



Johannes Kepler (1571 - 1630)

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XVII, Número 1, Año 2010

I.S.S.N. 1315-4125

Editor

Oswaldo Araujo

Editores Asociados

Carlos Di Prisco y Henryk Gzyl

Editor Técnico: Boris Iskra

Comité Editorial

Pedro Berrizbeitia, Alejandra Cabaña, Giovanni Calderón, Sabrina Garbin, Gerardo Mendoza, Neptalí Romero, Rafael Sánchez Lamonedá, Judith Vanegas, Jorge Vargas

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Carlos A. Di Prisco

Capítulos Regionales

CAPITAL

Carlos A. Di Prisco

IVIC

cdiprisc@ivic.ve

LOS ANDES

Oswaldo Araujo

ULA

araujo@ciens.ula.ve

ZULIA-FALCON

En reorganización

CENTRO-OCCIDENTAL

Sergio Muñoz

UCLA

smunoz@uicm.ucla.edu.ve

ORIENTE

Said Kas-Danouche

UDO

skasdano@sucre.udo.edu.ve

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet:
<http://amv.ivic.ve/> .

Asociación Matemática Venezolana

Boletín
de la
Asociación
Matemática
Venezolana

Vol. XVII • No. 1 • Año 2010

El año pasado tuvimos serios problemas técnicos que ocasionaron retardos en la edición electrónica de nuestra revista que, gracias al empeño y al trabajo de nuestro editor técnico, Boris Iskra, han sido superados. Por favor, acepten nuestras disculpas.

En el primer número del Volumen XVII, 2010, le ofrecemos a nuestros lectores cuatro artículos de investigación, dos de divulgación y nuestra acostumbrada sección de información.

A continuación damos una breve descripción de sus contenidos.

En el artículo de Hazem Attia, *Transient MHD flow between parallel porous plates with heat transfer under exponential decaying pressure gradient and the ion slip*, el efecto del campo magnético, la corriente de Hall, el desplazamiento de iones y la succión uniforme e inyección sobre la distribución de la velocidad y la temperatura es estudiado. Por otro lado, Gabriel Birame Ndiaye da un paso más en la construcción de una teoría de integración con respecto a una medida débil y en, *The cover time of the cube*, José Luis Palacios, empleando herramientas elementales, encuentra el tiempo esperado de cobertura del cubo tridimensional.

La sección de artículos de investigación concluye con el trabajo de Roy Quintero, *Moving cards arbitrarily with perfect K -shuffles*, donde el autor demuestra como, dado un mazo de kn cartas, podemos mover cualquiera de ellas a una posición arbitraria, al barajarlas de una cierta manera, donde k y n son enteros mayores que 1

Que el vino y la comida se casen bien para proporcionarnos placer es, cada vez más, conocido; ahora, gracias al artículo, *Kepler nos enseña a medir el vino que se bebe*, de Núñez y Portero, nos enteramos de un posible romance, entre el vino y la matemática. Pero, si después de unos tragos de vino quisiéramos hacer algo diferente, Rafael Sánchez, nos explica en, *El problema del mago*, un truco de magia derivado de un problema planteado en la IMO 2000.

Finalmente, en La esquina olímpica, Rafael Sánchez reseña las competencias realizadas en el primer semestre del 2010. Estas fueron, a nivel nacional, la séptima edición de la Olimpiada Juvenil Matemáticas y la novena del Canguro Matemático y, a escala internacional, la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC), en Mayagüez, Puerto Rico, y la 51^a Olimpiada Internacional de Matemática, en Astana, Kazajstán. Destaca, el autor, que en la OMCC el joven Diego Peña obtuvo medalla de plata y los estudiantes, Carlos Lamas y Sergio Villarroel, medalla de bronce. Asimismo, que Venezuela ganó la Copa Salvador; este trofeo es concedido al país que demuestra, por dos años consecutivos, su avance en este tipo de evento.

Anunciamos, también, en Información Nacional, la realización de la XXIV Jornadas Venezolanas de Matemáticas; reunión anual de nuestra comunidad que, después de 24 años, podemos decir que está totalmente arraigado.

Oswaldo Araujo G.

ARTÍCULOS

Transient MHD flow between parallel porous plates with heat transfer under exponential decaying pressure gradient and the ion slip

Hazem A. Attia

Resumen. Estudiamos el flujo magnetohidrodinámico (MHD) transitorio de un conductor eléctrico, en un fluido viscoso, no comprimible entre dos placas porosas paralelas no conductoras con transferencia de calor, teniendo en cuenta el deslizamiento de iones. Un campo magnético externo uniforme, una inyección y una succión uniforme se aplican perpendicular a las placas, mientras que el movimiento del fluido es sometido a una disminución exponencial del gradiente de presión. Las dos placas se mantienen a diferentes temperaturas, pero constantes, mientras que la disipación de los Joules y la viscosidad se incluyen en la ecuación de la energía. Se examinan los efectos del deslizamiento de iones, de la succión uniforme y la inyección, de ambos, de las distribuciones de velocidad y de temperatura.

Abstract. The transient magnetohydrodynamic (MHD) flow of an electrically conducting, viscous, incompressible fluid between two parallel non-conducting porous plates with heat transfer is studied considering the ion slip. An external uniform magnetic field and a uniform suction and injection are applied perpendicular to the plates while the fluid motion is subjected to an exponential decaying pressure gradient. The two plates are kept at different but constant temperatures while the Joule and viscous dissipations are included in the energy equation. The effect of the ion slip and the uniform suction and injection on both the velocity and temperature distributions is examined.

1 Introduction

The magnetohydrodynamic flow between two parallel plates, known as Hartmann flow, is a classical problem that has many applications in magnetohydrodynamic (MHD) power generators, MHD pumps, accelerators, aerodynamic

heating, electrostatic precipitation, polymer technology, petroleum industry, purification of crude oil and fluid droplets and sprays. Hartmann and Lazarus [1] studied the influence of a transverse uniform magnetic field on the flow of a conducting fluid between two infinite parallel, stationary, and insulated plates. Then, a lot of research work concerning the Hartmann flow has been obtained under different physical effects [2]-[10]. In most cases the Hall and ion slip terms were ignored in applying Ohm's law as they have no marked effect for small and moderate values of the magnetic field. However, the current trend for the application of magnetohydrodynamics is towards a strong magnetic field, so that the influence of electromagnetic force is noticeable [5]. Under these conditions, the Hall current and ion slip are important and they have a marked effect on the magnitude and direction of the current density and consequently on the magnetic force term. Tani [7] studied the Hall effect on the steady motion of electrically conducting and viscous fluids in channels. Soudalgekar et al. [8]-[9] studied the effect of the Hall currents on the steady MHD Couette flow with heat transfer. The temperatures of the two plates were assumed either to be constant [8] or to vary linearly along the plates in the direction of the flow [9]. Abo-El-Dahab [10] studied the effect of Hall current on the steady Hartmann flow subjected to a uniform suction and injection at the bounding plates. Later, Attia [11] extended the problem to the unsteady state with heat transfer in the presence of a constant pressure gradient, taking the Hall effect into consideration while neglecting the ion slip.

In the present study, the unsteady flow and heat transfer of an incompressible, viscous, electrically conducting fluid between two infinite non-conducting horizontal porous plates are studied with the consideration of both the Hall current and ion slip. The fluid is acted upon by an exponential decaying pressure gradient, a uniform suction and injection and a uniform magnetic field perpendicular to the plates. The induced magnetic field is neglected by assuming a very small magnetic Reynolds number [4, 5]. The two plates are maintained at two different but constant temperatures. This configuration is a good approximation of some practical situations such as heat exchangers, flow meters, and pipes that connect system components. The cooling of these devices can be achieved by utilizing a porous surface through which a coolant, either a liquid or gas, is forced. Therefore, the results obtained here are important for the design of the wall and the cooling arrangements of these devices. The equations of motion are solved analytically using the Laplace transform method while the energy equation is solved numerically taking the Joule and the viscous dissipations into consideration. The effect of the magnetic field, the Hall current, the ion slip, and the suction and injection on both the velocity and temperature distributions is studied.

2 Description of the problem

The two non-conducting plates are located at the $y = \pm h$ planes and extend from $x = -\infty$ to ∞ and $z = -\infty$ to ∞ . The lower and upper plates are kept at the two constant temperatures T_1 and T_2 , respectively, where $T_2 > T_1$. The fluid flows between the two plates under the influence of an exponential decaying pressure gradient dP/dx in the x -direction, and a uniform suction from above and injection from below with uniform velocity v_0 which all are applied at $t = 0$. The whole system is subjected to a uniform magnetic field B_0 in the positive y -direction. This is the total magnetic field acting on the fluid since the induced magnetic field is neglected. From the geometry of the problem, it is evident that $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$. The existence of the Hall term gives rise to a z -component of the velocity. Thus, the velocity vector of the fluid is

$$v(y, t) = u(y, t)i + v_0j + w(y, t)k$$

with the initial and boundary conditions $u = w = 0$ at $t \leq 0$, and $u = w = 0$ at $y = \pm h$ for $t > 0$. The temperature $T(y, t)$ at any point in the fluid satisfies both the initial and boundary conditions $T = T_1$ at $t \leq 0$, $T = T_2$ at $y = +h$, and $T = T_1$ at $y = -h$ for $t > 0$. The fluid flow is governed by the momentum equation

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \mu \nabla^2 v - \nabla P + J \wedge B_0 \quad (1)$$

where ρ and μ are, respectively, the density and the coefficient of viscosity of the fluid. If the Hall and ion slip terms are retained, the current density J is given by

$$J = \sigma \left\{ v \wedge B_0 - \beta (J \wedge B_0) + \frac{\beta Bi}{B_0} (J \wedge B_0) \wedge B_0 \right\}$$

where σ is the electric conductivity of the fluid, β is the Hall factor and Bi is the ion slip parameter [4]. This equation may be solved in J to yield

$$J \wedge B_0 = -\frac{\sigma B_0^2}{(1 + BiBe)^2 + Be^2} \left(((1 + BiBe)u + Bew)i + ((1 + BiBe)w - Beu)k \right) \quad (2)$$

where $Be = \sigma \beta B_0$, is the Hall parameter [4]. Thus, in terms of Eq.(2), the two components of Eq.(1) read

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{(1 + BiBe)^2 + Be^2} ((1 + BiBe)u + Bew), \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho v_0 \frac{\partial w}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{(1 + BiBe)^2 + Be^2} ((1 + BiBe)w - Beu), \quad (4)$$

To find the temperature distribution inside the fluid we use the energy equation [12]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c v_0 \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\sigma B_0^2}{(1 + BiBe)^2 + Be^2} (u^2 + w^2), \quad (5)$$

where c and k are, respectively, the specific heat capacity and the thermal conductivity of the fluid. The second and third terms on the right-hand side represent the viscous and Joule dissipations, respectively.

The problem is simplified by writing the equations in the non-dimensional form. The characteristic length is taken to be h , and the characteristic time is $\rho h^2 / \mu^2$ while the characteristic velocity is $\mu / \rho h$. We define the following non-dimensional quantities

$$\hat{x} = \frac{x}{h}, \hat{y} = \frac{y}{h}, \hat{z} = \frac{z}{h}, \hat{u} = \frac{\rho h u}{\mu}, \hat{w} = \frac{\rho h w}{\mu}, \hat{P} = \frac{P \rho h^2}{\mu^2}, \hat{t} = \frac{t \mu}{\rho h^2}, \hat{T} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1},$$

$S = \rho v_0 h / \mu$, the suction parameter,

$Pr = \mu c / k$, is the Prandtl number,

$Ec = \mu^2 / \rho^2 c h^2 (T_2 - T_1)$, is the Eckert number,

$Ha^2 = \sigma B_0^2 h^2 / \mu$, where Ha is the Hartmann number,

In terms of the above non-dimensional variables and parameters, the basic Eqs. (3)-(5) are written as (the "hats" will be dropped for convenience)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + S \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{Ha^2}{(1 + BiBe)^2 + Be^2} ((1 + BiBe)u + Bew), \quad (6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + S \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{Ha^2}{(1 + BiBe)^2 + Be^2} ((1 + BiBe)w - Bew), \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + S \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Ec \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{Ha^2}{(1 + BiBe)^2 + Be^2} (u^2 + w^2), \quad (8)$$

The initial and boundary conditions for the velocity become

$$u = w = 0, \quad t \leq 0, \quad u = w = 0, \quad y = \pm 1, \quad t > 0 \quad (9)$$

and the initial and boundary conditions for the temperature are given by

$$t \leq 0 : T = 0, \quad t > 0 : T = 1, \quad y = +1, \quad T = 0, \quad y = -1. \quad (10)$$

3 Analytical solution of the equations of motion

Equations (6) and (7) are the two equations of motion which, if solved, give the two components of the velocity field as functions of space and time. Multiplying Eq.(7) by i and adding to Eq.(6) we obtain

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - S \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{Ha^2((1 + BiBe) - iBe)}{(1 + BiBe)^2 + Be^2} V - \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dP}{dx}. \quad (11)$$

with the initial and boundary conditions

$$V = 0, \quad t \leq 0, \quad V = 0, \quad y = \pm 1, \quad t > 0, \quad (12)$$

where $V = u + iw$. Equations (11) and (12) can be solved using the method of Laplace Transform (LT) [13] to obtain V as functions of y and t . The real part of V represents the x -component of the velocity while the imaginary part represents the z -component. Taking LT of Eqs. (11) and (12) we have

$$\frac{d^2 \bar{V}(y, s)}{dy^2} - S \frac{d\bar{V}(y, s)}{dy} - K(s) \bar{V}(y, s) = -F(s) \quad (13)$$

where $\bar{V}(y, s) = L(V(y, t))$, $-F(s)$ is the LT of the pressure gradient, $K(s) = A + s$, and $A = Ha^2((1 + BiBe) - iBe)/((1 + BiBe)^2 + Be^2)$. The solution of Eq.(13) with y as an independent variable is given as

$$\bar{V}(y, s) = \frac{F(s)}{K} \left(1 + \exp(Sy/2) \left[\frac{\sinh(S/2) \sinh(qy)}{\sinh(q)} - \frac{\cosh(S/2) \cosh(qy)}{\cosh(q)} \right] \right) \quad (14)$$

where $q^2 = S^2/4 + K$. Using the complex inversion formula and the residue theorem [13], the inverse transform of $U(y, s)$ is determined and is given in Appendix A.

4 Numerical solution of the energy equation

The exact solution of the equations of motion, given by Eq.(15) in Appendix A, determines the velocity field for different values of the parameters Ha , Be , Bi , and S . The values of the velocity components, when substituted in the right-hand side of the inhomogeneous energy equation (8), make it too difficult to solve analytically. The energy equation is to be solved numerically with the initial and boundary conditions given by Eq.(10) using finite differences [14]. The Crank-Nicolson implicit method is applied. The finite difference equations are written at the mid-point of the computational cell and the different terms are replaced by their second-order central difference approximations in the y -direction. The

diffusion term is replaced by the average of the central differences at two successive time levels. The viscous and Joule dissipation terms are evaluated using the velocity components and their derivatives in the y -direction which are obtained from the exact solution. Finally, the block tri-diagonal system is solved using Thomas' algorithm [14]. All calculations have been carried out for $C = -5$, $\alpha = 1$, $Pr = 1$ and $Ec = 0.2$.

Grid-independence studies show that the computational domain $0 < t < \infty$ and $-1 < y < 1$ can be divided into intervals with step sizes $\Delta t = 0.001$ and $\Delta y = 0.005$ for time and space respectively. Smaller step sizes do not show any significant change in the results.

