros en hacerlo fueron Eugenio Beltrami y Félix Klein.

Sección 4: Sobre la No Contradicción de la Geometría de Lobatchevski

Un aspecto que ocupó a Lobatchevski toda su vida y que no pudo dar respuesta de manera categórica, fue el problema de la no contradicción de su Geometría, es decir, para establecer la no contradicción del sistema geométrico que había creado era necesario demostrar con el mayor rigor, que ningún desarrollo de este sistema podía conducir a una contradicción. De aquí, que sus adversarios mantenían que toda la Geometría de Lobatchevski era pura fantasía e indigna de la menor atención.

Los primeros en convertir la fantasía de la Geometría de Lobatchevski en realidad fueron Eugenio Beltrami (1835-1900) y Felix Klein (1849-1925). La solución de este problema se basa en la Geometría Interior de superficies, concepto introducido por Gauss en 1824, la cual se puede definir de la siguiente forma: "*Es la parte de la Geometría que se ocupa de aquellas propiedades de superficies y figuras sobre las mismas que dependen solamente de las longitudes de las curvas sobre la superficie.*"

Beltrami en su estudio demostró que existe en el plano de Lobatchevski una métrica determinada por cierta forma diferencial cuadrática y con dicha métrica es posible hacer la medición de las magnitudes de las líneas sobre el plano de Lobatchevski. Y logró determinar las fórmulas para encontrar el ángulo entre dos líneas y el área de una región sobre el plano de Lobatchevski, donde sus formas son análogas a las del plano euclidiano pero en coordenadas beltramianas. Fue entonces donde Beltrami planteó en su obra "*Experiencia de la interpretación de la Geometría No-Euclidiana*" (1868), los dos problemas siguientes:

1. Hallar una superficie, para cada punto de la cual existe un entorno isométrico respecto a cierto dominio del plano de Lobatchevski. Es decir, que

exista la superficie y se verifique la Geometría del plano de Lobatchevski de forma ”local” sobre esta superficie.

2. Hallar una superficie que admita su aplicación isométrica sobre todo el plano de Lobatchevski. Es decir, que exista la superficie y se verifique toda la Geometría del plano de Lobatchevski sobre esta superficie.

La solución del segundo problema conduciría directamente a la consistencia lógica del sistema no euclidiano bidimensional. Beltrami resolvió el primero, pero al segundo no pudo darle respuesta. Más tarde, Hilbert demostró en el año 1901, que en el espacio de Euclides no existe una superficie que tenga la propiedad requerida, es decir, no existe superficie analítica de curvatura constante negativa que no tenga singularidades en ninguna parte y que sea en todas partes regular. Por esto, llevar a cabo una interpretación del tipo Beltrami en todo el plano de Lobatchevski es imposible. Del trabajo hecho por Beltrami se pudo concluir que:

- Cualesquiera que sean dos superficies de una misma curvatura constante, cada porción suficientemente pequeña de cualquiera de ellas puede ser aplicada isométricamente, sobre cierta porción de la otra.

- Dos superficies de curvatura constante igual localmente, tienen Geometría Interior igual.

A pesar que Beltrami no resolvió el segundo problema sus investigaciones revistieron una gran importancia de principio. Primero, una realización parcial de la planimetría de Lobatchevski en el espacio euclidiano cambió la actitud escéptica de los geómetras ante las obras de Lobatchevski. Por lo tanto, sus investigaciones jugaron un papel importante en el desarrollo general de la ciencia. Segundo, gracias a sus estudios, la planimetría de Euclides, la Geometría de Lobatchevski y la Geometría de Riemann resultaron unidas en un esquema geométrico diferencial general. Todos estos sistemas geométricos se realizan sobre una superficie de curvatura constante k y corresponden a los casos k=0, k¡0 y k¿0. Es importante comprender que una pequeña variación alrededor de 0 de la cantidad k hace pasar de un espacio esférico a un espacio euclidiano o de Lobatchevski, es decir, de un espacio en el que dos rectas no son jamás paralelas, a uno donde se pueden trazar por un punto una infinidad de paralelas a una recta dada.

