La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamoneda

La Olimpiada Internacional de Matemáticas,IMO, se celebra anualmente desde el año 1959. En aquella oportunidad Rumanía invitó a seis países de Europa oriental a participar en una competencia de matemáticas pensada como un evento puntual, que se realizaría solo ese año. Los siete países participantes fueron Bulgaria, Checoeslovaquia, la República Democrática Alemana, Hungría, Polonia, Rumanía y la Unión Soviética. Al año siguiente Rumanía repitió la competencia, aunque solo cinco países asistieron. A partir de ahí, Hungría, Checoeslovaquia y Polonia, organizaron la IMO, convirtiéndose en un evento anual que fue creciendo poco a poco hasta llegar a la cifra extraordinaria de 104 países y 565 estudiantes este año 2009 en Bremen, Alemania.

Como parte muy importante de esta Olimpiada estuvo la celebración por los 50 años de la IMO. Fue una muestra de la gran importancia que tiene esta competencia en la comunidad matemática internacional y de su impacto en las generaciones matemáticas por venir. Los organizadores invitaron a un grupo selecto de matemáticos, que en sus años de escuela secundaria fueron ganadores de medallas en la IMO. La lista es impresionante, Béla Bollobás, Timothy Gowers, Lászlo Lovász, Stanislav Smirnov, Terence Tao y Jean-Christophe Yoccoz. Tres medallistas Fields, un premio Wolf, un premio Gödel,tres premios del Instituto Clay, y tres premios Salem, que durante una tarde dieron una serie de conferencias extraordinarias, cuyo único objetivo era motivar al máximo a todos los jóvenes que participaron en la Olimpiada y mostrarles un camino a seguir, las Matemáticas.

Pienso que la comunidad matemática internacional está dando a las Olimpiadas Matemáticas la importancia que merecen, pues son un mecanismo por excelencia para descubrir jóvenes con talento matemático a muy temprana edad. En eso estamos empeñados.

Además de la IMO, asistimos a la XI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, OMCC, y a la XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM. Las delegaciones estuvieron conformadas de la siguiente manera:

50ª IMO. Alemania. 10 al 22 de Julio.

Carmela Acevedo, Caracas.

Mauricio Marcano, Porlamar

Laura Vielma, Tutor de Delegación. Academia Washington. Caracas.

Rafael Sánchez Lamoneda, Jefe de Delegación, UCV, Caracas.

XXIV OIM. México del 17 al 27 de Septiembre:

Mauricio Marcano, Porlamar. Mención Honorífica

Carmela Acevedo, Caracas. Mención Honorífica.

Tomás Rodríguez. Porlamar.

Eduardo Sarabia. Tutor de Delegación. UPEL-UCV.Caracas

Henry Martínez, Jefe de Delegación, UPEL-UCAB, Caracas.

XI OMCC. Colombia del 4 al 10 de Octubre:

Carlos Lamas. Medalla de Bronce. Barquisimeto.

Edenys Hernao. Mención Honorífica. Maracaibo

Diego Peña. Altos Mirandinos.

Silvina María de Jesús. Tutor de Delegación. UPEL-UCAB.Caracas

José Heber Nieto, Jefe de Delegación, LUZ. Maracaibo.

Es importante señalar el apoyo recibido por nuestros patrocinadores, la Fundación Empresas Polar, Acumuladores Duncan, Acumuladores Titán, MRW y la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman. También queremos agradecer a las Universidades e Instituciones que nos apoyan para la organización de todas nuestras actividades, UCV, USB,UNIMAR, LUZ, URU, UPEL, UCOLA, UNEXPO, UDO, el IVIC y la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Muchas gracias a todos.

