Polinomios positivos y desigualdades polinomiales*

Carlos Andradas

1. Introducción

Consideremos un polinomio en una variable $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Todos explicamos en nuestras clases que $f(x)$ factoriza de la forma

$$f(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_r)^{m_r}((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{\ell_1} \cdots ((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2)^{\ell_s}$$

donde $a_1, \ldots, a_r$ son las raíces reales de f y los factores cuadráticos corresponden a los pares de raíces complejas conjugadas $\alpha_k \pm i\beta_k$.

Supongamos ahora que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces todos los exponentes m_j tienen que ser pares pues si no $f(x)$ cambiaría signo en a_j y por consiguiente $f(x)$ es una suma de cuadrados de polinomios. Además, gracias a la bien conocida identidad

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

resulta que los productos de sumas de dos cuadrados es, a su vez, una suma de dos cuadrados por lo que obtenemos que $f(x)$ es suma de dos cuadrados de polinomios. En particular, concluimos que toda suma de cuadrados de polinomios en una variable puede escribirse como suma de (a lo más) DOS cuadrados. Denotaremos esto diciendo que el número de Pitágoras de $\mathbb{R}[x]$ es ≤ 2. Por otra parte, $1 + x^2$ es un ejemplo de una suma de dos cuadrados que no es un cuadrado, con lo que la cota anterior es inmejorable.

Pasemos al caso de dos variables. Hilbert ya observó (por razonamientos teóricos y geométricos, utilizando propiedades clásicas de las cúbicas, pero sin exhibir ningún ejemplo concreto) que hay polinomios no negativos sobre todo el plano afín $\mathbb{R}^2$ que no son sumas de cuadrados.

Robinson puso ecuaciones al razonamiento de Hilbert produciendo el primer ejemplo concreto de un polinomio en dos variables, no negativo sobre todo el plano afín, pero que no es suma de cuadrados de polinomios. Unos años más tarde Motzkin (1967) dió el siguiente sencillo (y simétrico) ejemplo:

$$M(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

*Charla inaugural de la XIX Escuela Venezolana de Matemáticas.

¿Por qué es $M(x,y) \geq 0$? En este caso hay un fácil truco para observarlo: la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética aplicada a la terna $1, x^2y^4, x^4y^2$ nos proporciona

$$\frac{x^2y^4 + x^4y^2 + 1}{3} \geq ((x^2y^4)(x^4y^2))^{1/3} = x^2y^2$$

¿Por qué $M(x,y)$ no es suma de cuadrados? Aquí no hay más remedio que hacer algunas cuentas: pongamos

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 = g_1(x,y)^2 + \cdots + g_t(x,y)^2 \qquad (1)$$

En primer lugar los g_i deben tener grado ≤ 3. Haciendo $x = 0$ resulta

$$1 = g_1(0,y)^2 + \cdots + g_t(0,y)^2$$

de donde resulta que los $g_i(0,y)$ son constantes, esto es,

$$g_i(x,y) = xh_i(x,y) + c_i$$

con

$$c_1^2 + \cdots + c_t^2 = 1$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y haciendo $y = 0$ obtenemos

$$1 = (xh_1(x,0) + c_1)^2 + \cdots + (xh_t(x,0) + c_t)^2$$

con lo que $h_i(x,0) = 0$, es decir,

$$h_i(x,y) = yb_i(x,y).$$

En definitiva,

$$g_i(x,y) = xy\, b_i(x,y) + c_i$$

(como era esperable por razones de simetría), y además, por razones de grado, $b_i(x,y)$ es de grado 1. Sustituyendo de nuevo en la ecuación (1) tenemos:

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 = x^2y^2 \sum_i b_i^2 + 2xy \sum_i b_i c_i + \sum_i c_i^2$$

Simplificando $1 = \sum_i c_i^2$ resulta que x^2y^2 divide a la expresión de la izquierda y el primer sumando de la derecha, luego xy debe dividir a $\sum_i b_i(x,y)\, c_i$ que, como hemos señalado, es un polinomio de grado 1, por lo que $\sum_i b_i(x,y)\, c_i = 0$. Pero entonces, volviendo a la ecuación anterior y dividiendo por x^2y^2 obtenemos que

$$x^2 + y^2 - 3 = \sum b_i(x,y)^2$$

lo que es claramente absurdo sin más que evaluar en 0.