La siguiente interpretación de la Geometría No-Euclidiana que realizara en el año 1871 F. Klein en el trabajo “*Sobre la llamada Geometría No-Euclidiana*” se basa en la definición de medida proyectiva en el plano, introducida por Cayley en el año 1859 en la obra “*Sexta Memoria sobre las Formas*”; además, Klein se basó en el concepto de grupo que él introdujo en la Geometría; sus nuevos puntos de vistas sobre las Geometrías los expuso en el famoso Programa de

Erlangen, este discurso jugó un papel capital en la génesis de las ideas sobre la esencia de la Geometría, principalmente para dilucidar el lugar que ocupa la Geometría de Lobatchevski.

Las ideas de Klein se basaron en el conjunto de los desplazamientos del espacio que constituyen un grupo de aplicaciones. Su concepción estuvo basada en la Geometría Métrica que permite desplazamientos tales que cada punto puede llevarse en coincidencia con cualquier otro punto; en este caso el grupo de desplazamientos de esa Geometría se dice que es transitivo. En otras palabras, el conjunto de aplicaciones que forma este grupo conserva la distancia entre los puntos.

Por otra parte, Sophus Lie mostró que no puede haber más que tres sistemas de Geometría Métrica fundados sobre el desplazamiento, es decir, la Geometría de Euclides, la Geometría de Lobatchevski y la Geometría de Riemann.

Klein y Lie basados en la Geometría Proyectiva construyeron un modelo para la Geometría No-Euclidiana y para el cual se tomó el círculo fundamental. En este modelo se verifica en forma absolutamente irreprochable la Geometría Hiperbólica para dos dimensiones. La aplicación del espacio hiperbólico en el interior de la esfera euclidiana se hace de manera análoga. Toda contradicción en la Geometría Hiperbólica, si se llegase a descubrir, significaría que existe otra análoga a la Geometría Euclidiana. Luego la Geometría Hiperbólica es lógicamente verdadera como la Geometría Euclidiana.

El modelo de Klein, resultó la demostración completa, largamente esperada de la no contradicción de la Geometría de Lobatchevski y la existencia para ella de un sentido real.

Lobatchevski con este descubrimiento aportó nuevas ideas en el desarrollo de la Geometría, sus méritos van mucho más allá del hecho de que haya arrancado el velo del misterio milenario del axioma del paralelismo; con su análisis crítico del axioma de las paralelas, dio comienzo a la revisión de algunas posiciones iniciales del sistema de Euclides, hecho que condujo posteriormente a la elaboración de principios rigurosamente científicos de construcción axiomática de la Geometría y otras ciencias matemáticas.

Dicha Geometría encontró aplicación directa, en la teoría de las integrales definidas, donde Lobatchevski halló más de 200 fórmulas nuevas para el cálculo de las mismas. Sin su descubrimiento, no hubiera sido posible desarrollar la teoría de la relatividad, uno de los mayores alcances de la Física contemporánea. Partiendo de sus investigaciones se construyó una teoría que permite efectuar el cálculo de los procesos que transcurren en el interior del núcleo atómico.

Con su descubrimiento, retornó la Geometría a las posiciones del materialismo ya que antes y durante muchos siglos reinó en la Geometría el punto de vista idealista que remontaba a Platón, negando la procedencia experimental de los axiomas. En sus obras expresó de forma explícita sus posiciones materialistas, por ejemplo, en su obra "*Sobre los Elementos de la Geometría*" (1929), expresó: "*Los conceptos primarios deben ser claros y reducidos a la mínima cantidad. Sólo entonces estos pueden proporcionar una base sólida y suficiente para la teoría. Tales conceptos se adquieren por medio de los sentidos, los conceptos innatos son inaceptables*".