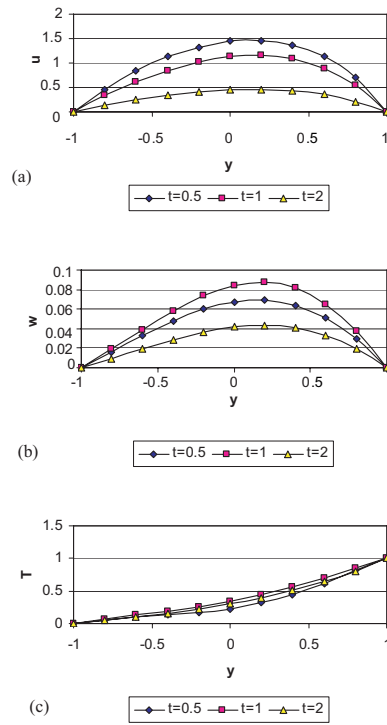


Figure 1: Time variation of the profile of: (a) u ; (b) w ; and (c) T . ($Ha = 3$, $Be = 3$, $Bi = 3$, and $S = 1$).

5 Results and discussion

Figure 1 shows the profiles of the velocity components u and w and temperature T for various values of time t . The figure is plotted for $Ha = 3$, $Be = 3$, $Bi = 3$,

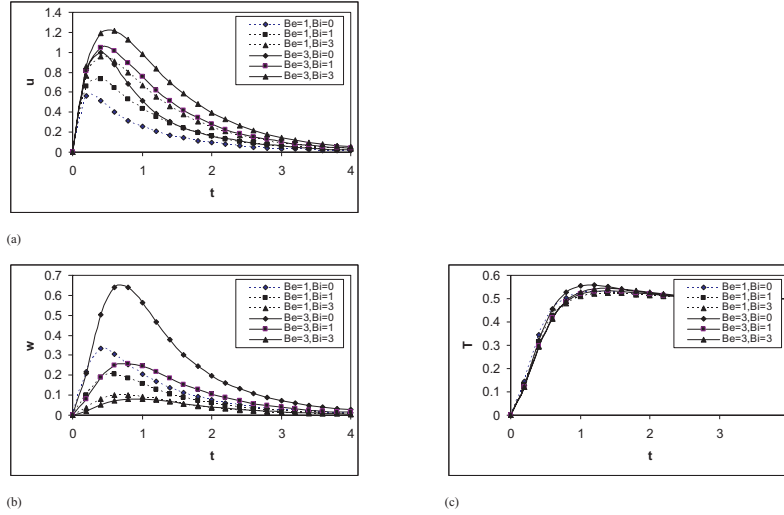


Figure 2: Effect of the parameters Be and Bi on: (a) u at $y = 0$; (b) w at $y = 0$; and (c) T at $y = 0$ ($Ha = 3$ and $S = 0$).

and $S = 1$. As shown in Figure 1(a) and 1(b), the profiles of u and w are asymmetric about the plane $y = 0$ because of the suction. It is observed that the velocity component u reaches the steady state faster than w which, in turn, reaches the steady state faster than T . This is expected, since u is the source of w , while both u and w act as sources for the temperature.

Figure 2 shows the time evolution of u , w and T at the centre of the channel $y = 0$, respectively, for various values of the Hall parameter Be and the ion slip parameter Bi . In this figure, $Ha = 3$ and $S = 0$. It is clear from Figure 2(a) that increasing the parameter Be or Bi increases u . This is because the effective conductivity $(\sigma/\{(1 + BiBe)^2 + Be^2\})$ decreases with increasing Be or Bi which reduces the magnetic damping force on u . In Figure 3(b), the velocity component w increases with increasing Be , since w is a result of the Hall effect. On the other hand, increasing the ion slip parameter Bi decreases w for all values of Be as a result of decreasing the source term of $w (BeHa^2u/\{(1 + BiBe)^2 + Be^2\})$ and increasing its damping term $(Ha^2w/\{(1 + BiBe)^2 + Be^2\})$. The influence of the ion slip on w becomes more pronounced for higher values of Be .

Figure 2(c) indicates that the effect of Be or Bi on T is more pronounced for small time than for large time. Increasing Be or Bi decreases T at small times but slightly increases it at large times. This can be attributed to the fact that, for small times, u and w are small and an increase in Be or Bi decreases the

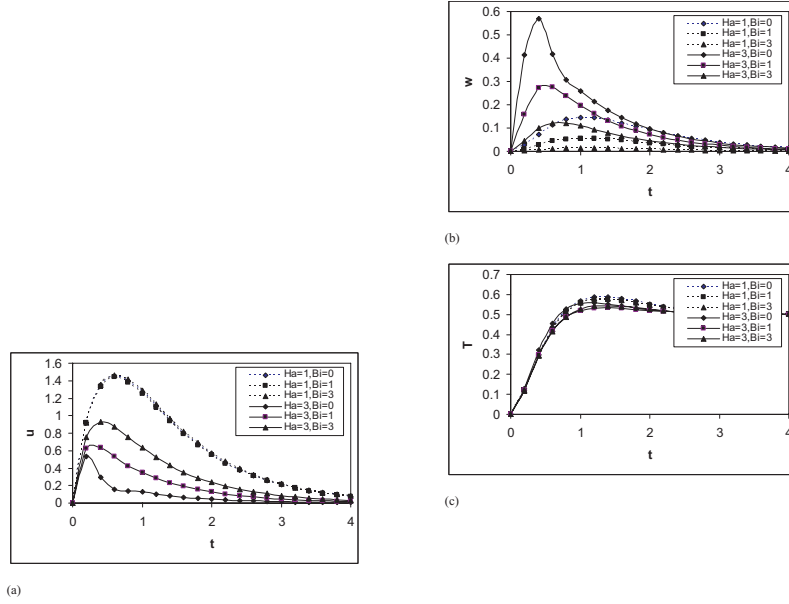


Figure 3: Effect of the parameters Ha and Bi on: (a) u at $y = 0$; (b) w at $y = 0$; and (c) T at $y = 0$. ($Be = 3$ and $S = 0$).

Joule dissipation which is also proportional to $(1/\{(1 + BiBe)^2 + Be^2\})$. For large times, increasing Be increases both u and w and, in turn, increases the Joule and viscous dissipations. Also, for large times, increasing Bi , although it decreases w , it increases the velocity component u of the main flow and consequently increases the viscous and Joule dissipations.

Figure 3 shows the time evolution of u , w , and T at the centre of the channel $y = 0$, respectively, for various values of the Hartmann number Ha and the ion slip parameter Bi . In this figure, $Be = 3$ and $S = 0$. 3(a) indicates that the effect of Bi on u depends on Ha . For small values of Ha , increasing Bi slightly decreases u as a result of increasing the damping force on u which is proportional to Bi . Increasing Bi more increases the effective conductivity and, in turn, decreases the damping force on u which increases u . On the other hand, for larger values of Ha , u becomes small, and increasing Bi always decreases the effective conductivity and therefore increases u . It is also clear that the effect of Bi on u becomes more apparent for higher values of Ha . Figure 3(b) ensures that increasing the ion slip parameter Bi decreases w for all values of Ha and that its effect is more apparent for higher values of Ha . Figures 3(c) indicates that the parameter Bi has a more pronounced effect on T for higher values of

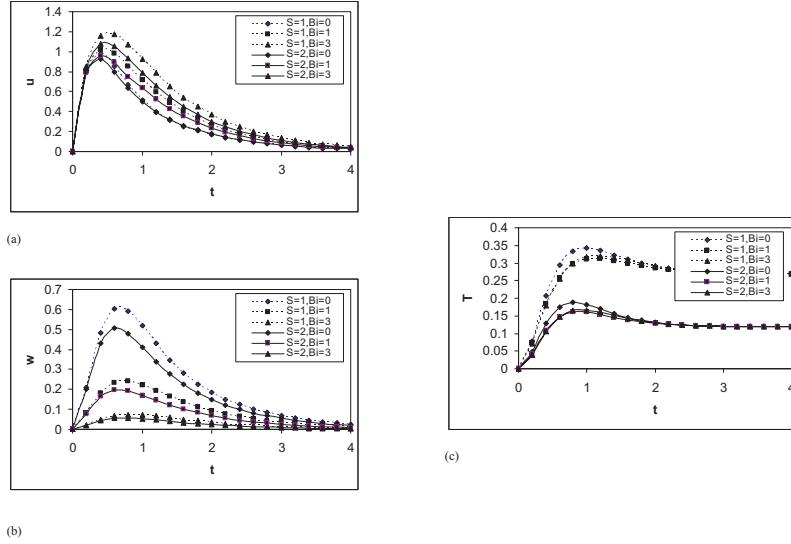


Figure 4: Effect of the parameters S and Bi on: (a) u at $y = 0$; (b) w at $y = 0$; and (c) T at $y = 0$. ($Ha = 3$ and $Be = 3$).

the magnetic field. It is clear that increasing Bi decreases T while increasing Ha increases T as a result of the influence of each parameter Bi and Ha on the Joule dissipation.

Figure 4 presents the time evolution of u and w at the centre of the channel $y = 0$ for various values of the suction parameter S and the ion slip parameter Bi . In this figure $Ha = 3$ and $Be = 3$. Figures 4(a) and 4(b) show that increasing the suction decreases both u and w due to the convection of the fluid from regions in the lower half to the centre which has higher fluid speed. It is also clear from Figures 4(a) and 4(b) that the effect of the suction parameter on u becomes more pronounced as Bi increases while its effect on w decreases as Bi increases. Figure 4(c) shows that increasing S decreases the temperature at the centre of the channel. This is due to the influence of convection in pumping the fluid from the cold lower half towards the centre of the channel.

6 Conclusion

The transient Hartmann flow of a conducting fluid under the influence of an applied uniform magnetic field has been studied, considering the Hall and ion slip effects in the presence of uniform suction and injection. An analytical solution for the equations of motion has been developed while the energy equation has

been solved numerically. The effect of the magnetic field, the Hall parameter, the ion slip parameter, and the suction and injection velocity on the velocity and temperature distributions has been investigated. It is found that the effect of the ion slip on the main velocity u depends upon the magnetic field. For large values of the magnetic field, increasing the ion slip increases u . For small values of the magnetic field, increasing the ion slip slightly decreases u , but increasing it more increases u . It is also shown that increasing the Hall parameter increases the velocity component w , while increasing the ion slip decreases w . The influence of the Hall current on w decreases greatly as the ion slip increases. The influence of the ion slip on the temperature T depends on time and the magnetic field. The effect of the ion slip on T is more pronounced for small time than for large time while it becomes more apparent for higher values of the magnetic field.

References

- [1] J. Hartmann and F. Lazarus. Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-Fys. Medd. 15(6,7),(1937).
- [2] I.N. Tao. J. of Aerospace Sci. 27, 334 (1960).
- [3] R.A. Alpher. Int. J. Heat and Mass Transfer. 3, 108 (1961).
- [4] G.W. Sutton and A. Sherman. Engineering Magnetohydrodynamics. McGraw-Hill Book Co. 1965.
- [5] K. Cramer and S.-I. Pai. Magnetofluid dynamics for engineers and applied physicists. McGraw-Hill Book Co. 1973.
- [6] S.D. Nigam and S.N. Singh. Quart. J. Mech. Appl. Math. 13, 85 (1960).
- [7] I. Tani. J. of Aerospace Sci. 29, 287 (1962).
- [8] V.M. Soundalgekar, N.V. Vighnesam, and H.S. Takhar. IEEE Trans. Plasma Sci. PS-7(3), 178 (1979).
- [9] V.M. Soundalgekar and A.G. Uplekar. IEEE Trans. Plasma Sci. PS-14(5), 579 (1986).
- [10] E.M.H. Abo-El-Dahab. M.Sc. thesis. Helwan University, Egypt (1993).
- [11] H.A. Attia. Can. J. Phys. 76(9), 739 (1998).
- [12] H. Schlichting. Boundary layer theory. McGraw-Hill Book Co. 1968.
- [13] M.R. Spiegel. Theory and problems of Laplace transform. McGraw-Hill Book Co. 1986.

- [14] W.F. Ames. Numerical solutions of partial differential equations. 2nd ed., Academic Press, New York. 1977.

AppendixA

$$\begin{aligned}
 V(y, t) &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{PI_1}{PN_1 + \alpha} (\exp(PN_1 x t) - \exp(-\alpha t)) \right. \\
 &+ \frac{PI_2}{PN_2 + \alpha} (\exp(PN_2 x t) - \exp(-\alpha t)) + \frac{PI_3}{PN_3 + \alpha} (\exp(PN_3 x t) - \exp(-\alpha t)) \\
 &+ \left. \frac{PI_4}{PN_4 + \alpha} (\exp(PN_4 x t) - \exp(-\alpha t)) \right)
 \end{aligned}$$

where

$$-\frac{dP}{dx} = C \exp(-\alpha t),$$

$$PN_1 = PN_2 = NN_1/2,$$

$$PN_3 = PN_4 = NN_2/2,$$

$$PI_1 = \frac{NN_3}{A + PN_1},$$

$$PI_2 = \frac{NN_3}{A + PN_2},$$

$$PI_3 = \frac{NN_4}{A + PN_3},$$

$$PI_4 = \frac{NN_4}{A + PN_4},$$

$$NN_1 = -\pi^2(n-1)^2 - S^2/4,$$

$$NN_2 = -\pi^2(n-0.5)^2 - S^2/4,$$

$$NN_3 = 2\pi(-1)^n(n-1)\exp(S_y/2)\sinh(S/2)\sin(\pi(n-1)y),$$

$$NN_4 = 2\pi(-1)^{n+1}(n-0.5)\exp(S_y/2)\cosh(S/2)\cos(\pi(n-0.5)y),$$

The expression for the complex velocity V is to be evaluated for different values of the parameters Ha, Be, Bi , and S . The velocity components u and w are, respectively, the real and imaginary parts of V .

Hazem A. Attia
 Department of Engineering Mathematics and Physics,
 Faculty of Engineering, El-Fayoum University,
 El-Fayoum-63111, Egypt

M -mesurabilite, par rapport a une multimesure
 M , a valeurs convexes fermees, et densite
 univoque d' une multimesure

Gabriel Birame Ndiaye

Resumen. Damos un paso más, en nuestra construcción de una teoría de integración, con respecto a una medida débil M , multilineal, cerrada, con valores convexos : se introduce una noción de las funciones M -medibles. Se obtiene un teorema de caracterización de Lebesgue para tales funciones, así como los criterios de integrabilidad : una función M -medible, dominada por una función integrable, es integrable. Esto permite obtener técnicas sencillas en las pruebas, y comparar con mayor precisión, tres diferentes formas de integración de D. Thiam S. Se define también el espacio $L^\infty(M)$, y se prueba, que para cada f en $L_+^\infty(M)$, podemos asociar una medida multivaluada $(f.M)$, que tiene como densidad f con respecto a M . También presentamos la integración con respecto a $(f.M)$.

Abstract. Nous posons un autre jalon, dans notre construction, d'une théorie de l'intégration par rapport à une multimesure faible M , à valeurs convexes fermées : nous introduisons une notion de fonctions M -mesurables. Nous obtenons un théorème de caractérisation de Lebesgue pour de telles fonctions, et aussi des critères d'intégrabilité : une fonction M -mesurable, dominée par une fonction intégrable, est intégrable. Cela nous a permis d'obtenir des techniques de démonstration plus simples, et de comparer de façon plus précise, les différentes méthodes d'intégration de D.S.Thiam. Nous définissons ensuite l'espace $L^\infty(M)$, et montrons, qu'à toute fonction f de $L_+^\infty(M)$, on peut associer une multimesure $(f.M)$, admettant f comme densité par rapport à M . On étudie également l'intégration par rapport à $(f.M)$.