Tras estas pequeñas cuentas puede ser el momento de señalar dos cuestiones. Denotemos por $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$ el conjunto de polinomios no negativos sobre $\mathbb{R}^2$ y por $\Sigma_{\mathbb{R}^2}$ el de sumas de cuadrados de polinomios en dos variables (omitiremos el subíndice cuando no haya duda de en qué espacio estamos trabajando).

Problema 1.1. *Decidir si un polinomio $f(x,y)$ es no negativo sobre $\mathbb{R}^2$ (es decir está en $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$).*

Problema 1.2. *Decidir si $f(x,y)$ es una suma de cuadrados de polinomios (esto es, f está en Σ).*

Aunque ambos problemas puedan parecer de dificultad similar, existen diferencias entre ellos: Dado un polinomio $f(x,y)$ que sea suma de cuadrados, su grado debe ser par, digamos $2d$, por lo que el grado de los posibles sumandos es menor igual que d y el número de sumandos necesarios puede también acotarse en función de d (puede comprobarse que es menor o igual que $\binom{d+2}{2}$, esto es, la dimensión del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que d). Por tanto el problema puede plantearse como la resolución sobre los números reales de un sistema (algebraico) de $\binom{d+2}{2}$ ecuaciones (de grado ≤ 2) en $\binom{d+2}{2}^2$ variables. La resolución de sistemas algebraicos ha experimentado grandes avances recientemente (gracias por ejemplo a algoritmos eficaces de cálculo de las bases de Gröbner).

El primer problema también es teóricamente decidible: se trata de decidir si el conjunto $\{f(x) < 0\}$ es vacío. El método de eliminación de cuantificadores de Tarski nos dice que esto es posible, pero no existen por el momento métodos eficaces para ello.

¡Atención! Obsérvese que la cota $\binom{d+2}{2}$ del número de cuadrados mencionada en el párrafo anterior, es para polinomios de grado fijo $2d$ y no debe confundirse con el número de Pitágoras de $\mathbb{R}[x,y]$, esto es, con el número de cuadrados necesario para expresar cualquier polinomio que sea suma de cuadrados, independiente del grado. Podemos plantearnos un tercer problema, sobre el que volveremos más tarde:

Problema 1.3. *¿Es finito el número de Pitágoras de $\mathbb{R}[x,y]$?*

En [7] se muestra que la colección de polinomios:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(x,y) & = & 1 \\
f_2(x,y) & = & \Delta_1^2 f_1 + 1 = \Delta_1^2 + 1 \\
f_3(x,y) & = & \Delta_2^2 f_2 + 1 = \Delta_2^2\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 1 \\
f_4(x,y) & = & \Delta_4^2 f_3 + 1 = \Delta_4^2\Delta_2^2\Delta_1^2 + \Delta_4^2\Delta_2^2 + \Delta_4^2 + 1 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1(x,y) & = & y \\ \Delta_2(x,y) & = & y(y-2x) \\ \Delta_3(x,y) & = & y(y-2x)(y-3x) \\ \Delta_4(x,y) & = & y(y-2x)(y-3x)(y-4x) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

son todos sumas de cuadrados pero que el número de cuadrados necesarios para representar f_n es exactamente n, por lo que el número de Pitágoras del anillo $\mathbb{R}[x,y]$ es infinito. Vemos pues que el cambio de situación al pasar de 1 a 2 variables ha sido drástico.

Volvamos a nuestros conjuntos $\mathcal{P}$ y Σ de polinomios no negativos y sumas de cuadrados respectivamente. Ambos son conos convexos en el espacio vectorial $\mathbb{R}[x,y]$ (quizás sería más correcto decir semi-conos ya que naturalmente sólo contienen a las semirrectas correspondientes al producto por escalares positivos) y, claramente, Σ *está estrictamente contenido en* $\mathcal{P}$, a la vista del ejemplo anterior ($M(x,y)$ está en $\mathcal{P}$ pero no en Σ). Surge así otro interesante:

Problema 1.4. *¿Cómo es de grande la diferencia entre $\mathcal{P}$ y Σ?*

Para precisar un poco más esta cuestión denotemos por $\mathcal{P}_d$ el conjunto de polinomios no negativos de grado menor o igual que $2d$ y por Σ_d el conjunto de las sumas de cuadrados de polinomios de grado menor o igual que d. Ambos conjuntos son conos convexos en un espacio afín de dimensión finita: el de todos los monomios de grado menor o igual que $2d$ en las variables. G. Blehkerman, [Bl], ha comparado los volúmenes de estos dos conos, demostrando el siguiente resultado que prueba que hay muchos más polinomios no negativos que sumas de cuadrados. En particular esta diferencia se va agrandando con el grado y el número de variables:

Teorema 1.5. *Existe una constante $c(d)$ que depende sólo del grado d tal que*

$$\left(\frac{Vol\,\mathcal{P}_d}{Vol\,\Sigma_d}\right)^{\frac{1}{r}} \geq c(d)n^{(d-1)/2}$$

donde r es la dimensión de un determinado hiperplano de formas en el espacio de polinomios de grado $2d$ en n variables.

2. El problema 17 de Hilbert

Volvamos a Hilbert. Ya hemos comentado que él probó que $\mathcal{P}$ y Σ son, en general, distintos. En 1900 en su famosa lista de problemas en el ICM de París enunció su problema número 17:

Problema 17 de Hilbert: *¿Es todo polinomio no negativo sobre $\mathbb{R}^n$ una suma de cuadrados de funciones racionales (i.e. fracciones de polinomios)? En otras palabras, si $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ es ≥ 0 sobre todo $\mathbb{R}^n$, ¿existen polinomios $g_0, g_1, \ldots, g_t$ tales que $g_0^2 f = g_1^2 + \cdots + g_t^2$?*

La pregunta de Hilbert fue respondida por E. Artin en 1929 por medio de la teoría conocida hoy como de Artin-Schreier. Su idea esencial es el estudio y comprensión de las distintas formas de "ordenar" el anillo de los polinomios (o más exactamente su cuerpo de fracciones). Por una parte, las sumas de cuadrados son los elementos totalmente positivos, es decir, aquellos que son positivos en todos los órdenes posibles. Por otra parte, la posibilidad de definir un orden debe traducirse de alguna forma en términos geométricos.

Dar un orden en el anillo de polinomios (o cualquier otro anillo) consiste en fijar un criterio para comparar cuando un polinomio es mayor que otro, o equivalentemente, en definir cuando un polinomio es mayor que 0, esto es, cuando es positivo en ese orden. Por supuesto nos referimos siempre a órdenes compatibles con la estructura de cuerpo, es decir, que la suma y el producto de positivos debe ser positivo.

Intuitivamente hay un modo muy fácil de definir órdenes en los polinomios: basta fijar un punto y decir que un polinomio es positivo si es mayor que cero en una "región" determinada adyacente a dicho punto. (Siendo un poco más precisos: si es positivo en algún elemento de un filtro de conjuntos, de dimensión máxima, adherentes al punto. Para el caso de dimensión 1, para cada punto sólo existen dos tales filtros–y por consiguiente dos órdenes centrados en dicho punto–los intervalos $(a - \varepsilon, a)$ y $(a, a + \varepsilon)$).

La idea genial de Artin fue demostrar que a pesar de los muchos órdenes existentes en el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios, la información fundamental está contenida en el tipo de órdenes mencionado y que puede rescatarse por tanto mediante la evaluación en los puntos del espacio afín:

Teorema 2.1 (Artin). *Existe un orden en $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ en el que los polinomios $f_1, \ldots, f_r$ son simultáneamente positivos si y sólo si hay un punto $x \in \mathbb{R}^n$ en el que dichos polinomios son simultáneamente positivos, es decir, si y sólo si el conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) > 0, \ldots, f_r(x) > 0\}$$

es no vacío.

Una vez conocida la respuesta afirmativa a la pregunta de Hilbert surge la pregunta cuantitativa acerca del número de cuadrados necesario. Recordemos que dado un cuerpo K llamamos número de Pitágoras de K al mínimo p tal que toda suma de cuadrados en K puede reducirse a una suma de $\leq p$ cuadrados.