De esta forma rechazaba la tesis Kantiana de que nuestras representaciones espaciales son innatas y no tienen un origen empírico. Con su descubrimiento hizo un gran aporte a la elaboración de las nociones científicas referentes al nexo del espacio y el tiempo con la materia en movimiento. Lobatchevski demostró que las propiedades del espacio no son inmutables, iguales siempre y en todas partes, sino que cambian en dependencia de las propiedades de la materia y de los procesos físicos que tienen lugar en los cuerpos materiales (Konstantinov et al., 1978).

Antes de su Geometría se consideraba a la Geometría de Euclides la única teoría imaginable del espacio, su descubrimiento destruyó este punto de vista. Esto marcó el comienzo de profundas generalizaciones de los enfoques de la Geometría y su finalidad, que condujeron al concepto moderno de espacio abstracto con sus múltiples aplicaciones en la propia Matemática y en disciplinas afines.

Precisamente B. Riemann (1826 – 1866), en 1854, cuando fue nombrado encargado de un curso de la Universidad de Göttingen, dio, según de costumbre, una lección inaugural en la reunión general de la Facultad de Matemática. Como lo ordenaba el reglamento, sometió tres temas a la Facultad, de los cuales Gauss escogió el tercero, titulado "*Hipótesis que sirven de fundamento a la Geometría*". En el trabajo definió espacios que generalizan tanto el euclidiano, como el de Lobatchevski, así como también el espacio correspondiente a su Geometría. Estos espacios generales de Riemann se diferencian del de Euclides en el mismo grado que una superficie curva arbitraria se diferencia del plano.

Para construir su Geometría Riemann tuvo que modificar el sistema de axiomas de Euclides y proponer la negación del V Postulado de modo que por un punto exterior a una recta no pasan paralelas. El método analítico que utilizó Riemann para enfocar los problemas geométricos, le permitió generalizar el concepto de curvatura de una vez al caso multidimensional. La idea esencial de Riemann es que la Geometría no constituye de ninguna manera un patrimonio exclusivo de un conjunto de dos dimensiones (de una superficie) o de tres dimensiones (de un espacio). Se puede construir una Geometría de rectas, de círculos, de esferas, pero se puede ir mucho más lejos y construir una Geometría de un conjunto de colores, de un enjambre de partículas materiales, etc.

De esta forma se está en presencia de dos Geometrías antagónicas de las cuales una afirma la existencia de paralelas a una recta por un punto exterior y la otra niega dicha existencia. Sin embargo, se produce la síntesis dialéctica que, superando y conservando a la vez esos dos aspectos de la realidad geométrica, se llegó a una concepción nueva del espacio. Riemann con la introducción de una nueva concepción infinitesimal de la Geometría, permitió un desarrollo dialéctico de la noción de espacio, que es una verdadera síntesis dialéctica de dos nociones contradictorias.

Desde el punto de vista de Riemann se comprende que la cuestión de la no contradicción de las Geometrías No-Euclidianas no tiene sentido especial, siendo las reglas de cálculo las mismas si k es positivo, negativo o nulo, los tres espacios son contradictorios y no lo son a la vez. Pero estos tres tipos de espacios con k constante conservan el carácter general de homogeneidad del espacio euclidiano. Las Geometrías de esos espacios continúan siendo Geometría en el sentido de Klein, es decir, en el sentido de la teoría de grupos (Casanova, 1965). De manera que 80 años después del nacimiento de Lobatchevski, la no contradicción de la Geometría que él había creado prácticamente no se ponía en duda. El problema que le había ocupado toda su vida se encontraba del todo resuelto.

La aceptación de las Geometrías No-Euclidianas conllevaron ante todo a consideraciones metafísicas. Por ejemplo, F. Lange y O.Libman, seguidores de Kant, planteaban que las Geometrías No-Euclidiana eran una Geometría del mundo "en sí" y la euclidiana representaba la Geometría de las percepciones sensoriales, la Geometría del mundo "para nosotros".