1 Introduction

Les multimesures ont été le sujet de plusieurs thèses dont celle de C. Godet-Thobie de l'école de C. Castaing, et celles de D. S. Thiam, A. Costé, K. Siggini,

de l'école de Pallu De La Barrière. Le point de vue des semi-variations a été apporté par Pallu De La Barrière [10]. Tous ces travaux ont été fait pour une multimesure à valeurs faiblement compactes. D. S. Thiam a étendue la théorie de l'intégrale de Daniell aux multimesures. Entre autres, deux approches y sont présentées : celle de l'intégrale de Daniell secondaire et celle de l'intégrale multivoque. Il a aussi effectué une tentative d'intégration par rapport à une multimesure à valeurs convexes fermées bornées. Ce sont donc trois méthodes d'intégrations qu'il a présenté, sans aucun lien entre elles. Nous avons eu le projet d'étudier l'intégration par rapport à une multimesure faible, à valeurs convexes fermées. Cela nous a amené à définir dans [5] la notion de s -compacité qui est l'équivalent multivoque de σ -finie des mesures scalaires, et avons obtenu différents résultats, parmi lesquels, les théorèmes de convergence au sens de l'ordre et une caractérisation simple et pratique de l'intégrabilité d'une fonction. Dans [8], nous avons unifié les trois méthodes de [12], et avons établi le lien avec celle de [10]. Dans cet article, nous posons un autre jalon, dans notre construction, d'une théorie de l'intégration par rapport à une multimesure faible M , à valeurs convexes fermées : nous définissons la M -mesurabilité de manière naturelle. Ceci est à rapprocher de la ν -mesurabilité de [10] où ν est une semi-variation, bien que notre approche soit différente. Nous montrons qu'une fonction M -mesurable dominée par une fonction intégrable est intégrable. Nous en déduisons que, les fonctions intégrables, pour l'intégrale multivoque de [12], sont celles qui sont mesurables, et dont la valeur absolue est Daniell-intégrable. Ceci permet donc, de comparer de façon plus précise, les trois méthodes d'intégration de [12] : nous avons initié cette comparaison dans [8]. Nous établissons également un théorème de caractérisation de Lebesgue pour les fonctions M -mesurables. Ce travail, outre les différents résultats que nous obtenons, unifie différents travaux ([10], et [12]), dont le lien n'avait pas encore établi, à notre connaissance. Nous définissons l'espace $L^\infty(M)$, une notion nouvelle, qui permet d'associer à tout élément f de $L_+^\infty(M)$, une multimesure (f.M) admettant f comme densité par rapport à M . On en déduit la construction de multimesures séquentiellement compactes. Nous démontrons que $L^\infty(M)$ est complet, et son quotient est un espace de Banach. Nous étudions aussi l'intégration par rapport à (f.M). Nous appliquons ensuite ces résultats à une mesure vectorielle m . Nous montrons qu'une fonction m -mesurable, dominée par une fonction m -intégrable, est m -intégrable.

2 Notations et préliminaires

On considère E un espace topologique localement convexe séparé non complet, E' son dual topologique. Le crochet de dualité $\langle E, E' \rangle$ est $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $A \subset E$, et $y \in E'$, on pose $\delta^*(y/A) = \sup\{\langle x, y \rangle : x \in A\}$.

On considère les monoïdes suivants : $(cc(E), +)$ l'ensemble des convexes faible-

ment compacts de E , $(cfb(E), \dot{+})$ celui des convexes fermés bornés non vides, et $(cf(E), \dot{+})$ celui des convexes fermés non vides. Si $A, B \in cf(E)$, \overline{A} est l'adhérence de A et, $A \dot{+} B = \overline{A + B}$. On désigne par $\overline{co}(A)$, l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble A . La structure uniforme, de ces monoïdes, est celle de Hausdorff [1], et la relation d'ordre l'inclusion. Si O est une famille de parties convexes fermées de E on a :

$\inf\{A : A \in O\} = \cap\{A : A \in O\}$, et $\sup\{A : A \in O\} = \overline{co} \cup \{A : A \in O\}$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de $cf(E)$. On note : $\overline{\lim} A_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n} A_n$, et $\underline{\lim} A_n =$

$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{p \geq n} A_n$, au sens de l'ordre dans $cf(E)$. Si en plus, pour $A \in cf(E)$, on a

$A = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$, alors A est la limite, au sens de l'ordre, dans $cf(E)$, de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On définit de manière analogue, la limite au sens de l'ordre

dans $cfb(E)$, et dans $cc(E)$. On désigne par T un ensemble non vide. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^T$ est une fonction de T dans $\overline{\mathbb{R}}$, on pose : $f^+ = \sup(f, 0)$, et $f^- = \sup(-f, 0)$.

Si $A, B \in cfb(E)$, et si E est normé, on désigne par $DH(A, B)$ la distance de Hausdorff. La formule de Hörmander (voir [1], chapitre II) s'écrit :

$$DH(A, B) = \sup\{|\delta^*(y/A) - \delta^*(y/B)| : y \in E', \|y\| \leq 1\}.$$

Soit $M : \Omega \rightarrow cf(E)$ une multiapplication. On dira que M est une multimesure faible si $\delta^*(y/M(\cdot))$ est une mesure scalaire pour tout y de E' avec $M(\emptyset) = \{0\}$: cette notion a été introduite dans [2].

Définition 2.1. On considère une multimesure faible M à valeurs dans $cf(E)$.

- (1) On dit que M est séquentiellement compacte (s-compacte), s'il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $T_n \in \Omega$, croissante vérifiant $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n = T$ (on note $T_n \uparrow T$) et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M(T_n) \in cc(E)$.
- (2) On dit que M est monotone si on a : $0 \in M(A)$, $\forall A \in \Omega$.

Exemple 2.2. Soit $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu borélienne de \mathbb{R}^n et λ une mesure σ -finie sur $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$. On considère : $M : \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow cf(\mathbb{R})$, définie par :

$$M(A) = [0, \lambda(A)], \text{ si } \lambda(A) < +\infty, \text{ et } M(A) = [0, +\infty[, \text{ sinon.}$$

M est une multimesure monotone s-compacte. L'additivité provient de la propriété de décomposition de Riesz, cf par exemple [12] page 173.

On considère une multimesure faible M à valeurs dans $cf(E)$, et on suppose que M est s-compacte et monotone. On pose : $\Lambda = \{A \in \Omega / M(A) \in cc(E)\}$.

Si $h = \sum a_i 1_{A_i}$ est une fonction en escaliers basée sur le clan Λ , soit $I(h) = \sum a_i M(A_i)$, avec h positive. Si on désigne par H l'espace de Riesz des fonctions en escaliers basées sur Λ , et $H_+ = \{h \in H : h \geq 0\}$, alors l'application $I : H_+ \rightarrow cc(E)$ est une intégrale de Daniell secondaire : I est additive, monotone

i.e. $0 \in I(h)$ pour tout $h \in H_+$, et si $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de H_+ , qui converge simplement vers 0, (on note $h_n \downarrow 0$), alors $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} I(h_n) = \{0\}$. Ici on désigne par H^\vee (resp H^\wedge) l'ensemble des fonctions qui sont limites croissante (resp décroissante) de fonctions de H_+ . Pour $h_n \uparrow f$, $h_n \in H_+$ et $g_n \downarrow g$, $g_n \in H_+$, on pose : $I^\vee(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} I(h_n)$, et $I^\wedge(g) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} I(g_n)$. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}_+^T$, on pose : $I^*(f) = \inf\{I^\vee(\psi), \psi \in H^\vee : \psi \geq f\}$, si cet ensemble est non vide, sinon on pose $I^*(f) = E$, et $I_*(f) = \sup\{I^\wedge(\phi), \phi \in H^\wedge, \phi \leq f\}$. L'espace des fonctions intégrables pour l'intégrale de Daniell scondaire I est :

$$L_+^1(I) = \{f \in \overline{\mathbb{R}}_+^T, I^*(f) = I_*(f) \in \text{cfb}(E)\}.$$

C'est un cône convexe réticulé, voir [5] ou [7]. Si $f \in L_+^1(I)$, on pose $\int f I = I^*(f)$, et on le notera $\int(\cdot)I$ ou I. Elle est additive et positivement homogène. On posera :

$$\text{si } h \in H_+, I_y(h) = \delta^*(y, I(h)), \text{ et si } h \in H, I_y(h) = I_y(h^+) - I_y(h^-).$$

Nous rappelons la propriété suivante : si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de $\text{cc}(E)$, alors pour tout $y \in E'$ on a :

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \delta^*(y/C_n) = \delta^*(y/ \inf_{n \in \mathbb{N}^*} C_n) \quad (2.1)$$

Dans la remarque 2.3 suivante, nous allons essayer de situer la position du problème.

Remarque 2.3. L'approche que nous avons exposé, ci avant, est celle de [12]. Cependant pour assurer par exemple la sous-additivité de $I^* : I^*(f_1 + f_2) \subset I^*(f_1) + I^*(f_2)$, il fallait supposer que $I^*(f_1) \in \text{cc}(E)$, $I^*(f_2) \in \text{cc}(E)$. En effet, cette sous-additivité est basée sur la propriété 2.1. Or dans $\text{cfb}(E)$, cette propriété ne subsiste plus : à la page 78 de [12], on peut trouver un contre-exemple, communiqué par le professeur Michel Valadier. Donc dans $\text{cfb}(E)$, la construction s'effondre. C'est pourquoi, pour une multimesure faible à valeurs dans $\text{cfb}(E)$, [12] a utilisé une autre approche : une fonction $f \in \mathbb{R}_+^T$ est M-intégrable, si elle est limite croissante d'une suite de H_+ , et si $I^*(f) \in \text{cfb}(E)$. Si maintenant la multimesure est à valeurs dans $\text{cf}(E)$, comme dans l'exemple 2.2, que peut on faire ? L'exemple 2.2 nous a suggéré la notion de séquentielle compacité (s-compact). Elle nous a permis de maintenir l'édifice, et d'obtenir, en particulier, dans [5], les différents résultats résumés dans la proposition 2.4, et dans [8], les théorèmes 2.14, 2.15, 2.16, et le corollaire 2.17.

De plus l'intégrale d'une fonction peut être à valeurs dans $\text{cfb}(E)$, et non plus seulement dans $\text{cc}(E)$, comme dans [10] ou [12] : nous avons, dans [8], donné des exemples de multimesures, pour lesquelles, l'intégrale d'une fonction était à valeur dans $\text{cfb}(E)$, et non plus dans $\text{cc}(E)$. De telles fonctions ne sont pas

intégrables au sens de [10], ni de [12], mais le sont suivant nos définitions. D'autre part, la notion de négligeable, que nous avons introduit dans [8], n'existait pas dans [5], ni dans [12]. Tous les résultats obtenus dans [12], le sont essentiellement, pour des fonctions définies sur T à valeurs dans \mathbb{R} , et en supposant que tout ce passe dans $cc(E)$. Ici les fonctions sont définies I-pp sur T , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. La même situation se pose dans l'approche présentée, après la proposition 2.4. Au total, on a eu dans [12], trois méthodes différentes d'intégration. Le lien entre ces méthodes n'avait pas encore été établi, à notre connaissance : dans [8], nous avons établi le lien entre ces méthodes, et avons également établi la corrélation avec la méthode de [10]. Dans cet article, la notion de M-mesurabilité, que nous introduisons, dans la section 3, permet d'obtenir, dans le théorème 3.3, des critères d'intégrabilité, identiques à ceux pour une mesure scalaire positive, et de mieux préciser la comparaison, entre les différentes méthodes de [12]. Nous obtenons également, dans le théorème 3.7, un théorème de caractérisation de Lebesgue des fonctions M-mesurables, comme dans le cas scalaire.

La proposition 2.4 suivante regroupe dans l'ordre les propositions 7 et 13, puis les théorèmes 6 et 1 que nous avons obtenu dans [5].

Proposition 2.4. *On considère $f \in \overline{\mathbb{R}}^T$, et $y \in E'$.*

- (1) *On a $(I_y)^*(|f|) = \delta^*(y/I^*(|f|))$.*
- (2) *Si $I_*(|f|) \in cfb(E)$, alors on obtient, $(I_y)_*(|f|) = \delta^*(y/I_*(|f|))$.*
- (3) *On a aussi $L_+^1(I) = \bigcap_{y \in E'} L_+^1(I_y)$, et si $f \in L_+^1(I)$ alors,*

$$\delta^*(y/\int fI) = \int f\delta^*(y/I(\cdot)).$$
- (4) *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+^T$ on a, $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} I^*(f_n) = I^*\left(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} (f_n)\right)$.*

Dans [5] nous avons obtenu, comme dans [12], les théorèmes de convergences monotones et dominée, au sens de l'ordre, mais cette fois ci, pour une multimesure à valeurs convexes fermées de E , et pour des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Nous appliquons une méthode de [12] pour l'intégrale multivoque, mais cette fois ci dans le cas non compact. Si on pose : $H^* = \{f \in \mathbb{R}^T, I^*(|f|) \in cfb(E)\}$, alors $(H^*, +, \leq)$ est un sous espace de Riesz de \mathbb{R}^T . Soit $V(0)$ l'ensemble des voisinages de 0 dans E . Si $V \in V(0)$, posons : $V^* = \{f \in \mathbb{R}^T, I^*(|f|) \subset V\}$. L'ensemble $V^*(0)$ des V^* quand $V \in V(0)$ est une base de filtre de 0 de H^* . Nous avons ainsi défini sur H^* une topologie faisant de H^* un espace localement convexe. l'espace $L_+^1(I)$, que nous avons défini dans [5] ou [7], est l'espace des fonctions intégrables pour l'intégrale de Daniell secondaire, où I est l'intégrale associée à la multimesure M . Ainsi, on a : $H_+ \subset L_+^1(I) \cap \mathbb{R}^T \subset H^*$. Nous venons donc de munir d'une topologie l'espace $L_+^1(I) \cap \mathbb{R}^T$ et ceci n'existait pas dans [12]. Nous en ferons de même pour $L_+^1(I)$. Ces espaces contiennent ceux obtenus par [12], et nous avons montré, à la section 5 de [8], que l'inclusion peut même être stricte.

Dans [12], la sous-additivité de I^* n'étant pas assurée dans $\text{cfb}(E)$, cette construction n'était possible que dans $\text{cc}(E)$.

Définition 2.5. On désigne par $\ell^1(I)$ l'adhérence de H dans H^* .

Proposition 2.6. On a $\ell^1(I) = \ell_+^1(I) - \ell_+^1(I)$, et $\ell_+^1(I) = \text{adh}(H_+)$ dans H_+^* .

Définition 2.7. On dit qu'une fonction f , de $\overline{\mathbb{R}}^T$, est I -négligeable si et seulement si :

$I^*(|f|) = \{0\}$. Un sous-ensemble A de T est I -négligeable, si 1_A est I -négligeable.

Définition 2.8. Soit $N \subset T$, un ensemble I -négligeable, une fonction définie sur $T-N$ est une fonction définie I -pp sur T . La relation définie par $f = g$ I -pp sur l'ensemble

$$F(T, \overline{\mathbb{R}}) = \{f \text{ définie } I\text{-pp sur } T, \text{ tel que } I^*(|f|) \in \text{cfb}(E)\},$$

est une relation d'équivalence. Si Δ est l'espace quotient de $F(T, \overline{\mathbb{R}})$ par la relation I -pp, alors Δ est un espace vectoriel.

Définition 2.9. On note

$$\mathcal{L}_+^1(I) = \{f \in F(T, \overline{\mathbb{R}}), f \geq 0 / \exists g \in L_+^1(I), f = g \text{ } I\text{-pp}\}.$$

On suppose dans toute la suite que E est normé sauf spécification contraire. Pour $f \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ si on pose :

$$N_1(f) = \sup\{\delta^*(y/I^*(|f|)), y \in E', \|y\| \leq 1\} = DH[\{0\}, I^*(|f|)],$$

alors N_1 est une semi-norme sur $F(T, \overline{\mathbb{R}})$. De plus on a $N_1(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ I -pp.

Définition 2.10. On dit qu'une suite, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $F(T, \overline{\mathbb{R}})$, converge en moyenne vers f , si $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(f_n - f) = 0$. La topologie de $F(T, \overline{\mathbb{R}})$, muni de la semi-norme N_1 , est la topologie de la convergence en moyenne. L'application $\hat{f} \in \Delta$, $\hat{f} \mapsto N_1(f)$ est une norme sur Δ , avec $f \in \hat{f}$.

Dans toute la suite, sauf spécification contraire, $F(T, \overline{\mathbb{R}})$ et Δ seront munis de N_1 .

Remarque 2.11. Soit $V_\epsilon = \{v \in E / \forall y \in E', \|y\| \leq 1 \Rightarrow \langle v, y \rangle < \epsilon\} \equiv B(0, \epsilon)$.