Problema 17 cuantitativo (número de Pitágoras): *¿Cuántos cuadrados son necesarios? En otras palabras, ¿cual es el número de Pitágoras del cuerpo de fracciones del anillo de polinomios en n indeterminadas?*

El problema cuantitativo fue resuelto mucho más tarde por A. Pfister [10] por medio de la teoría de formas cuadráticas (y en particular de las formas que llevan su nombre). Demostró que, si representamos por p_n el número de Pitágoras del cuerpo de funciones racionales en n variables, entonces

$$n+1 \leq p_n \leq 2^n.$$

Sin embargo, a día de hoy no se sabe si estas cotas son óptimas, por lo que terminamos esta sección con el siguiente problema abierto:

Problema 2.2. *Probar si las cotas anteriores de p_n son óptimas.*

3. Conjuntos semialgebraicos: una pequeña digresión

A partir del espectacular resultado de Artin, y más tarde del Teorema de Tarski sobre eliminación de cuantificadores para cuerpos real cerrados, el estudio de los subconjuntos del espacio afín $\mathbb{R}^n$ definidos por desigualdades polinomiales experimentó un notable desarrollo. Estos conjuntos reciben el nombre de semialgebraicos. Más precisamente, un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es *semialgebraico* si es una combinación booleana de desigualdades polinomiales, es decir si puede describirse en la forma:

$$S = \bigcup_{i=1}^{t} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, g_{i1} > 0, \ldots, g_{is_i} > 0\}$$

con $f_i, g_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Los conjuntos semialgebraicos tienen buenas propiedades:

1. Son cerrados por combinaciones booleanas (uniones e intersecciones finitas y complementario).
2. Son cerrados por productos: Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ son semialgebraicos entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es semialgebraico.
3. Son cerrados por proyecciones (Teorema de Tarski-Seidemberg).
4. Los semialgebraicos de la recta son las uniones finitas de intervalos.

Hay una muy abundante literatura sobre las propiedades topológicas de los conjuntos semialgebraicos, [3], [6]. Por ejemplo, los conjuntos semialgebraicos son triangulables, tienen una estructura local sencilla y un comportamiento esencialmente finito, es decir, fijado el grado de los polinomios que los describen pueden encontrarse cotas del número de tipos topológicos posibles, del número de componentes conexas que pueden tener, etc. De hecho, las 4 propiedades definitorias señaladas antes se toman como definición de las llamadas estructuras **o-minimales**, cuyo ejemplo más sencillo son los conjuntos semialgebriacos, y que comparten un buen número de las propiedades de los mismos.

También tienen curiosas propiedades combinatorias, entre las que citaremos sólo una a título de ejemplo: cualquier intersección de desigualdades polinomiales estrictas en $\mathbb{R}^n$ es equivalente a ... **¡una intersección con sólo** n **desigualdades!** Es decir, por muy grande que sea el número r tenemos que

$$\{g_1 > 0, \ldots, g_r > 0\} = \{f_1 > 0, \ldots, f_n > 0\}$$

para ciertos polinomios f_i. En concreto, en el plano $\mathbb{R}^2$, cualquier intersección arbitraria de desigualdades estrictas puede describirse mediante sólo dos desigualdades.

Problema 3.1. *Encontrar algoritmos para construir esta representación corta a partir de la dada.*

Del mismo modo, cualquier intersección de desigualdades polinomiales laxas en $\mathbb{R}^n$ es equivalente a una intersección de un número de desigualdades que depende sólo de n, en este caso $n(n+1)/2$. Es decir, por muy grande que sea el número r tenemos que

$$\{g_1 \geq 0, \ldots, g_r \geq 0\} = \{f_1 \geq 0, \ldots, f_n \geq 0\}$$

para ciertos polinomios f_i. Como en el caso de las desigualdades estrictas, esta cota es óptima. Sin embargo, es muy plausible que para determinadas clases "regulares" de semialgebraicos (los polihedros por ejemplo) la cota en el caso laxo coincida también con n, pero este problema está aun abierto.

4. Positivstellensätze

En la Sección 2 tratamos los polinomios que son no negativos sobre todo el espacio afín $\mathbb{R}^n$ y vimos que pueden ser escritos como suma de cuadrados de funciones racionales. ¿Qué podemos decir del "aspecto" de los polinomios $f \in \mathbb{R}[x]$ que son positivos sobre un conjunto semialgebraico $S = \{g_1 \geq 0, \ldots, g_r \geq 0\}$?