El matemático inglés W.K.Clifford (1845-1879), planteaba que la Geometría del mundo real era No-Euclidiana y todo lo que ocurre en el mundo puede ser comprendido como determinada variación con la curvatura del espacio en una u otra de sus partes.

Gauss, Lobatchevski, Bólyai se pronunciaron contra las gnoseología apriorística y se apoyaron en la procedencia experimental de los conceptos geométricos. Con estas posiciones se pronunciaron más tarde Riemann, Helmholzt, Boltzman y Klein. Boltzman y Klein tomaron posiciones empiristas, pero su análisis era más subjetivo, haciendo énfasis en el lado psicológico. Sin embargo, los científicos de posiciones empiristas que trataron de justificar la existencia de las Geometría No-Euclidianas, relacionándolas con la experiencia, no obtuvieron resultados positivos.

De esta forma las posiciones neokantianas tomaron fuerza hasta inicio del siglo XX. El objetivo de estos fue compatibilizar los hechos de las Geometrías No-Euclidianas con la filosofía matemática de Kant. Entre los neokantianos se pueden citar a G. Cohen, A. Krautze, B. Russell, L. Nelson, P. Natorp y E. Cassirer. Los argumentos de los neokantianos pueden ser reducidos a las siguientes afirmaciones (Sánchez, 1987):

1. A Kant no se le debe ver en antagonismo con las Geometrías No-Euclidianas sino al contrario como una de sus antecesores teóricos, quien por primera vez formuló la misma idea de las Geometrías Superiores no coincidentes con la Geometría Euclidiana.

2. Las afirmaciones de Kant sobre la posibilidad de otros espacios y otras

formas de concepciones sensoriales no son casuales, ellas son el producto necesario de los principios de la filosofía.

3. Las Geometrías No-Euclidianas y la Euclidiana son equitativas desde el punto de vista matemático para la descripción de diferentes relaciones objetivas pero no desde el punto de vista psicológico, no se pueden construir nuevas concepciones intuitivas del espacio.

4. Los empiristas ignoran el hecho de que las teorías matemáticas no se demuestran y no se niegan en el experimento.

5. La posición empirista es contradictoria desde el punto de vista lógico.

En el momento actual está claro que los intentos neokantistas no podían ser exitosos. Pero a fines del siglo XIX la posición neokantiana parecía completamente válida. Los argumentos de los empiristas, aunque tuvieron aceptación dentro de los científicos, de ninguna forma pudieron ser suficientes para la guerra con ellos en la esfera teórica.

Otra tendencia fue la Convencionalista, desarrollada por Henri Poincaré (1854-1912), donde la experiencia juega un papel importante pero en última instancia lo que determina la veracidad es la sencillez y la comodidad. Esta posición de Poincaré, es idealista y no puede dar explicación a la existencia de las Geometrías No-Euclidianas. No obstante, gracias a las ideas de Poincaré se tomó una dirección más correcta que la de los empiristas y neokantistas. La idea fundamental necesaria para la comprensión contemporánea de la matemática, surge en el contexto de los trabajos de Dedekind, Cantor y Hilbert, los cuales se esforzaron por fundamentar la Geometría y las otras ciencias matemáticas partiendo de presupuestos lógicos (concepciones estructuralistas y formalistas).

Conclusiones

Resulta atinado plantear que aunque las Geometrías No Euclidianas han sido disminuidas en la contemporaneidad, en lo fundamental, por cuestiones Matemáticas teóricas asociadas a aspectos analítico-algebraicos, su surgimiento no sólo asombró a los contemporáneos, sino a las siguientes generaciones, a unos por lo excepcionalmente inesperado de los resultados y a otros por el profundo entusiasmo y sacrificio dedicado a la investigación incesante y el grado de independencia y audacia en el pensamiento creador.