On a :

$V_\epsilon^* = \{f \in \mathbb{R}^T, N_1(f) < \epsilon\} \subset \{f \in F(T, \overline{\mathbb{R}}), N_1(f) < \epsilon\}$. Cela signifie que, si E est normé, la topologie de H^* est celle induite par la topologie de $F(T, \overline{\mathbb{R}})$: dans le cas où E est normé, la topologie de H^* , est celle induite par N_1 . Donc $L_+^1(I)$ et $\ell^1(I)$ sont munis de N_1 .

Définition 2.12. On désigne par $L^1(I)$ l'adhérence de H dans $F(T, \overline{\mathbb{R}})$, et on pose :

$$L^1_+(I) = \{ f \in L^1(I), f \geq 0 \}.$$

NB : On notera la différence entre $L^1_+(I)$ et $L^1_+(I)$, et si $\Theta \subset F(T, \overline{\mathbb{R}})$, on posera :

$$[\Theta]_C = \{ f \in \Theta, I^*(|f|) \in cc(E) \}.$$

Remarque 2.13.

- (1) On a : $[\ell^1_+(I)]_C \subset [L^1_+(I)]_C \cap \mathbb{R}^T \subset [L^1_+(I)]_C \subset [L^1_+(I)]_C \subset \mathcal{L}^1_+(I)$.
L'espace $[\ell^1(I)]_C$ correspond à celui obtenu par [12] pour l'intégrale multivoque et $[L^1_+(I)]_C \cap \mathbb{R}^T$ pour l'intégrale de Daniell secondaire. L'espace $L^1_+(I)$ est celui que nous avons obtenus, dans [5] ou [7], pour l'intégrale de Daniell, et nous l'avons agrandi par $\mathcal{L}^1_+(I)$ en y mettant une topologie ce qui n'existait pas dans [12] et [5]. L'espace $L^1(I)$ est celui que nous avons obtenus pour l'intégrale multivoque. D'autre part [12] a défini dans le cas $cfb(E)$ une fonction intégrable comme une fonction positive limite croissante de fonctions de H et dont l'intégrale supérieure est dans $cfb(E)$. Une telle fonction est intégrable pour notre définition, d'après le théorème 2.15 de la convergence monotone. Nous avons donc unifié trois méthodes d'intégrations de [12] en les généralisant à $cf(E)$, tout en faisant le lien avec [10]. cette comparaison sera mieux précisée à la remarque 3.4.
- (2) On a $[\ell^1(I)]_C = \text{adh}(H)$ dans $[H^*]_C$. Si E est complet, on a $[\ell^1(I)]_C = \ell^1(I)$ et, $[L^1(I)]_C = L^1(I)$, où $[L^1(I)]_C = \text{adh}(H)$ dans $[F(T, \overline{\mathbb{R}})]_C$. En effet si E est complet $cc(E)$ est fermé dans $cfb(E)$.

Nous rappelons les énoncés des théorèmes 2.14, 2.15, 2.16, et du corollaire 2.17, que nous avons obtenu dans [7] ou [8].

Théorème 2.14. *On suppose que E est normé.*

- (α) *Les espaces $\mathcal{L}^1_+(I)$ et $L^1(I)$ sont complets pour la topologie de la convergence en moyenne.*
- (β) *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $\mathcal{L}^1_+(I)$ (resp. $L^1(I)$) qui converge en moyenne vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite qui converge I-pp vers f .*

Théorème 2.15.

- (1) *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante I-pp de $\mathcal{L}^1_+(I)$, s'il existe $g \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ telle que $f_n \leq g$ I-pp pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et si on a $I^*(g) \in cfb(E)$, alors $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} f_n \in \mathcal{L}^1_+(I)$ et $\int (\sup_{n \in \mathbb{N}^*} f_n) I = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int f_n I$.*
- (2) *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante I-pp de $\mathcal{L}^1_+(I)$, alors $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} f_n \in \mathcal{L}^1_+(I)$ et $\int (\inf_{n \in \mathbb{N}^*} f_n) I = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int f_n I$.*

- (3) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $\mathcal{L}_+^1(I)$, s'il existe $g \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ telle que $f_n \leq g$ I-pp pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $I^*(g) \in \text{cfb}(E)$, et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f I-pp, alors $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$ et $\int fI = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n I$ au sens de l'ordre dans $\text{cfb}(E)$.

Théorème 2.16.

- (1) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante I-pp de $\mathcal{L}_+^1(I)$, si $f = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ et s'il existe $g \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ telle que $f_n \leq g$ I-pp pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et si $I^*(g) \in \text{cc}(E)$ alors $f \in [\mathcal{L}_+^1(I)]_C$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers f .
- (2) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante I-pp de $[\mathcal{L}_+^1(I)]_C$, et si $f = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$, alors :
 $f \in [\mathcal{L}_+^1(I)]_C$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers f .
- (3) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $[\mathcal{L}_+^1(I)]_C$, qui converge simplement I-pp vers une fonction f , s'il existe $g \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ telle que $|f_n| \leq g$ I-pp pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et si $I^*(g) \in \text{cc}(E)$, alors $f \in [\mathcal{L}_+^1(I)]_C$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers f .

Dans les trois cas on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n I = \int fI$ pour la topologie de $\text{cc}(E)$.

Corollaire 2.17. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $L^1(I)$, qui converge I-pp vers f , s'il existe $g \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ telle que $I^*(g) \in \text{cc}(E)$ et $|f_n| \leq g$ I-pp pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f \in L_+^1(I)$ et $\int fI = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n I$ au sens de la topologie de Hausdorff de $\text{cc}(E)$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers f .

3 Fonctions I-mesurables

Définition 3.1.

- (1) On dit qu'une fonction définie I-presque partout (I-pp) sur T , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, est I-mesurable si elle est limite I-presque partout d'une suite de H .
- (2) Un sous-ensemble A de T est I-mesurable si 1_A est I-mesurable.

Remarque 3.2.

- (1) Si M_1, M_2 sont deux multimesures définies sur Ω à valeurs dans $\text{cc}(E)$, dans $[10]$, :
- $\sup(M_1, M_2)(A) = \sup\{M_1(B) + M_2(D) / (B, D) \text{ est une } \Omega\text{-partition de } A\}$, la borne supérieure est prise dans $\text{cc}(E)$. La semi-variation M^\cdot de $[10]$, est définie par :

$\forall f \in H, M \cdot (f) = \sup\{\|x\|, x \in \int |f| |M|\}$, où $|M| = \sup(M, -M)$. Si E est complet alors pour tout f de $L^1(I)$, on a $I(f) \in cc(E)$. Si $M \cdot$ désigne la semi-variation de [10], d'après l'inégalité $N_1 \leq M \cdot \leq 2N_1$ sur H de [10] page 89, on peut voir que $\ell^1(I)$ est l'espace $\ell^1(M \cdot)$ de [10]. Dans [10], la $M \cdot$ -mesurabilité a été introduite. Cela pourrait, dans notre approche, correspondre à N_1 -mesurable. Cependant si E n'est pas complet, dans la méthode de [10], il se pose le problème du prolongement par continuité de l'intégrale qui se retrouve dans $cc(E'^*)$, où E'^* est le complété faible de E' . Ici, N_1 est définie à partir de I^* , ce qui permet de ne pas séparer l'intégrabilité d'avec le prolongement de l'intégrale, comme dans [10], d'introduire la notion de I-négigeable de façon naturelle, et de ne pas perdre le lien avec l'espace E où tout prend ses valeurs.

- (2) Si $f \in H^\vee \cup H^\wedge$, f est I-mesurable; donc si $A \in \Omega \cup \{T\}$, A est I-mesurable.
- (3) Si f et g sont I-mesurables et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(f + g)$, (αf) , $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont I-mesurables.
- (4) Si A, B sont I-mesurables, alors A^c , $A \cap B$, $A \cup B$ le sont.
- (5) Si $f \in L^1(I)$ ou $\ell^1(I)$, alors f est I-mesurable, d'après le théorème 2.14, i.e. II-1-2 de [7], voir aussi théorème 4.6 de [8].

Théorème 3.3.

- (1) Si f est I-mesurable positive, et si $I^*(f) \in cfb(E)$, alors on a :
 $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$.
- (2) Si f est I-mesurable et si $I^*(|f|) \in cc(E)$, alors $f \in L^1(I)$.

Preuve. (1) Vu que $I^*(f) \in cfb(E)$, on a : il existe $\psi \in H^\vee$ tel que $\psi \geq f$ et $I^\vee(\psi) \in cfb(E)$. De plus, il existe $k_n \in H_+$ tel que $k_n \rightarrow f$ I-pp. Soit $\psi_n = \inf(k_n, \psi) \in \mathcal{L}_+^1(I)$, et soit $f_n = \sup_{k \geq n} \psi_k$, on a : $g_p = \sup\{\psi_n, \dots, \psi_{n+p}\} \in$

$\mathcal{L}_+^1(I)$, $g_p \leq \psi$ et $g_p \uparrow f_n$ I-pp. D'après le théorème 2.15 de la convergence monotone, ou II-1-1 de [7], $f_n \in \mathcal{L}_+^1(I)$. De plus $f_n \downarrow f$ I-pp, d'où : $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$ d'après le théorème 2.15 de la convergence monotone.

(2) Si on suppose $f \geq 0$, soit $k_n \in H_+$, $k_n \rightarrow f$ I-pp, posons : $\Phi_{n_p} = \inf\{k_n, \dots, k_{n+p}\}$, on a : $\Phi_{n_p} \downarrow \Phi_n = \inf_{p \geq n} k_p$. D'après le théorème 2.16 on a : $\Phi_n \in [L_+^1(I)]_C = \{f \in L_+^1(I), I(f) \in cc(E)\}$. De plus $\Phi_n \uparrow f$ et $I^*(f) \in cc(E)$, donc $f \in [L_+^1(I)]_C$.

Si f est de signe quelconque on a $f = f^+ - f^- \in [L_+^1(I)]_C - [L_+^1(I)]_C = [L^1(I)]_C$. □

Remarque 3.4.

- (1) D.S.Thiam, dans [12] page 115, donne un procédé d'intégration par rapport à une multimesure faible à valeurs dans $cfb(E)$ définie sur une tribu : voir notre remarque 2.13. Une fonction intégrable dans ce sens vérifie le théorème 3.3, (1) et donc appartient à $\mathcal{L}_+^1(I)$.

- (2) D'après le théorème 3.3, (2) on a : $[L^1(I)]_C = \{f : f \text{ I-mesurable}, |f| \in [\mathcal{L}_+^1(I)]_C\}$, i.e. que les fonctions intégrables pour l'intégrale multivoque de [12], sont celles qui sont I-mesurables, et dont la valeur absolue est Daniell-intégrable.
- (3) Nous unifions ainsi trois méthodes d'intégration de [12]. Le lien entre ces méthodes avait été établi dans [8]. La comparaison entre l'intégrale multivoque et l'intégrale de Daniell est ici plus précise. La question que nous avons posé dans la remarque 5.3 de [8], se reformule comme suit : une fonction intégrable pour l'intégrale de Daniell est-elle I-mesurable ?
- (4) Le théorème 3.3 signifie qu'une fonction I-mesurable, dominée par une fonction intégrable est intégrable. Nous obtenons donc ainsi un critère, fort, d'intégrabilité.

Proposition 3.5. *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions I-mesurables qui converge I-pp vers f , alors f est I-mesurable.*

Preuve. Soit $u_n = n1_{T_n}$ avec $T_n \uparrow T$, $T_n \in \Omega$, $M(T_n) \in cc(E)$.

La fonction $v_n = \sup[-u_n, \inf(f_n, u_n)]$, est I-mesurable et, $|v_n| \leq u_n \in H_+$, donc $v_n \in L^1(I)$ d'après le théorème 3.3 ou II-3-1 de [7]. Soit $t \in T$ tel que $f_n(t) \rightarrow f(t)$, on a :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(t) = f(t)$ donc $v_n \rightarrow f$ I-pp. Il existe $w_n \in H$ tel que $N_1(w_n - v_n) \leq 2^{-n}$, car H est dense dans $L^1(I)$. D'après le théorème 2.14, il existe une sous-suite $(w_{n_k} - v_{n_k}) \rightarrow 0$ I-pp, et on obtient : $w_{n_k} = (w_{n_k} - v_{n_k}) + v_{n_k} \rightarrow f$ I-pp, ie, f est I-mesurable. \square

Proposition 3.6. *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions I-mesurables alors $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$, $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$ sont I-mesurables.*

Preuve. Cela résulte de la proposition 3.5 \square

Théorème 3.7. (Théorème de caractérisation de Lebesgue)

- (1) Soit f définie I-pp sur T à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ une fonction I-mesurable. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont I-mesurables : $\{t \in T, f(t) < \alpha\} = \{f < \alpha\}$, $\{f > \alpha\}, \{f \leq \alpha\}, \{f \geq \alpha\}$.
- (2) Réciproquement, si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{f < \alpha\}$ est I-mesurable, resp. $\{f > \alpha\}$, resp. $\{f \leq \alpha\}$, resp. $\{f \geq \alpha\}$, alors f est I-mesurable.

Preuve. On a : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{f < \alpha + \frac{1}{n}\} = \{f \leq \alpha\}$, $\{f > \alpha\} = \{f \leq \alpha\}^C$, et $\{f \geq \alpha\} = \{f < \alpha\}^C$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble $A = \{f < \alpha\}$ est I-mesurable. Soit $g = \inf(f, \alpha 1_T)$, pour $n = 1, 2, \dots$

on pose : $f_n = n[\alpha 1_T - \sup(g, (\alpha - \frac{1}{n})1_T)]$. On a f est définie sur $T-N$ où N

est I-négligeable. Soit $t \in T - N$ si $f(t) \geq \alpha$ ie $t \in A^C$, alors $f_n(t) = 0$, donc $f_n(t) \rightarrow 1_A(t)$. Si $f(t) < \alpha$, ie $t \in A$, alors il existe n_0 tel que $f(t) < \alpha - \frac{1}{n_0}$, donc pour tout $n > n_0$, $f(t) < \alpha - \frac{1}{n}$, ie $f_n(t) = 1_A(t)$. On en déduit que $f_n \rightarrow 1_A$ I-pp, et 1_A est I-mesurable.

Réciproquement : Soit $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose $A_{n_k} = \{t \in T, \frac{k}{n} \leq f(t) < \frac{k+1}{n}\}$, alors A_{n_k} est I-mesurable. Si $k \neq k'$, on a : $A_{n_k} \cap A_{n_{k'}} = \emptyset$, et $\sum_{k=-p}^{k=p} (\frac{k}{n} 1_{A_{n_k}}) \rightarrow$

$f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{k}{n} 1_{A_{n_k}})$, car pour tout t fixé, il n'y a qu'un A_{n_k} qui contient t , et donc

f_n est I-mesurable. Les ensembles $A = \{f = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f > n\}$, et $B = \{f = -\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f < -n\}$ sont I-mesurables. Si on pose : $g_n = f_n + n 1_A - n 1_B$, alors g_n est I-mesurable. Si $t \in A$, $g_n(t) = f_n(t) + n \rightarrow +\infty = f(t)$, si $t \in B$, $g_n(t) = f_n(t) - n \rightarrow -\infty = f(t)$, car, dans chacun de ces cas, on a $f_n(t) = 0$. Si $t \in T - N$, et, $t \notin A \cup B, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{k}{n} \leq f(t) < \frac{k+1}{n}$, ie $t \in A_{n_k}$, et donc on a $f_n(t) = \frac{k}{n}$. On obtient alors : $|f(t) - f_n(t)| = |f(t) - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$. On en déduit que $f_n \rightarrow 0$ I-pp, ie, f est I-mesurable. \square

Proposition 3.8. Soient f et g deux fonctions I-mesurables alors fg est I-mesurable.