Comencemos analizando un sencillo ejemplo:

Ejemplo: Sea $f(x)$ un polinomio en una variable y supongamos que es positivo en la semirrecta $S = \{x \geq 0\}$. Descomponemos f como al principio

$$f(x) = (x + a_1)^{m_1} \cdots (x + a_k)^{m_k} \cdot \ (x - a_{k+1})^{m_{k+1}} \cdots (x - a_r)^{m_r} \cdot \\ ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{\ell_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{\ell_s}$$

donde ahora $a_1 > 0, \ldots, a_r > 0$, de modo que las k primeras raíces reales de f son negativas y las restantes positivas. Como $f(x)$ es no negativo en todo

$\{x \geq 0\}$, resulta que los exponentes $m_{k+1}, \ldots, m_r$ deben ser pares; además, para $i \leq k$, descomponiendo los m_i que sean impares como

$$(x + a_i)(x + a_i)^{2\nu_i} = x(x + a_i)^{2\nu_i} + a_i(x + a_i)^{2\nu_i}$$

resulta que

$$f = x \sum_j h_j^2 + \sum_k g_k^2$$

es decir se puede escribir como una combinación de los polinomios que describen S con coeficientes sumas de cuadrados. Con un razonamiento similar, pero un poco más de esfuerzo, puede comprobarse que si f es positivo en el intervalo $\{x \geq 0, 1 - x \geq 0\}$ entonces puede escribirse de la forma

$$f = s_0 + xs_1 + (1 - x)s_2 + x(1 - x)s_3$$

donde los s_i son sumas de cuadrados de polinomios.

Volviendo al planteamiento general, consideremos el conjunto

$$\Sigma_S = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)} s_\varepsilon\, g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_r^{\varepsilon_r}.$$

Observemos que todos sus elementos son polinomios no negativos sobre S. Este conjunto va a jugar el papel de "cono de sumas de cuadrados" sobre S.

Denotemos por $\mathcal{P}_S$ el conjunto de polinomios no negativos sobre S.

Tomando $S = \mathbb{R}^2 = \{1 \geq 0\}$ recuperamos $\Sigma_S = \Sigma$ y $\mathcal{P}_S = \mathcal{P}$ como en la Sección 1, y el ejemplo de Motzkin muestra que en general $\mathcal{P}_S$ es estrictamente más grande que Σ_S. ¿Existe un análogo al problema 17 de Hilbert?

Teorema 4.1. *(PositiveStellensätz, [13]) a) f es no negativo ($f \geq 0$) sobre S si y sólo si existen $t_1, t_2 \in \Sigma_S$, $N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$ft_1 = f^{2N} + t_2$$

b) f es positivo ($f > 0$) sobre S si y sólo si existen $t_1, t_2 \in \Sigma_S$ tales que

$$f(1 + t_1) = 1 + t_2$$

Es decir, f es de nuevo suma de cuadrados sobre S, si admitimos denominadores.

Problema 4.2. *Decidir si un polinomio $f(x, y)$ es no negativo sobre S (es decir si está en $\mathcal{P}_S$).*

Problema 4.3. *Decidir si $f(x, y)$ está en Σ_S.*

Estos problemas son más difíciles que en el caso del espacio afín, ya que la introducción de los polinomios g_j que definen S en la ecuación impide, por ejemplo, cualquier consideración sobre grados.

5. Teorema de Schmüdgen

En 1991, K. Schmüdgen en su estudio del problema de los momentos (i.e. cuando un funcional lineal puede ser expresado como una integral para una cierta medida de Borel) sobre conjuntos semialgebraicos, demostró que si $S = \{g_1 \geq 0, \ldots, g_r \geq 0\}$ *es compacto y* $f > 0$ *sobre* S *entonces lo es sobre* Σ_S, es decir no necesita denominadores para ser expresado como suma de cuadrados sobre S, [12]. Por otra parte, la siguiente modificación del polinomio de Motzkin: $M'(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + 1$ es estrictamente positivo sobre $\mathbb{R}^2$ pero (de modo similar a lo hecho en la Sección 1) no es suma de cuadrados, por lo que sin la hipótesis de compacidad el resultado es, en general, falso. Ello ha despertado el interés sobre el siguiente:

Problema 5.1. *Caracterizar los conjuntos* S *que tienen la propiedad de Schmüdgen, es decir para los que* $\mathcal{P}_S^+ \subset \Sigma_S$*. donde* $\mathcal{P}_S^+$ *representa los polinomios que son estrictamente positivos sobre* S*.*

Para S no compacto, la respuesta está lejos de conocerse, incluso para dimensión dos. Obsérvese que la solución depende, en general, de los descriptores $g_1, \ldots, g_r$ del conjunto S. Así, en el ejemplo expuesto en la sección anterior, el semieje $S = \{x \geq 0\}$ puede también describirse como $S = \{x^3 \geq 0\}$. Sin embargo no es cierto que todo polinomio $f(x) > 0$ sobre S se pueda expresar como una combinación de x^3 con coeficientes sumas de cuadrados. Por ejemplo, el polinomio x no puede expresarse de esta forma. Esto lleva a introducir la noción de descriptor natural de un semialgebraico, en la que no entraremos. Simplemente nos basta con la idea de que x es un generador natural para el semieje positivo, mientras que x^3 no. Sin entrar en precisiones, en el caso de que $\dim S = 1$, esto es S es un subconjunto semialgebraico de una curva algebraica, se sabe que S tiene la propiedad de Schmüdgen si los descriptores de S son "buenos", [8].

Si $\dim S = 2$ la situación es mucho más desconocida. Si $S \subset \mathbb{R}^2$ y contiene un cono (esto es, la región comprendida entre dos semirectas concurrentes en un punto) S no tiene la propiedad de Schmüdgen. De modo más preciso, si denotamos por $\bar{S}$ la clausura de S en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ y $\bar{S} \setminus S$ es denso en la recta del infinito, entonces $\mathcal{P}_S^+ \not\subset \Sigma_S$, [11]. Pero por ejemplo, la cuestión de decidir si la franja

$$S = [1, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 \geq 0, 1 - x \geq 0\}$$

tiene o no la propiedad de Schmüdgen está abierta. Finalmente en dimensiones superiores sólo conocemos que si S contiene un cono bidimensional entonces S no tiene la propiedad de Schmüdgen.

Si admitimos que f tenga ceros en S, entonces el resultado de Schmüdgen sabemos que no es cierto en general y tiene sentido plantearse el siguiente

Problema 5.2. *¿Hay alguna clase identificable de conjuntos S para los que $\mathcal{P}_S = \Sigma_S$?*

En resultados recientes sobre este problema, C. Scheiderer, [11], ha probado que si $\dim S \geq 3$ estos conos son distintos, independientemente de que S sea o no compacto y de los descriptores g_j de S. Como antes, en el caso de curvas (esto es $\dim S = 1$) la situación es esencialmente conocida, y en dimensión dos se tienen resultados parciales. Si S es compacto y sus funciones descriptoras son no singulares y se cortan transversalmente dos a dos, entonces $\mathcal{P}_S = \Sigma_S$, [11]. También sabemos que esta igualdad es cierta en el caso de S tenga sólo un número finito de ceros en S y que en cada uno de ellos f pueda expresarse localmente (en el anillo de series en el punto) como suma de cuadrados sobre S. Y por supuesto los resultados negativos expuestos antes para el caso de $f > 0$ también son válidos, con mayor motivo, aquí.

Observación. Hasta ahora hemos trabajado siempre sobre el afín $\mathbb{R}^n$, pero todos los problemas expuestos pueden plantearse, más generalmente, sobre una variedad algebraica irreducible $V \subset \mathbb{R}^n$, reemplazando el anillo $\mathbb{R}[X]$ por el anillo de funciones polinomiales $\mathbb{R}[X]/I$ donde I es el ideal de polinomios que se anulan sobre V. Todos los resultados comentados (solución al problema 17 de Hilbert, Positivstellensatz, etc.) son válidos en este contexto con los cambios obvios.