Desde el punto de vista científico la visión de una nueva Geometría, permitió el avance revolucionario de la ciencia y especialmente de la Física del siglo XX. Así lo expresó Albert Einstein en su famoso discurso "*La Geometría y la Experiencia*" pronunciado en 1921 en la Academia de Berlín, cuando expresó: "*yo concedo importancia particular a esta compresión de la Geometría por cuanto* *sin ella yo ni hubiera podido establecer la teoría de la relatividad*". Desde el punto de vista metodológico, los axiomas dejaron de ser resultados evidentes que no necesitan demostración, para convertirse en aquellas proposiciones de la teoría, las cuales en una construcción determinada de la misma, se toman como punto de partida, independientemente de que sean simples, evidentes o intuitivamente claros para todos.

El surgimiento de las Geometrías No-Euclidianas, ratificó que contra los demoledores golpes de las profundas revoluciones, que sin piedad derrumban las "inexpugnables fortalezas" de las tradiciones, siempre se alzan "los gritos de los Beocianos", se alzan los timoratos, los que temen perder su acomodaticia posición. Pero es que las revoluciones también en la ciencia como en la sociedad, nada ni nadie las puede impedir (Sánchez, 1985). Desde el punto de vista filosófico, las Geometrías No-Euclidianas adquieren el mayor significado, pues su surgimiento favoreció el desarrollo de una de las más profundas revoluciones en las concepciones sobre los problemas filosóficos de la Matemática, en las representaciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

Es importante resaltar que las confirmaciones experimentales de la teoría general de la relatividad han demostrado que el espacio real tiene estructura Riemanniana y que la métrica euclidiana del espacio sólo se manifiesta en situaciones restringidas, donde las Geometrías Euclidiana y No-Euclidianas coinciden.

Bibliografía

BLUMENTHAL, L (1975): Geometría Axiomática. Ediciones Madrid S.A. España.

BONOLA, R. (1951): Geometrías No-Euclidianas. Espasa-Calpe Argentina S.A. Buenos Aires.

CASANOVA, G. (1965): La Matemática y el Materialismo Dialéctico. Editorial del Consejo Nacional de Universidades, La Habana.

EFÍMOV, N.V. (1984): Geometría Superior. Editorial Mir. Moscú.

ESTRADA, M. (1995): Surgimiento de la Geometría de Lobatchevski. Trabajo Final de Historia de la Matemática. Maestría en Didáctica de la Matemática. ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

FLORES, A. Y R. REGUERA. (1978): Geometría. Selección de Temas. Libros para la Educación. Ciudad de la Habana.

KAGAN, V. (1984): Lobatchevski. Editorial Científico Técnica. Ciudad de la Habana.

KONSTANTINOV, F. et al. (1978): Fundamentos de Filosofía Marxista Leninista (Parte 1). Materialismo Dialéctico. Editorial de Cirencias Sociales, La Habana.

RIVNÍKOV, K. (1987): Historia de las Matemáticas. Editorial Mir. Moscú.

SÁNCHEZ, C. (1987): Conferencias sobre Problemas Filosóficos y Metodológicos de la Matemática. Facultad de Superación en Ciencias Naturales. Universidad de la Habana. Ciudad de la Habana.
SÁNCHEZ, C. (1985): Discurso a la Memoria de un Genio Revolucionario: János Bólyai. En: Boletín de la SCM. Ciudad de la Habana.
SIGARRETA, J. M. (2003). Evolución de la resolución de problemas desde una perspectiva Didáctica. En Revista de Didáctica de la Matemática. México.
SMOGORZHEVSKI, A.S. (1978): Acerca de la Geometría de Lobatchevski. Editorial Mir. Moscú.
TURNBULL, H.W. (1984): Grandes Matemáticos. Editorial Científico Técnica. Ciudad de la Habana.
WUSSING, H. (1989): Conferencias sobre Historia de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

C. J. M. Sigarreta Almira & P. Ruesga Ramos
Departamento de Matemática
Universidad de Moa
Cuba