Preuve. f^2 est I-mesurable car, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{|f| \leq a\}$ est I-mesurable. Et comme :

$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$, on obtient que fg est I-mesurable. \square

4 L'espace $L^\infty(I)$ ou $L^\infty(M)$

Définition 4.1. Soit f définie I-pp sur T , on appelle I-borne supérieure de f : $B(f) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}, f \leq \alpha 1_T \text{ I-pp}\}$.

Proposition 4.2.

(1) On a $B(f)$ est le plus petit majorant I-pp de f .

(2) On a aussi :

(i) $B(|f|) = 0$ si et seulement si $f = 0$ I-pp,

(ii) $B(|\alpha f|) = |\alpha| B(|f|)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

(iii) $B(|f+g|) \leq B(|f|) + B(|g|)$,

(iv) et $B(|fg|) \leq B(|f|)B(|g|)$.

Preuve. (1) : Si $B(f) = +\infty$, c'est fini. Sinon, soit $A = \{t \in T, f(t) > B(f)\}$, A est I_y -négligeable, pour tout $y \in E'$, ie, $\delta^*(y/I^*(1_A)) = 0$, et donc, $I^*(1_A) = 0$. Le (2) est une conséquence de la définition 4.1. \square

Remarque 4.3. Si $f = g$ I-pp, alors on a $B(f) = B(g)$.

Définition 4.4. Nous posons : $L^\infty(I) = \{ f \text{ définie I-pp, } f \text{ I-mesurable, } B(|f|) < +\infty \}$, il est muni de la topologie de la convergence uniforme I-pp définie par la semi-norme :

$$N_\infty(f) = B(|f|).$$

L'espace quotient $L^{(\infty)}(I)$, est muni de la topologie de la norme : $\|\bar{f}\| = N_\infty(f)$, où $f \in \bar{f}$.

Proposition 4.5. Soient $f \in L^\infty(I)$ et $g \in L^1(I)$ on a :

- (1) si $I^*(|g|) \in cc(E)$, alors $fg \in L^1(I)$,
- (2) si $I^*(|g|) \in cfb(E)$, alors $|fg| \in \mathcal{L}_+^1(I)$,

dans les deux cas on a $N_1(fg) \leq N_\infty(f)N_1(g)$.

La fonction fg est I-mesurable, d'après la proposition 3.8. Comme $|fg| \leq N_\infty(f)|g|$ I-pp, en appliquant le théorème 3.3, on a le résultat. \square

Proposition 4.6. Si $M : \Omega \rightarrow cfb(E)$ est une multimesure faible, monotone, s-compacte, et si I désigne l'intégrale associée à M , pour $f \in L_+^\infty(I)$, si on pose $N(A) = \int f 1_A I$, $A \in \Omega$, alors N est une multimesure faible monotone s-compacte et on a : $N(A) \subset N_\infty(f)M(A)$.

Preuve. On a : $f \leq N_\infty(f)1_T$ I-pp $\Rightarrow f 1_A \leq N_\infty(f)1_A$ I-pp. Donc $f 1_A$ est I-intégrable, et $N(A) \subset N_\infty(f)M(A)$. Vu que M est monotone, on a $0 \in N(A)$, de plus N est additive, par définition. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $A_n \in \Omega$ tel que $1_{A_n} \downarrow 0$, d'après le théorème de la convergence monotone, appliqué à l'intégrale positive I_y , on a $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int f 1_{A_n} I_y = 0$. avec la proposition 2.4 (4), on a : $\int f 1_{A_n} I_y = \delta^*(y / \int f 1_{A_n} I) = \delta^*(y/N(A_n))$. Ainsi, on obtient : $0 = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \delta^*(y/N(A_n))$. La mesure positive $\delta^*(y/N(\cdot))$, étant finie, on a le résultat. \square

Définition 4.7. On dira que N dans la proposition 4.6, admet f comme densité par rapport à M .

Proposition 4.8. Posons $J(h) = \int h f I$, si $h \in H_+$, alors on a :

- (1) si $\psi \in H^\vee$, alors $J^\vee(\psi) = I^*(\psi f)$,
- (2) si $g \in \bar{R}_+^T$, alors $J^*(g) \subset N_\infty(f)I^*(g)$,
- (3) si g est I-négligeable alors g est J -négligeable,
- (4) et si g est I-mesurable alors g est J -mesurable.

Preuve. L'intégrale de Daniell J est celle associée à N . D'après la proposition 2.4 assertion (4), i.e. le théorème II-1-1 [7], on a : $J^\vee(\psi) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} I^*(h_n f) = I^*(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} h_n f)$. On obtient : $J^\vee(\psi) = I^*(\psi f)$, et, $J^*(g) \subset J^\vee(\psi) = I^*(\psi f) \subset$

$N_\infty(f)I^\vee(\psi)$, pour tout $\psi \in H^\vee$, tel que $\psi \geq g$. On en déduit que : $J^*(g) \subset N_\infty(f)I^*(g)$.

Le (3) et le (4) découlent de l'assertion 2). \square

Théorème 4.9. *Si $g \in L^1(I)$ alors on a $g \in L^1(J)$ et $\int gJ = \int fgI$.*

Preuve. Si $g \in L^1_+(I)$, d'après le théorème 2.14, il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de H_+ , telle que $h_n \rightarrow g$ dans $L^1_+(I)$, et $h_n \rightarrow g$ I-pp. Vu que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $L^1(I)$, donc d'après la proposition 4.8 (2), $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $L^1(J)$, et $h_n \rightarrow g$ J-pp. On a donc, d'après le théorème 2.14, $h_n \rightarrow g$ dans $L^1(J)$. On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n J = \int gJ$, dans $cfb(E)$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n J = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n f I$, de plus $(h_n f)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $L^1(I)$, et $h_n f \rightarrow fg$ I-pp, on en déduit que $h_n f \rightarrow fg$ dans $L^1(I)$. On obtient alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n f I = \int fgI$. Si $g \in L^1(I)$, on pose $g = g^+ - g^-$. \square

Théorème 4.10. *Soient $f_1, f_2 \in L^{\infty}_+(I)$ tels que : $\forall \varphi \in H_+$, $\int \varphi f_1 I = \int \varphi f_2 I$, On a alors $f_1 = f_2$ I-pp, ie que l'on peut identifier : $f \in L^{\infty}_+(I)$ à : $\varphi \rightarrow \int \varphi f I$, ou à $A \rightarrow \int f 1_A I$, $A \in \Omega$.*

NB : Tout élément f de $L^{\infty}_+(I)$, s'identifie à une multimesure monotone s-compacte, admettant f comme densité par rapport à I (ou M).

Preuve. Soit $A = \{t \in T : f_1(t) \geq f_2(t)\}$, d'après le théorème 3.7 de caractérisation de Lebesgue, A est I-mesurable. On a $|f_1 - f_2|1_A + f_2 1_A = f_1 1_A$. On en déduit :

$$\int h|f_1 - f_2|1_A I + \int h f_2 1_A I = \int h f_1 1_A I. \quad (4.1)$$

De plus soit $J_i(h) = \int h f_i I$, $h \in H_+$ avec $i = 1, 2$, on a $J_1 = J_2$ par hypothèse. En utilisant les théorèmes 3.3 et 4.9, on a $\varphi 1_A \in L^1_+(J)$. Si $g = h 1_A$, d'après le théorème 4.9, $\int g J_i = \int g f_i I$. Or $J_1 = J_2$, donc $\int g f_1 I = \int g f_2 I$, ie, $\int h f_1 1_A I = \int h f_2 1_A I$, pour tout $h \in H_+$. Avec 4.1, on a : $\forall y \in E'$, $\delta^*(y / \int h|f_1 - f_2|1_A I) = 0$, ie $\int h|f_1 - f_2|1_A I = 0$. On en déduit, par symétrie, que $|f_1 - f_2|1_A = |f_1 - f_2|1_{A^c} = 0$ I-pp. Vu que : $|f_1 - f_2| = |f_1 - f_2|1_A + |f_1 - f_2|1_{A^c}$ I-pp, on a alors $f_1 = f_2$ I-pp. \square

Théorème 4.11. *L'espace $L^\infty(I)$ est complet, et son espace quotient est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier k_n tel que : $r, s \geq k_n \Rightarrow N_\infty(f_r - f_s) < \frac{1}{n}$. Il existe un I-négligeable $A_{r,s}$, tel que, si $t \notin A_{r,s}$, alors $|f_r(t) - f_s(t)| < \frac{1}{n}$. Soit A_n la réunion des $A_{r,s}$;

pour $r, s \geq k_n$, A_n est un I-négligeable, et si $t \notin A_n$, on a : pour $r, s \geq k_n$, $|f_r(t) - f_s(t)| < \frac{1}{n}$. L'ensemble $A = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est I-négligeable, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f , sur $T - A$. On prendra $f(t)=0$, si $t \in A$. De plus, $N_\infty(f_n)$ converge vers un réel a , et $|f_n(t)| \leq N_\infty(f_n)$. On a alors, $f \in L^\infty(I)$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $T-A$, on a $N_\infty(f_n - f)$ tend vers 0, ie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers f dans $L^\infty(I)$. \square

Proposition 4.12. *On suppose $J \neq 0$ ie $f \neq 0$ I-pp, on a :*

- (1) $I^*(gf) \subset J^*(g)$,
- (2) et si $g \in L^1(J)$, alors $(fg) \in L^1(I)$, et $\int gJ = \int fgI$.

Preuve. (1) : On a :

$J^*(g) = \inf\{J^\vee(\psi), \psi \in H^\vee, \psi \geq g\} = \inf\{I^\vee(f\psi), \psi \in H^\vee, \psi \geq g\}$. Comme $I^*(fg) \subset I^*(\psi f)$, nous avons que $I^*(fg) \subset J^*(g)$. Si $A \subset T$ est J-négligeable, alors A est I-négligeable car : $J^*(1_A) = 0 \Rightarrow I^*(1_A f) = 0 \Rightarrow 1_A f = 0$ I-pp, d'où : $1_A = 0$ I-pp.

(2) : Si g est une fonction en escaliers, on a $\int gJ = \int fgI$. Si $g \in L^1(J)$, il existe $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions en escaliers qui converge J-pp vers g , avec $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant aussi vers g dans $L^1(J)$, et donc $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $L^1(J)$. Nous avons alors, $\int |g_n f - g_m f|I = \int |g_n - g_m|J$, ie $(g_n f)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $L^1(I)$. Donc il existe $h \in L^1(I)$, tel que $\int g_n f I$ converge vers $\int hI$ dans $\text{cfb}(E)$, et $g_n f$ tend vers h I-pp. Or $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers g J-pp, donc $(g_n f)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers gf J-pp. Nous en déduisons que $g_n f$ tend vers gf I-pp, et donc $h = fg$ I-pp. On a alors : $gf \in L^1(I)$, et $\int hI = \int fgI$. On en déduit : $\int gJ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n J = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int fg_n I = \int fgI$. Si E est complet, $[L^1(I)]_C = L^1(I)$, d'après la proposition 2 page I-15 de [9], voir aussi [6], ou [7] : en effet $\text{cc}(E)$ est alors fermé dans $\text{cfb}(E)$. \square

Proposition 4.13. *On suppose que E est un espace de Banach, m une mesure vectorielle relativement faiblement compacte, définie sur Ω à valeurs dans E . Si f est définie m -pp sur T à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est m -mesurable, s'il existe g tel que $I^*(g) \in \text{cc}(E)$, et si $|f| \leq g$, alors f est m -intégrable.*

Preuve. Soit $A \in \Omega$, on désigne par :

$$M_m(A) \text{ l'adhérence dans } E, \text{ de toutes les sommes } \sum_{i \in I} \lambda_i m(A_i), \text{ où, } \\ \{A_i, i \in I\} \text{ est une } \Omega\text{-partition de } A, \text{ et où } \lambda_i \in R, \text{ avec, } |\lambda_i| \leq 1.$$

On a $\delta^*(y : M_m(A)) = |m_y|(A)$, où $|m_y|$ est la variation totale de $m_y = \langle m(\cdot), y \rangle$, $y \in E'$, (cf lemme 5.1, page 141 [12]), et $M_m : \Omega \rightarrow \text{cc}(E)$, est une multimesure forte monotone ie :

$0 \in M_m(A)$ pour tout $A \in \Omega$, M_m est additive, et si $\{A_n, n=1,2,\dots\}$ est une Ω -partition de $A \in \Omega$, alors $M_m(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n M_m(A_i)$, pour la topologie

de $cc(E)$. On a M_m est s-compacte, $N_1(1_A) = \bar{m}(A) \leq |m|(A)$, $A \in \Omega$, où N_1 est la semi-norme de la topologie de la convergence en moyenne, et $|m|$ est la variation de m . En posant $N_2(f) = \int |f||m|$, pour $f \in H$, et en prolongeant N_2 à $\overline{\mathbb{R}}_+^T$ comme dans [10], voir aussi [11], on a :

$$N_1(f) \leq N_2(f) = |m|^*(f), \text{ si } f \in \overline{\mathbb{R}}_+^T.$$

Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^T$, on posera $N_2(f) = N_2(|f|)$. On a donc : $N_1(f) \leq N_2(f) = |m|^*(|f|)$, si $f \in \overline{\mathbb{R}}^T$. Donc si $A \subset T$ est m -négligeable, alors A est M_m négligeable ; et si f est définie m -pp sur T , alors f l'est M_m -pp. Nous posons : $L^1(m) = L^1(M_m)$. Si f est définie m -pp sur T et est m -mesurable, alors f est définie M_m -pp, et est M_m -mesurable. On applique ensuite le théorème 3.3. \square

NB : Nous retrouvons ainsi un résultat classique, voir par exemple [3], proposition 19, page 136.

Remarque 4.14. Nous avons obtenus, dans ce papier, des techniques de démonstrations, qui s'apparentent à celles pour une mesure scalaire positive. Et pourtant il s'agit bien d'une multimesure faible, à valeurs dans $cf(E)$.

Références

- [1] C. Castaing, M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag*, 580 (1977), 37– 50.
- [2] A. Costé, Contribution à la théorie de l'intégration multivoque, *thèse d'état*, Paris 6, (1977).
- [3] N. Dinculeanu, Vector Measures, *Pergamon Press Veb-Berlin*, Vol. 95 (1967), §. 8, p. 119.
- [4] C. Godet-Thobie, Multimesures et multimesures de transition. *thèse d'état*, Montpellier, (1975).
- [5] G. B. Ndiaye, Intégration par rapport à une multimesure s-compacte monotone, *Journal des sciences - Dakar*, Vol. 3 (2003), no. 1, 44–50.
- [6] G. B. Ndiaye, Prolongeabilité et richesse d'une multimesure s-compacte à valeurs convexes fermées bornées, conditions de compacité, *Journal des sciences - Dakar*, Vol. 3 (2003), no. 2, 51–55.
- [7] G. B. Ndiaye, Multimesures et multimesures de Radon séquentiellement compactes, *thèse d'état*, u. c. a. d., Dakar, (2004).
- [8] G. B. Ndiaye, L'intégration par rapport a une multimesure, monotone et s-compacte, a valeurs convexes fermées, a paraître dans : *African Diaspora Journal of Mathematics (ADJM)*, Vol. 6, no. 1.

- [9] R. Pallu De La Barrière, Une alternative au théorème de Banach-Dieudonné, *Seminaire d'analyse convexe*, Montpellier, vol. II, fascicule I (1981), Exposé no. 1, I.1–I.19.
- [10] R. Pallu De La Barrière, Intégration : Un nouvel itinéraire d'initiation à l'analyse mathématique, *Ellipses* (1997), Paris.
- [11] K. Siggini, Sur les propriétés de régularité des mesures vectorielles et multivoques sur des espaces topologiques généraux, *thèse de doctorat*, Paris 6, (1992).
- [12] D. S. Thiam, Intégration dans les espaces ordonnés et intégration multivoque, *thèse d'état*, Paris 6, (1976).

Gabriel Birame Ndiaye
Département de Mathématiques-Informatique, Université Cheikh Anta Diop,
Dakar, BP 5005, Sénégal
e-mail: gabrielbirame@ucad.sn, gabrielbirame@yahoo.fr

The cover time of the cube.