En la línea del último problema expuesto, podemos plantearnos entonces:

Problema 5.3. *Caracterizar las variedades algebraicas V para las que $\mathcal{P} = \Sigma$, esto es las funciones de $\mathbb{R}[V]$ no negativas son sumas de cuadrados de elementos de $\mathbb{R}[V]$ (también expresado en la literatura por el acrónimo psd = sos (positive semidefined = sums of squares).*

El teorema de Schmüdgen afirma, en este caso, que si V es compacta toda función estrictamente positiva es *sos*. C. Scheiderer, en el trabajo ya mencionado, muestra que para curvas algebraicas puede darse una caracterización precisa de aquellas para las que *psd* = *sos* y que esta igualdad es falsa para todas las variedades con dimensión ≥ 3. En el caso de superficies por el momento sólo se han obtenido resultados parciales estando el caso general abierto.

6. Otras Extensiones

Finalizamos comentando brevemente algunas extensiones de las cuestiones expuestas a otros contextos. En particular podemos sustituir el anillo de polinomios por otros anillos de funciones como las funciones analíticas, funciones C^∞, de Nash,..., los conjuntos semialgebraicos por la correspondiente clase de conjuntos (combinaciones booleanas de desigualdades de las funciones consideradas) y repetir las mismas preguntas mencionadas a lo largo del texto:

problema 17 de Hilbert, Positivstellensatz, números de pitágoras, etc. El caso de las funciones de Nash (funciones algebraicas sobre los polinomios) la situación es esencialmente idéntica a la del anillo de polinomios. En el caso de las funciones analíticas en el entorno de un punto (i.e. gérmenes de funciones analíticas) el comportamiento es también análogo al caso polinomial, [1]. La situación es radicalmente distinta para el caso de funciones analíticas globales. En este caso conocemos que el problema 17 de Hilbert es "cierto" para $\mathbb{R}^2$, es decir toda función analítica no negativa sobre $\mathbb{R}^2$ es suma de cuadrados de funciones meromorfas [5], pero es un problema abierto para $n \geq 3$.

Recientemente ha habido también avances en la dirección de encontrar algoritmos eficientes para representar un polinomio no negativo como suma de cuadrados [9]. Estos resultados utilizan técnicas de programación semidefinida y deben seguir explorándose.

Referencias

[1] Andradas, C., Bröcker, L., Ruiz, J.M. Real Constructible Sets. Erg. Math. **33** Springer, Berlin (1996)

[2] Blekherman, G. There Are Significantly More Nonnegative Polynomials than Sums of Squares. arXiv:math.AG/0309130v1 (2003)

[3] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.F. Real Algebraic Geometry. Erg. Math. **36** Springer, Berlin (1998)

[4] Bröcker, L. Minimale Erzeugung von Positivbereichen. Geom. Dedicata **16**, 335-350 (1984)

[5] Castilla, A., Artin-Lang property for analytic manifolds of dimension two. Math. Z. **217**, 5-14 (1994)

[6] Coste, M. An Introduction to Semialgebraic Geometry. Dip. Mat. Univ. Pisa, Dottorato di Ricerca in Matematica, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa (2000)

[7] Delzell, C. Prestel, A. Positive Polynomials: From Hilbert's 17th Problem to Real Algebraic Geometry. Springer Monographs in Mathematics, (2001).

[8] Kuhlman, S., Marshall, M. Positivy, sums of squares end the multidimensional moment problem. Trans. Am. Math. Soc. **354** 4285-4301 (2002)

[9] Parrilo, P., Sturmfels, B. Minimizing polynomial functions. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **60**: Algorithmic and Quantitative Real Algebraic Geometry. AMS, (2003)

[10] Pfister, A. Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Invent. math. **1**, 116-132 (1966)

[11] Scheiderer, C. Positivity and sums of squares: a guide to some recent results.
http://www.uni-duisburg.de/FB11/FGS/F1/claus.html#preprints

[12] Schmüdgen, K. The K-moment problem for compact semialgebraic sets. Math. Ann. **289**, 203-206 (1991)

[13] Stengle, G. *A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. Math. Ann.* ***207****, 87-97 (1974)*

Carlos Andradas,
Catedrático de Algebra,
Universidad Complutense de Madrid.
Presidente de la Real Sociedad Matemática Española.