Como siempre finalizamos con algunos de los problemas de las competencias a las cuales asistimos. En esta oportunidad les mostramos los exámenes de IMO. Cada examen tiene una duración de cuatro horas y media y el valor de cada problema es de 7 puntos. Los exámenes de la XXIV OIM y la XI OMCC se pueden consultar en la web, http://www.acm.org.ve

50^a Olimpiada Iternacional de Matemáticas

Primer día

Bremen, Alemania, 15 de Julio de 2009

Problema 1

Sea n un entero positivo y sean $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ enteros distintos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, tales que n divide a $a_i(a_{i+1} - 1)$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Demostrar que n no divide a $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2 Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Sean P y Q puntos interiores de los lados CA y AB, respectivamente. Sean K, L y M los puntos medios de los segmentos BP, CQ y PQ, respectivamente, y Γ la circunferencia que pasa por K, L y M. Se sabe que la recta PQ es tangente a la circunferencia Γ. Demostrar que $OP = OQ$.

Problema 3

Sea $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que las subsucesiones

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{y} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

son ambas progresiones aritméticas. Demostrar que la sucesión $s_1, s_2, s_3, \ldots$ es también una progresión aritmética.

Segundo día

Bremen, Alemania, 16 de Julio de 2009

Problema 4

Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ cortan a los lados BC y CA en D y E, respectivamente. Sea K el incentro del triángulo ADC. Supongamos que el ángulo $\angle BEK = 45°$. Determinar todos los posibles valores de $\angle CAB$.

Problema 5

Determinar todas las funciones f del conjunto de los enteros positivos en el conjunto de los enteros positivos tales que, para todos los enteros positivos a y b, existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden

$$a,\ f(b)\ \text{ y }\ f(b + f(a) - 1).$$

(Un triángulo es *no degenerado* si sus vértices no están alineados).

Problema 6

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos distintos y M un conjunto de $n - 1$ enteros positivos que no contiene al número $s = a_1+a_2+\cdots+a_n$. Un saltamontes se dispone a saltar a lo largo de la recta real. Empieza en el punto 0 y da n saltos hacia la derecha de longitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en algún orden. Demostrar que el saltamontes puede organizar los saltos de manera que nunca caiga en un punto de M.

XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primer día

Salvador, Brasil, 23 de Septiembre de 2008

Problema 1

Se distribuyen los números $1, 2, 3, \ldots, 2008^2$ en un tablero de 2008×2008, de modo que en cada casilla haya un número distinto. Para cada fila y cada columna del tablero se calcula la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos. Sea S la suma de los 4016 números obtenidos. Determine el mayor valor posible de S.

Problema 2

Sea ABC un triángulo escaleno y r la bisectriz externa del ángulo $\angle ABC$. Se consideran P y Q los pies de las perpendiculares a la recta r que pasan por A y C, respectivamente. Las rectas CP y AB se intersectan en M y las rectas AQ y BC se intersectan en N. Demuestre que las rectas AC, MN y r tienen un punto en común.

Problema 3

Sean m y n enteros tales que el polinomio $P(x) = x^3 + mx + n$ tiene la siguiente propiedad: Si x e y son enteros y 107 divide a $P(x) - P(y)$, entonces 107 divide a $x - y$. Demuestre que 107 divide a m.

Segundo día

Salvador, Brasil, 24 de Septiembre de 2008

Problema 4

Demuestre que no existen enteros positivos x e y tales que

$$x^{2008} + 2008! = 21^y.$$

Problema 5

Sean ABC un triángulo y X, Y, Z puntos interiores de los lados BC, AC, AB, respectivamente. Sean $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$ los circuncentros correspondientes a los triángulos AZY, BXZ, CYZ. Demuestre que

$$(A^{'}B^{'}C^{'}) \geq \frac{(ABC)}{4}$$

y que la igualdad se cumple si y solo si las rectas $AA^{'}$, $BB^{'}$ $CC^{'}$ tienen un punto en común.

Observación: Para un triángulo cualquiera RST, denotamos su área por (RST).

Problema 6

En un partido de *biribol* se enfrentan dos equipos de cuatro jugadores cada uno. Se organiza un torneo de *biribol* en el que participan n personas, que forman equipos para cada partido (los equipos no sin fijos). Al final del torneo se observó que cada dos personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales. ¿Para qué valores de n es posible organizar un torneo con tales características?

Rafael Sánchez Lamoneda
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV
rafael.sanchez@ciens.ucv.ve