José Luis Palacios

Resumen. Encontramos el tiempo esperado de cobertura del cubo tridimensional usando herramientas elementales, de acuerdo con los resultados de Ball y Dunham [2]. Adicionalmente, damos las probabilidades de que los dos últimos vértices en ser visitados estén a distancia 1, 2 ó 3.

Abstract. We find the expected cover time for the random walk on the three dimensional cube with elementary tools, agreeing with the result of Ball and Dunham [2]. As a bonus, we give the probabilities that the last two vertices to be covered are at distances 1, 2 or 3.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary: 60J15; secondary: 60C05.

1 Introduction.

The simple random walk on a graph $G = (V, E)$, where V is the set of vertices and E is the set of edges, is the Markov chain $X_n, n \geq 0$, that from its current vertex v jumps to the neighboring vertex w with probability $p_{vw} = \frac{1}{d(v)}$, where $d(v)$ is the degree of v , that is, the number of neighbors of v . We denote by $E_a T_b$ and $E_a C$ the expected value, starting from the vertex a , of respectively, the hitting time T_b of the vertex b , i. e., the number of jumps needed to visit vertex b , and the cover time C , i. e., the number of jumps needed to visit all the vertices in V . A great deal of attention has been devoted to random walks on graphs and their hitting and cover times, as can be attested in Aldous [1]. The aim of this note is to find $E_a C$ when the graph G under consideration is the three dimensional cube, using elementary tools, as opposed to the approach of Ball and Dunham in [2], where they use advanced Markov chain theory in order to provide a general formula for $E_a C$ for any graph, and where they explicitly compute all relevant times for the three dimensional cube, in agreement with our calculations. In fact, this note can be seen as an extended exercise in conditional probability and conditional expectation that may be used in any elementary course in Probability Theory. As a bonus, we obtain the probabilities that the last two vertices to be covered are at distance 1, 2 or 3, a result not found elsewhere.

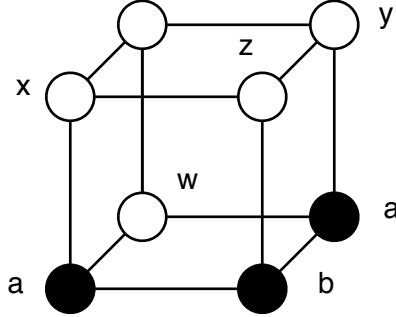


Figure 1. Scheme 0.

It is plain to see that

$$E_a C = \sum_{k=1}^7 E_{\{k-1\}} T_{\{k\}}, \quad (1)$$

where $E_{\{k-1\}} T_{\{k\}}$ is the k -th partial cover time, that is, the expected time it takes the random walk to go from the $k-1$ -st newly visited vertex, denoted $\{k-1\}$, to the k -th newly visited vertex $\{k\}$. The starting vertex $\{0\}$ is a , and obviously $E_{\{0\}} T_{\{1\}} = 1$. Now we notice that $T_{\{2\}}$ is a geometric random variable (the walk may go back and forth from $\{0\}$ to $\{1\}$ before visiting a new vertex) with parameter $\frac{2}{3}$, and so $E_{\{1\}} T_{\{2\}} = \frac{3}{2}$. At this point, if we paint the visited vertices in black and those not visited yet in white, we have what we call scheme 0 (see figure 1), where the walk is at either of the vertices denoted a .

In order to find $E_{\{2\}} T_{\{3\}}$, we condition on the first step the walk takes, starting from a (see figure 1) obtaining the set of equations

$$\begin{aligned} E_a &= 1 + \frac{1}{3} E_b \\ E_b &= 1 + \frac{2}{3} E_a. \end{aligned} \quad (2)$$

Here, and in what follows, E_v will denote the expected time, starting from v , to reach a vertex not visited yet. Solving the system we find that $E_{\{2\}} T_{\{3\}} = E_a = \frac{12}{7}$.

Now things start to get more complicated and we need a tree to describe the next partial cover times.

2 The tree of schemes.

The symmetry of the cube allows us to reduce all possible cases to a handful, listed in figure 2. In all cases, a represents the starting vertex for the walk in that particular scheme. From scheme 0 the walk moves into one of the schemes I, II or III. From scheme I the time to reach a new vertex is a geometric random variable with parameter $\frac{1}{3}$, and therefore $E_a = 3$. From scheme II we need to solve the system of equations

$$\begin{aligned} E_a &= 1 + \frac{1}{3}E_b \\ E_b &= 1 + \frac{1}{3}E_a + \frac{1}{3}E_b, \end{aligned} \quad (3)$$

with solution $E_a = \frac{9}{5}$. Also, from scheme III, we get the system of equations

$$\begin{aligned} E_a &= 1 + \frac{1}{3}E_b \\ E_b &= 1 + E_a, \end{aligned} \quad (4)$$

with solution $E_a = 2$.

Now we find the probabilities that the walk lands from the vertex $\{2\}$ (i.e., vertex a in scheme 0) into either scheme I, II or III in order to find $E_{\{3\}}T_{\{4\}}$ as a sum of conditional expectations. If we look at figure 1, and we denote by p_v the probability $P_v(T_w < T_{\{x,y,z\}})$, starting from v , of hitting vertex w before hitting one of the vertices x, y, z , then we have the following system of equations

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p_b \\ p_b &= \frac{2}{3}p_a, \end{aligned} \quad (5)$$

from which we get the solution $p_a = \frac{3}{7}$ of making a transition from scheme 0 into scheme I. Likewise, if we denote by p_v the probability $P_v(T_{\{x,y\}} < T_{\{z,w\}})$, starting from v , of hitting one of the vertices x, y before hitting one of the vertices z, w , then we have the same system of equations (5) as before, with solution $p_a = \frac{3}{7}$ of making a transition from scheme 0 into scheme II. Obviously, the transition probability from scheme 0 to scheme III is $\frac{1}{7}$. All transition probabilities among the different schemes are depicted in the branches of the tree in figure 3.

Thus we obtain

$$E_{\{3\}}T_{\{4\}} = 3 \cdot \frac{3}{7} + \frac{9}{5} \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{82}{35}. \quad (6)$$

Now we turn to the computation of $E_{\{4\}}T_{\{5\}}$. First we notice that from scheme I we can only get to the scheme IV (see figure 2). If the walk starts

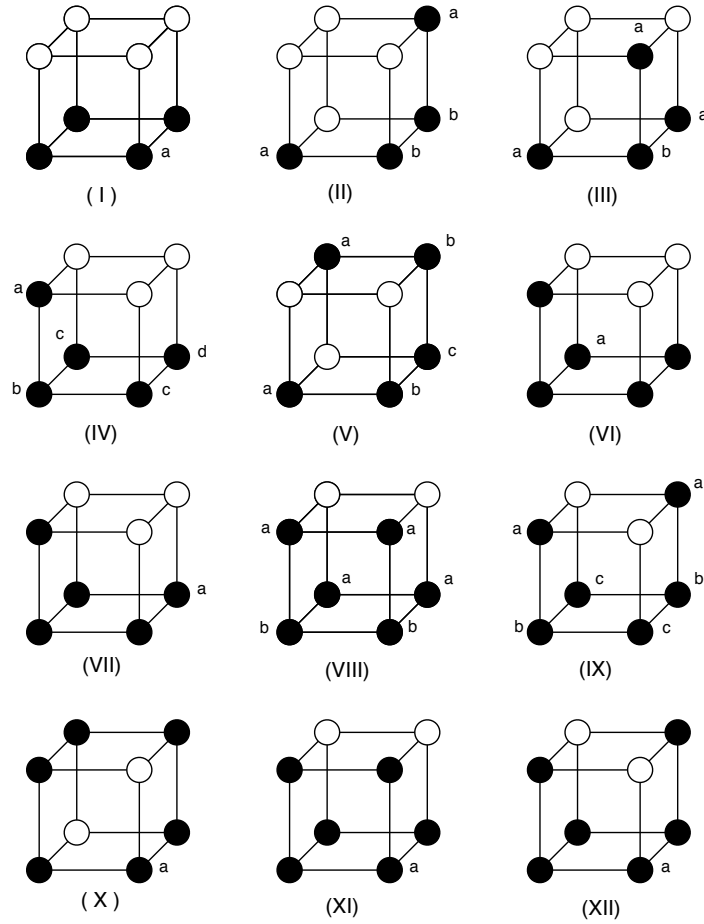


Figure 2. Schemes I through XII

from a in this scheme IV, and with the usual notation we get the system of equations

$$\begin{aligned}
 E_a &= 1 + \frac{1}{3}E_b \\
 E_b &= 1 + \frac{1}{3}E_a + \frac{2}{3}E_c \\
 E_c &= 1 + \frac{1}{3}E_b + \frac{1}{3}E_d \\
 E_d &= 1 + \frac{2}{3}E_c,
 \end{aligned} \tag{7}$$

from which we get the solution $E_a = \frac{45}{19}$.

Scheme II gives rise to two different schemes, V and VI. Associated to scheme V we get the following set of equations

$$\begin{aligned} E_a &= 1 + \frac{1}{3}E_b \\ E_b &= 1 + \frac{1}{3}E_a + \frac{1}{3}E_c \\ E_c &= 1 + \frac{2}{3}E_b, \end{aligned} \tag{8}$$

with solution $E_a = \frac{11}{6}$.

Scheme VI is just scheme IV started from c , so from (7) we get $E_c = \frac{66}{19}$. Scheme III gives rise only to scheme VII, which is again scheme IV but started from d and thus, (7) gives us $E_d = \frac{63}{19}$. In the same way as in (6), we obtain $E_{\{4\}T_{\{5\}}}$ as a sum of conditional expectations given that the walk lands on one of schemes IV, V, VI or VII. A simple system of equations tells us that the transition from II to either V or VI occurs with probabilities, respectively, $\frac{2}{5}$ and $\frac{3}{5}$, and this plus a look at figure 3 gives us

$$E_{\{4\}T_{\{5\}}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{45}{19} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{66}{19} + \frac{1}{7} \cdot \frac{63}{19} = \frac{1793}{665}. \tag{9}$$

The computation of $E_{\{5\}T_{\{6\}}}$ proceeds in the same way. We just must be careful with the bookkeeping. The tree in figure 3 describes how we obtain the new schemes VIII through XII from schemes IV through VI, with the further simplifications that scheme X implies a geometric time to visit a new vertex with parameter $\frac{1}{3}$, XI equals VIII started from b and XII equals IX started from c . Each branch of the tree is labeled with the conditional probability of transition from one scheme to the next, and the outermost vertices of the tree (the leaves) are labeled with the expected times to visit the new vertex $\{6\}$ when the walk is started from the scheme with the respective label. Thus

$$\begin{aligned} E_{\{5\}T_{\{6\}}} &= \frac{3}{7} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{9}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{18} \cdot 3 \\ &\quad + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{18} \cdot 6 + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{18} \cdot 4 + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{9}{2} \\ &\quad + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{5601}{1330}. \end{aligned} \tag{10}$$

Now in order to find the last partial cover time $E_{\{6\}T_{\{7\}}}$ we notice that schemes VIII and XI lead to a situation where the last visited vertex is at distance 1 from the vertex visited next to last; schemes IX and XII lead to a

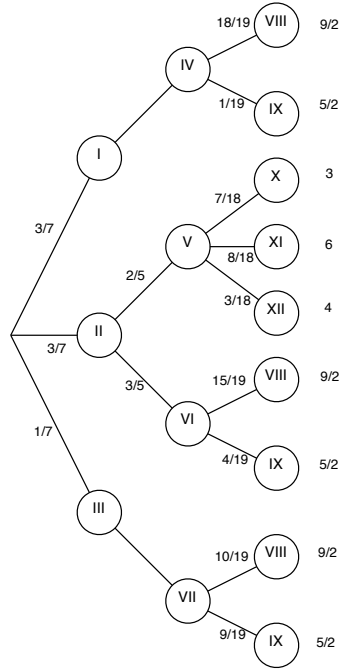


Figure 3. The tree.

situation with distance 2 between the last two vertices to be visited, and scheme X implies a distance 3 between the two last visited vertices. Computing through the branches in the tree, we find that the probabilities $p_{\{i\}}$ that the last two vertices to be visited are at distance i , $1 \leq i \leq 3$, are

$$p_{\{1\}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{18}{19} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{19} + \frac{1}{7} \cdot \frac{10}{19} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{18} = \frac{1517}{1995}, \quad (11)$$

$$p_{\{2\}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{19} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{18} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{19} + \frac{1}{7} \cdot \frac{9}{19} = \frac{23}{133}, \quad (12)$$

$$p_{\{3\}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{18} = \frac{1}{15}. \quad (13)$$

It is interesting to notice that whereas there are 12 pairs of points in the cube at distance 1, 12 pairs at distance 2 and 4 pairs at distance 3, the probability that the last two vertices to be visited are at distance 1 is over four times larger than that of being at distance 2 and over ten times larger than that of being at distance 3. This is somehow related to the fact that the probabilities of which

vertex is the last to be visited in the cube are not uniformly distributed over all vertices, as is shown in reference [3].

Now we find the hitting times E_i between any two vertices at distance i , $1 \leq i \leq 3$ by conditioning on the first step taken by the walk, getting the system of equations

$$\begin{aligned} E_1 &= 1 + \frac{2}{3}E_2 \\ E_2 &= 1 + \frac{2}{3}E_1 + \frac{1}{3}E_3 \\ E_3 &= 1 + E_2, \end{aligned} \tag{14}$$

with solutions $E_1 = 7$, $E_2 = 9$, $E_3 = 10$.

Now (11), (12), (13) and (14) yield the last expected partial cover time:

$$E_{\{6\}T_{\{7\}}} = \frac{1517}{1995} \cdot 7 + \frac{23}{133} \cdot 9 + \frac{1}{15} \cdot 10 = \frac{5018}{665}. \tag{15}$$

Finally, (1) allows us to compute

$$E_a C = 1 + \frac{3}{2} + \frac{12}{7} + \frac{82}{35} + \frac{1793}{665} + \frac{5601}{1330} + \frac{5018}{665} = \frac{1996}{95},$$

in perfect agreement with the results in reference [2].

References

- [1] Aldous D. J., Fill, J. , Reversible Markov chains and random walks on graphs, 2005. <http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/RWG/book.html>
- [2] Ball, F., Dunham, B. **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 207: 506-514, 1997.
- [3] Lovász, L., Winkler, P. **Journal of Graph Theory** 17: 593-596, 1993.

José Luis Palacios.

Departamento de Cómputo Científico y Estadística.

Universidad Simón Bolívar. Apartado 89,000. Caracas. Venezuela.

Moving cards arbitrarily with perfect k -shuffles

Roy Quintero*

Resumen. El propósito de esta investigación es encontrar una manera de mover cualquier carta de un paquete de kn cartas a cualquier posición deseada mediante la aplicación consecutiva de varias k -barajadas perfectas con k y n enteros cualesquiera mayores que 1. Este tipo de barajada fue introducido en [5] como una generalización natural de las usuales barajadas, las asíllamadas barajada externa y barajada interna, en las que el paquete es dividido en dos pilas, permitiendo que éste sea dividido en k pilas.

Abstract. The purpose of this research is to find a way for moving any card at a deck of kn cards to any desired position by the application of many consecutive perfect k -shuffles with k and n any integers greater than 1. This kind of shuffle was introduced in [5] as a natural generalization of usual shuffles, the so-called out-shuffle and in-shuffle, in which the deck is divided into two piles, by allowing it to be divided into k piles.

Key words: 00A08 recreational mathematics, 11A07 congruences; primitive roots; residue systems, 20B30 symmetric groups.

1 Introduction

In [6], Ramnath and Scully say:

Perfect shuffles have been of great interest to a wide variety of people for a long time. We have seen references to books on card cheating that described the perfect shuffle back in the eighteenth century. Magicians use perfect shuffles in card tricks, and computers scientists use them in parallel processing. For the mathematician, perfect shuffles provide a deep and complex structure from a very simple and natural setting.

To perform a perfect shuffle on a deck of $2n$ cards, you cut the deck into two piles of n cards and interlace them perfectly. In [5], Medvedoff and Morrison express:

*The content of this paper is a wider version of a poster presented by the author at the 5th European Congress of Mathematics (SECM) held in Amsterdam, The Netherlands, from 14 to 18 July 2008 [4, p. 85].

There are magicians who can execute a perfect shuffle and there are even a few who can do eight consecutive perfect shuffles -leaving the top card on top- to bring the deck back to its original position.

Moving cards to desired positions through perfect shuffles is of interest to magicians and card cheaters because perfect shuffles appear to be random but are not. For perfect k -shuffles the interested people in moving cards arbitrarily are not the magicians or card cheaters but the mathematicians and computer engineers. With this purpose in mind, we first recall the definition of perfect k -shuffle. Then, we find a general formula which computes the final position of any card after the application of many consecutive perfect k -shuffles. Next, we give a necessary and sufficient condition to move arbitrarily any card with perfect k -shuffles. Finally, we present an algorithm to perform that kind of movement. The technique employed is based on fundamental properties of modular arithmetic and the base k counting system. For other mathematical approaches we invite the reader to see [1, 2]. From the point of view of the potential application of perfect k -shuffles on computers see [3].

2 Definitions and basic properties of perfect k -shuffles

Let k, n be any integers greater than 1. Consider a deck of kn cards face down and label them $0, 1, \dots$ and $kn - 1$, from top to bottom. Deal the cards face up into k piles as shown in Table 1. Let σ be any permutation in S_k , the symmetric group of k elements. Relocate the heaps according to σ . Next, pick up the cards from left to right. The new card order is

$$(\sigma^{-1}(1) - 1)n, (\sigma^{-1}(2) - 1)n, \dots, \sigma^{-1}(k)n - 1,$$

which is called *perfect k -shuffle according to σ* of the given deck.

Table 1:

pile 1	pile 2	...	pile j	...	pile k
0	n	...	$(j - 1)n$...	$(k - 1)n$
1	$n + 1$...	$(j - 1)n + 1$...	$(k - 1)n + 1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
i	$n + i$...	$(j - 1)n + i$...	$(k - 1)n + i$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n - 1$	$2n - 1$...	$jn - 1$...	$kn - 1$

It is necessary to find a formula which will compute the new position for any card after applying any perfect k -shuffle. Let \mathcal{I}_{kn} denote the set of integers (cards) from 0 to

$kn-1$. Suppose card $c \in \mathcal{I}_{kn}$ falls in row i ($0 \leq i \leq n-1$) and pile j ($1 \leq j \leq k$) after dealing the cards, then it satisfies $c = (j-1)n + i$. By applying σ card c changes only its pile position. Before picking up the cards, card c moves to position $(\sigma(j)-1)n + i$. Hence this card has ki (i rows of k cards each) cards on top of it and $\sigma(j)-1$ cards to its left. Thus once the perfect k -shuffle is performed (according to σ) the new position of card c is $S_\sigma(c) := ki + \sigma(j) - 1 \in \mathcal{I}_{kn}$. After gaining this formula, we are able to compute the effect of many consecutive perfect k -shuffles on a particular card. We also consider necessary to provide a definition and an example.

DEFINITION Given $c \in \mathcal{I}_{kn}$ and $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in S_k$, we say that the perfect k -shuffle is performed m times on card c according to order $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$ when the function $P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^m} := S_{\sigma_m} \circ \dots \circ S_{\sigma_1}$ is evaluated at c .

EXAMPLE What magicians usually do is to choose small values of k, n and m and identical all the σ_i 's. For example, by choosing $k = 4, n = 13$ (i.e., the regular deck of 52 playing cards), $m = 4$ and $\sigma_i = I_4$ (i.e., the identity of S_4) all the cards return to their original positions. This follows from [5, Proposition 1], since $P_{\{I_4, I_4, I_4, I_4\}} = (S_{I_4})^4 = I_{52}$.

We find a general formula which expresses the effect of many consecutive perfect k -shuffles on any card through the base k counting system. Given any permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in S_k$ and any integers $j_1, \dots, j_m \in \{1, 2, \dots, k\}$ the symbols t_m and u_m denote the following base k expansions $(\sigma_1(j_1) - 1) \dots (\sigma_m(j_m) - 1)_k$ and $(j_1 - 1) \dots (j_m - 1)_k$, respectively. We affirm that given any $c \in \mathcal{I}_{kn}$ and any order $\{\sigma_i\}_{i=1}^m \subset S_k$, there exist unique integers $j_1, \dots, j_m \in \{1, 2, \dots, k\}$ such that

$$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^m}(c) = t_m + k^m c - knu_m. \quad (1)$$

In order to prove (1), we proceed by induction on m . For $m = 1$, the formula is evident since $S_{\sigma_1}(c) = ki_1 + \sigma_1(j_1) - 1 = t_1 + kc - knu_1$ for unique integers i_1, j_1 with $j_1 \in \{1, 2, \dots, k\}$. Now, we assume that equation (1) is valid for $m-1$ for the unique integers j_1, \dots, j_{m-1} . Let i_m ($0 \leq i_m \leq n-1$) and j_m ($1 \leq j_m \leq k$) be the unique integers such that $t_{m-1} + k^{m-1}c - knu_{m-1} = (j_m - 1)n + i_m$. Then

$$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^m}(c) = S_{\sigma_m}(t_{m-1} + k^{m-1}c - knu_{m-1}) = t_m + k^m c - knu_m,$$

which proves the validity of (1). As a consequence of equation (1), we have:

PROPOSITION Let I_k be the identity of S_k and rev be the permutation reverse [6, p. 6] (i.e., the permutation in S_k defined by $j \mapsto k+1-j$). Then,

(a)

$$P_{\{I_k\}_{i=1}^m}(c) = k^m c - (kn-1)u_m \text{ for every } c \in \mathcal{I}_{kn}. \quad (2)$$

(b)

$$P_{\{rev\}_{i=1}^m}(c) = k^m(c+1) - 1 - (kn+1)u_m \text{ for every } c \in \mathcal{I}_{kn}. \quad (3)$$

We want to establish conditions on m that guarantee that once the perfect k -shuffle is performed m times on any card c , it can be moved to any arbitrary position d . The following example shows that sometimes it is not possible.

EXAMPLE Let $k = 3$, $n = 10$ and $c = 10$. On one hand, we claim that card 10 can not be moved to position 27 in a deck of 30 cards when the perfect 3-shuffle is performed according to any order in S_3 of the types $\{\sigma_1\}$ (Table 2 (a)), $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ (Table 2 (b)) or $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (Table 2 (c)). In these cases, $j_1 = 2$, $j_2 = 1$ and $j_3 = 1$. On the other hand, from equation (2), we have

$$P_{\{I_3, I_3, I_3\}}(10) = 810 - 29 \times 100(j_4 - 1)_3 = 56 - 29j_4 = 27, \text{ for } j_4 = 1.$$

Table 2:

(a)	(b)	(c)																																																																																																																																																						
<table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <thead> <tr> <th>$\sigma_1(2)$</th> <th>$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^1}(10)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>	$\sigma_1(2)$	$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^1}(10)$	1	0	2	1	3	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <thead> <tr> <th>$\sigma_1(2)$</th> <th>$\sigma_2(1)$</th> <th>$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^2}(10)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>8</td></tr> </tbody> </table>	$\sigma_1(2)$	$\sigma_2(1)$	$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^2}(10)$	1	1	0	1	2	1	1	3	2	2	1	3	2	2	4	2	3	5	3	1	6	3	2	7	3	3	8	<table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <thead> <tr> <th>$\sigma_1(2)$</th> <th>$\sigma_2(1)$</th> <th>$\sigma_3(1)$</th> <th>$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^3}(10)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>11</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>12</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>13</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>14</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>15</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>16</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>17</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>18</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>19</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>20</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>21</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>22</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>23</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>24</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>25</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>26</td></tr> </tbody> </table>	$\sigma_1(2)$	$\sigma_2(1)$	$\sigma_3(1)$	$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^3}(10)$	1	1	1	0	1	1	2	1	1	1	3	2	1	2	1	3	1	2	2	4	1	2	3	5	1	3	1	6	1	3	2	7	1	3	3	8	2	1	1	9	2	1	2	10	2	1	3	11	2	2	1	12	2	2	2	13	2	2	3	14	2	3	1	15	2	3	2	16	2	3	3	17	3	1	1	18	3	1	2	19	3	1	3	20	3	2	1	21	3	2	2	22	3	2	3	23	3	3	1	24	3	3	2	25	3	3	3	26
$\sigma_1(2)$	$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^1}(10)$																																																																																																																																																							
1	0																																																																																																																																																							
2	1																																																																																																																																																							
3	2																																																																																																																																																							
$\sigma_1(2)$	$\sigma_2(1)$	$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^2}(10)$																																																																																																																																																						
1	1	0																																																																																																																																																						
1	2	1																																																																																																																																																						
1	3	2																																																																																																																																																						
2	1	3																																																																																																																																																						
2	2	4																																																																																																																																																						
2	3	5																																																																																																																																																						
3	1	6																																																																																																																																																						
3	2	7																																																																																																																																																						
3	3	8																																																																																																																																																						
$\sigma_1(2)$	$\sigma_2(1)$	$\sigma_3(1)$	$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^3}(10)$																																																																																																																																																					
1	1	1	0																																																																																																																																																					
1	1	2	1																																																																																																																																																					
1	1	3	2																																																																																																																																																					
1	2	1	3																																																																																																																																																					
1	2	2	4																																																																																																																																																					
1	2	3	5																																																																																																																																																					
1	3	1	6																																																																																																																																																					
1	3	2	7																																																																																																																																																					
1	3	3	8																																																																																																																																																					
2	1	1	9																																																																																																																																																					
2	1	2	10																																																																																																																																																					
2	1	3	11																																																																																																																																																					
2	2	1	12																																																																																																																																																					
2	2	2	13																																																																																																																																																					
2	2	3	14																																																																																																																																																					
2	3	1	15																																																																																																																																																					
2	3	2	16																																																																																																																																																					
2	3	3	17																																																																																																																																																					
3	1	1	18																																																																																																																																																					
3	1	2	19																																																																																																																																																					
3	1	3	20																																																																																																																																																					
3	2	1	21																																																																																																																																																					
3	2	2	22																																																																																																																																																					
3	2	3	23																																																																																																																																																					
3	3	1	24																																																																																																																																																					
3	3	2	25																																																																																																																																																					
3	3	3	26																																																																																																																																																					

3 Main results

We start with a proposition that generalizes the content of last example.

PROPOSITION *If $n > k^{m-1}$ and $c = n$, then $P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^l}(n) < k^m$ for every $l \leq m$ and for every order $\{\sigma_i\}_{i=1}^l \subset S_k$.*

Proof. We assume the contrary. There must exist an integer l_0 ($l_0 \leq m$) and an order $\{\sigma_i\}_{i=1}^{l_0}$ such that $P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^{l_0}}(n) = k^m + w$ for some $w \in \{0, 1, \dots, kn - k^m - 1\}$. Thus, by equation (1), $k^m + w = t_{l_0} + k^{l_0}n - knu_{l_0}$. But

$$t_{l_0} + k^{l_0}n - knu_{l_0} \leq \underbrace{(k-1)\dots(k-1)_k}_{l_0 \text{ digits}} + k^{l_0}n - kn \underbrace{10\dots 0_k}_{l_0 \text{ digits}} = k^{l_0} - 1.$$

Then, $k^m - k^{l_0} \leq -1 - w < 0$ which implies $m < l_0$ and this is a contradiction. Therefore our initial assumption is false and this completes the proof.

An immediate consequence is the following result.

COROLLARY *If for every $(c, d) \in \mathcal{I}_{kn} \times \mathcal{I}_{kn}$ there exists an order $\{\sigma_i\}_{i=1}^m \subset S_k$ such that $P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^m}(c) = d$, then $n \leq k^{m-1}$.*

Therefore a necessary condition for moving any card to any desired position through the application of m consecutive perfect k -shuffles, is that m must satisfy the inequality $n \leq k^{m-1}$. The next theorem shows that its reciprocal is also true. The following example helps having a clear understanding of the theorem.

EXAMPLE Let $k = 3$, $n = 6$. Observe that $6 > 3^{2-1}$ but $6 \leq 3^{3-1}$. So we must take $m = 3$. Now, we seek for an order $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \subset S_3$ such that when the corresponding perfect 3-shuffle is performed on card 9 according to that order, the card is moved to position 0. After doing some calculations on formula (1), we get the equation

$$9\sigma_1(2) + 3\sigma_2(j_2) + \sigma_3(j_3) + 140 = 54j_2 + 18j_3,$$

which we must solve for $j_2, j_3, \sigma_1(2), \sigma_2(j_2), \sigma_3(j_3) \in \{1, 2, 3\}$ since $j_1 = 2$ ($9 = (2-1) \times 6 + 3$). By testing all possible values of pair (j_2, j_3) from the set

$$\{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3)\},$$

we find that only $(2, 3)$ is solution and it certainly generates the values $\sigma_1(2) = 2$, $\sigma_2(2) = 1$ and $\sigma_3(3) = 1$. So all the possible orders are:

$$\{I_3, (12), (13)\}; \{I_3, (12), (123)\}; \{I_3, (213), (13)\}; \{I_3, (213), (123)\};$$

$\{(13), (12), (13)\}; \{(13), (12), (123)\}; \{(13), (213), (13)\}; \{(13), (213), (123)\}$.

In other words, there are therefore 8 ways of moving card 9 to position 0 in a deck of 18 cards through three perfect 3-shuffles. Moreover, card 9 moves on following the path:

$$9 \xrightarrow{S_{\sigma_1}} 10 \xrightarrow{S_{\sigma_2}} 12 \xrightarrow{S_{\sigma_3}} 0 .$$

The main result of this paper is:

THEOREM *If $n \leq k^{m-1}$, then for every $(c, d) \in \mathcal{I}_{kn} \times \mathcal{I}_{kn}$ there exists an order $\{\sigma_i\}_{i=1}^m \subset S_k$ such that*

$$P_{\{\sigma_i\}_{i=1}^m}(c) = d. \quad (4)$$

Proof. Let (c, d) be any pair in $\mathcal{I}_{kn} \times \mathcal{I}_{kn}$ and express $c = (j_1 - 1)n + i_1$ as customary. In order to find an order that moves card c to position d , we use the technique followed in the previous example. First, we set $\sigma_i(j_i) = l_i$ for $i = 1, \dots, m$. This means we have to solve the equation

$$(l_1 - 1) \dots (l_m - 1)_k + k^m c - kn \times (j_1 - 1)(j_2 - 1) \dots (j_m - 1)_k = d, \quad (5)$$

for j_2, \dots, j_m and l_1, \dots, l_m , all of them belonging to the set $\{1, 2, \dots, k\}$.

By doing some basic calculations on (5), we get the following

$$(l_1 - 1) \dots (l_m - 1)_k + k^m i_1 = kn \times (j_2 - 1) \dots (j_m - 1)_k + d,$$

where i_1 is a known value ($0 \leq i_1 \leq n - 1$). The left and right side of the last equation can take respectively any of the values in the sets

$$A = \{k^m i_1, k^m i_1 + 1, k^m i_1 + 2, \dots, k^m i_1 + (k^m - 1)\},$$

$$B = \{d, kn + d, 2kn + d, \dots, (k^{m-1} - 1)kn + d\}.$$

Next step consists in proving that $A \cap B \neq \emptyset$. Observe that when $i_1 = 0$ clearly $d \in A \cap B$ and we are done. We assume that $i_1 \geq 1$. By the Euclidean algorithm we can write $k^m i_1 = qkn + r$ with q, r integers and $0 \leq r \leq kn - 1$. If $q = 0$ we get the following contradiction $k^m \leq k^m i_1 = r \leq kn - 1 \leq k^m - 1$. If $q > k^{m-1} - 1$ we get $kn > k^m n - k^m i_1 \geq k^m$ another contradiction. Thus $1 \leq q \leq k^{m-1} - 1$. Now observe that if $r \leq d$, then $k^m i_1 + (d - r) \in A \cap B$ and we are done again. But, if $r > d$, then q can not be equal to $k^{m-1} - 1$ since the contrary implies $kn = k^m n - k^m i_1 + r \geq k^m + r$ a contradiction once more. Hence $1 \leq q \leq k^{m-1} - 2$ when $r > d$ and we claim that $(q + 1)kn + d \in A \cap B$. In fact, the last element of A satisfies $k^m i_1 + (k^m - 1) \geq (q + 1)kn + d$ since the contrary implies $k^m \leq k^m + (r - d - 1) < kn$ a contradiction. Thus $k^m i_1 + s = (q + 1)kn + d$ for some s ($1 \leq s \leq k^m - 1$) and we are done. In any case we have found an element $e \in A \cap B$.

Finally, we proceed to express $f = (e - d)/kn$ and $g = e - k^m i_1$ in base k , say, $f = (f_2 \dots f_m)_k$ and $g = (g_1 \dots g_m)_k$. Then we set $j_i := f_i + 1$ for $i = 2, \dots, m$ and

$l_i := g_i + 1$ for $i = 1, \dots, m$. Therefore, equation (5) has one solution. By choosing any permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ in S_k that satisfy $\sigma_i(j_i) = l_i$ for $i = 1, \dots, m$ equation (4) is solved and this completes the proof.

EXAMPLE For the previous example, the sets A and B are $\{81, 82, \dots, 107\}$ and $\{18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144\}$ respectively, and therefore $A \cap B = \{90\}$.

4 Conclusions

Some important consequences of the previous results are:

1. In some way the restlessness raised by Medvedoff and Morrison in [5] is clarified, when they express:

If we knew how to write $S_\sigma S_\tau$ in a nice way the whole problem would not be hard.

2. The minimum number of perfect k -shuffles that guarantee the movement of any card to an arbitrary position is $m = \min\{t \in \mathbb{N} : n \leq k^{t-1}\}$.

3. The main result implies a procedure that can be easily used to design an algorithm which generalizes the one obtained in [6, p. 364].

4. The arbitrary movement of any card is achieved without mixing different kinds of shuffles as mentioned in [6], thus giving a global and generalized answer to an appointment of the famous recreational mathematician Martin Gardner that expresses:

Some attempts at efficient algorithms, combining shuffles of different types, have been proposed, but the problem is far from satisfactorily disposed of.

5. The algorithm described below is not necessarily the best one in terms of time and space complexity. We let the reader make serious considerations on that matter. For instance, if we apply the algorithm to a deck of 52 ($k = 2$, $n = 26$) cards we get $\{rev, I_2, rev, rev, I_2, rev\}$ for moving card 6 to position 5 through perfect shuffles, but the smaller order $\{rev, rev, rev, rev\}$ does the same, by equation (3) with $j_1 = j_2 = j_4 = 1$ and $j_3 = 2$.

ALGORITHM Label the positions in a deck of kn cards 0 through $kn - 1$ consecutively with 0 representing the top position. To determine a sequence of perfect k -shuffles that will move card in position c to position d , proceed as follows:

1. Compute $i_1 = c - \lfloor c/n \rfloor n$ and $j_1 = \lfloor c/n \rfloor + 1$.
2. Find $m = \min\{t \in \mathbb{N} : n \leq k^{t-1}\}$ and generate the sets of integers $A = \{k^m i_1 + r : 0 \leq r \leq k^m - 1\}$ and $B = \{skn + d : 0 \leq s \leq k^{m-1} - 1\}$ and find $e \in A \cap B$.

3. Set $f = \frac{e-d}{kn}$ and $g = e - k^m i_1$ and compute their base k expansions $(f_2 \dots f_m)_k$ and $(g_1 \dots g_m)_k$. Set $j_i = f_i + 1$ for $i = 2, \dots, m$ and $l_i = g_i + 1$ for $i = 1, \dots, m$.
4. Find $\sigma_i \in S_k$ such that $\sigma_i(j_i) = l_i$ for $i = 1, \dots, m$. The resulting order $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$ moves card in position c to position d .

Acknowledgements The author gratefully acknowledges the many helpful linguistic suggestions of Dr. Dilia Escalante during the preparation of this paper. Also, the author wishes to thank the CDCHT of Universidad de Los Andes for financial support to attend the 5th European Congress of Mathematics held in The Netherlands.

References

1. P. Diaconis, R. Graham and W. Kantor, The mathematics of perfect shuffles, *Advances in Applied Mathematics*, **4** (1983) 175–196.
2. J. Ellis, H. Fan and J. Shallit, The cycles of the multiway perfect shuffle permutation, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **5** (2002) 169–180.
3. J. Ellis and M. Markov, In situ, stable merging by way of the perfect shuffle, *The Computer Journal*, **43** (2000) 40–53.
4. 5th European Congress of Mathematics, *Programme and abstracts*, CWI, Amsterdam, The Netherlands, 2008.
5. S. Medvedoff and K. Morrison, Groups of perfect shuffles, *Mathematics Magazine*, **60** (1987) 3–14.
6. S. Ramnath and D. Scully, Moving card i to position j with perfect shuffles, *Mathematics Magazine*, **69** (1996) 361–365.

Roy Quintero
 Universidad de Los Andes (Trujillo-Venezuela)
 e-mail: rquinter@ula.ve

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Kepler nos enseña a medir el vino que se bebe

Juan Núñez y Juan Portero

Resumen. En este artículo se trata de mostrar que dos objetos situados en mundos aparentemente distintos, como son las Matemáticas y el vino, están muy relacionados entre sí, y de hecho, bajo unas ligaduras muy fuertes. No en vano fueron objeto de un estudio conjunto por el genial matemático y astrónomo Johannes Kepler, nada menos que hace ya más de tres siglos.

Abstract. In this paper we try to show that two subjects, not seeming to be linked between themselves, like Mathematics and the wine, certainly they do, and really under a very strong chains. Note that they were already studied joint by the great mathematician and astronomer Johannes Kepler, nothing less than three centuries ago.

Introducción

Desde que en el Capítulo VII del Libro Quinto de su "Ética a Telémaco", Aristóteles relacionara de alguna manera las Matemáticas con el vino: *... porque ni las medidas del vino ni las del trigo son iguales en todas las tierras ...*, no puede decirse que haya habido muchos más ejemplos concretos de esa relación.

Y ni siquiera actualmente parecen existir. De hecho, pasando por alto el tema anecdótico de la *botella de Klein*, superficie sólo conocida por los muy adictos a la Geometría y, casi con toda seguridad, totalmente desconocida para los interesados en el vino, no puede decirse que actualmente exista una relación muy estrecha entre las Matemáticas y la Enología, ciencia, esta última, del vino.

Así, si en estos momentos se le pregunta a alguna persona "normal", esto es, poseedora de una cultura media y no especializada en ninguna de las dos materias, por la relación que existe entre las Matemáticas y el vino, seguramente responderá que las Matemáticas sirven para contar el número de botellas de vino existentes en una determinada bodega o, como mucho, que mediante las Matemáticas también se puede determinar la capacidad de una copa de vino o de una bodega (según el Diccionario de la Real Academia Española, *especie de tonel mediano que sirve para diferentes usos*). Y de hecho que esas respuestas no van muy descaminadas.



Figura 1: Botella de Klein.

Ahora bien, puntualicemos algunos aspectos al respecto. Primero, esas respuestas no indican en realidad la relación en sí que pueda existir entre esa ciencia y ese producto. A lo sumo, da ideas de cómo pueden aplicarse las Matemáticas para responder a diversas cuestiones relacionadas con el vino. Y además, tampoco de una forma intrínseca, lo cual, aunque sin ser poco, no satisface en absoluto nuestras ansias de conocimiento. No sucede entonces con las Matemáticas y el vino como con, por ejemplo, la Química o la Biología o incluso la Medicina y el vino, en las que sabemos que existe una rama de cada una de ellas, como la Enología, por ejemplo, en el caso de la Biología, dedicada íntegramente al estudio, total o parcial, de la cultura del vino.

Y en segundo lugar, en el supuesto de que las personas a las que formulásemos la cuestión anteriormente citada sí tuviesen conocimientos matemáticos reconocidos, como los propios licenciados en Matemáticas o en alguna otra licenciatura o carrera técnica, ¿serían capaces de profundizar en sus respuestas, indicándonos cómo se calcularían tales capacidades? Suponemos que en el caso de la copa, sí, pero en el de la barrica, ya empezamos a dudar. Nótese también que, aparte de la ambigüedad cuantitativa, la unidad de medida no tiene unas dimensiones volumétricas universales, lo cual supone que montantes aparentemente iguales no sean, sin embargo, equivalentes, en función de su localización geográfica. Por ejemplo, ¿qué bebedor piensa, cuando pide un *medio*, en la fracción matemática equivalente a la mitad de algo (como corresponde al valor semántico de la expresión, aunque su valor matemático real sea de $3/8$)? Puede verse entonces que el término matemático se ha desnaturalizado, pasando a adquirir un valor únicamente cultural.

Sin embargo, hay un ejemplo muy claro de esta relación entre las Matemáticas y el vino y se remonta nada menos que al siglo XVII, cuando a partir de una observación hecha por él mismo en su propia casa, de cómo un vinatero austriaco medía rápida y misteriosamente la capacidad de diferentes barricas de vino que él había comprado días antes de su reciente matrimonio con la

joven Sussana Reutlinger, el genial matemático y astrónomo Johannes Kepler decidió *investigar las leyes geométricas de esta medición doméstica de tanta utilidad*. Precisamente, el resultado de su trabajo, la *Nova stereometria doliorum vinariorum* (en adelante Nova stereometria) publicada en Linz en 1615, habría de ayudar a establecer los fundamentos del Cálculo Diferencial e Integral e impulsar la aplicación de las matemáticas a la solución de problemas de la vida real. De dicha obra, quizás una de las más comentadas obras matemáticas de Kepler en los textos de cálculo, así como en los libros de historia de las Matemáticas, merecen destacarse su importantísimo aspecto humano, los métodos de trabajo que empleó Kepler en su realización y sobre todo, las ideas que se tenían en aquel tiempo sobre los problemas de optimización y la manera de usarlos en problemas de la vida real. De hecho, antes de la llegada de Kepler, en el mundo del vino existía una aparente falta de exactitud. Curiosamente el sistema métrico decimal no se ha aplicado en este mundo, y se mantienen patrones antiguos, que en la medición de otras magnitudes sí se han sustituido por las medidas internacionales.

El presente trabajo está destinado entonces a poner de manifiesto más extensamente esta relación entre las Matemáticas y el vino, viendo cómo interesó sobremanera a Kepler y cómo éste usó de su ingenio, sabiduría y sobre todo, de sus conocimientos matemáticos, para resolver una cuestión aparentemente intrascendente: *cómo un vendedor de vino medía todos los barriles, sin distinción, sin poner atención a la forma y sin pensar o hacer cálculo alguno*.

Otros artículos sobre esta relación entre las Matemáticas y el vino pueden también verse en [2], [3] y [4], por ejemplo. En particular, en [2] puede leerse (en original, en árabe, y en su traducción al castellano) una extensa poesía que el insigne matemático y poeta árabe Omar Khayyam (1048 - 1122) le dedicó al vino [entre los principales méritos científicos de Omar Khayyam destacan el de haber recopilado unas tablas astronómicas, contribuir a la reforma del calendario de su tiempo y descubrir un método geométrico para resolver ecuaciones cúbicas por intersección de una parábola con un círculo]. Dos de las estrofas de esa poesía son las siguientes:

*El vino es granate líquido, la copa es la mina.
La copa es el cuerpo y el alma es el vino,
lágrima donde la sangre del corazón se esconde,
que es la copa de cristal que sonrío por el vino.*

*Bebe vino, que la vida eterna es ésta.
Tu cosecha de juventud es ésta.
En tiempos de vino y rosas y amigos ebrios
sé alegre un momento, que la vida es ésta.*

1. El secreto de las barricas de vino

Kepler describe en su Nova stereometria un evento de su vida que ocurrió en el otoño del año 1613 (véase la traducción del ruso al inglés de [5], pag. 49):

En Diciembre del año pasado ... traje a casa una nueva esposa al tiempo que en Austria, habiéndose recogido una extraordinaria cosecha de uvas nobles, se distribuían sus riquezas. ... La costa de Linz estaba abarrotada con barricas de vino que se vendían a precio razonable. ... Es por esa razón que fueron traídas a mi casa y colocadas en fila un cierto número de barricas, y cuatro días más tarde el vendedor vino y midió todos los barriles, sin distinción, sin poner atención a la forma, sin pensar o hacer cálculo alguno. A saber, metía la punta de cobre de una regla por el hoyo de llenado del barril atravesándolo hasta llegar al talón de cada uno de los discos de madera a los que nos referiremos simplemente como los fondos, y tan pronto como la longitud medida desde el hoyo de llenado a ambos talones de los discos era la misma, el vendedor daba el número de ánforas contenidas en el barril después de tan sólo ver el número en la regla en el punto donde la longitud en cuestión terminaba. ¡Quedé asombrado!

La conversación que anexamos, a fin de darle seguimiento a la cita anterior, está tomada de [1]:

-¿No estará haciendo trampa?, -dudó por un momento Kepler.

-No se preocupe, señor matemático de su majestad, -dijo el joven como si leyera la mente de Kepler. -Este método de medición de las barricas fue aceptado por nuestras autoridades de la ciudad. El departamento de fabricación de barriles garantiza su exactitud.

-¿Para cualquier barril?

-No lo sé; pero para los barriles de Austria, seguro, -bromeó el joven-.

-¿Pero sobre la base de qué estás tan seguro de la certeza del método?

-No puedo decir lo que no sé, no voy a mentir. Dicen que hace muchos años, vivió aquí un viejo fabricante de barricas; él propuso este método, pero ¿por qué?, no lo sé.

-Kepler pensó que era extraño que por medio de una sola medición, pudiese uno determinar los volúmenes de barricas de diferentes formas y tamaños. Recordó la manera tediosa de medición que se usaba en el reino: sin temor al tiempo empleado, llenaban el barril contando la cantidad de ánforas vaciadas. ¡Librenos Dios de tener que volverlo a medir!

Kepler entonces, tal como ya se ha comentado antes, decidió investigar las leyes geométricas de esta medición doméstica (la de las barricas) de tanta utilidad". Para ello, la metodología que empleó fue la siguiente:

Kepler consideró primero el caso de los barriles cilíndricos (véase la siguiente figura). Llamó λ a la distancia ND que hay entre el hoyo de llenado y el talón de los fondos, $2x$ a la altura AB del barril y $2y$ al diámetro AD del barril.

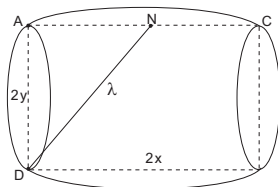


Figura 2: Medidas del barril.

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que: $x^2 + 4y^2 = \lambda^2$. Por tanto, el volumen del barril podría ser calculado, según:

$$V = \frac{1}{2} \pi x (\lambda^2 - x^2)$$

La observación crucial hecha por Kepler fue entonces que todos los barriles austriacos se fabricaban con la misma razón entre la altura y el diámetro.

En efecto, considerando la razón $t = \frac{x}{y}$ y empleando las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$V = 2\pi\lambda^3 t (4 + t^2)^{\frac{-3}{2}}.$$

De esta fórmula se observa, pensó Kepler, que el volumen V de un barril cilíndrico no se determina solamente conocido el valor de λ . Para que se pueda utilizar el método de medición de los toneleros austriacos, los barriles tendrían que fabricarse con una relación t fija. Llámese t_0 a esta relación. Sin embargo, quedan las preguntas: ¿Cuál será la mejor selección de t_0 ? ¿Cómo podría escogerse ventajosamente la relación entre el segmento AB o altura del cilindro y el diámetro AD de los fondos?

Kepler supuso que los vinateros austriacos habían elegido con astucia t_0 , tomándola como el valor que maximiza el volumen V de todos los barriles que tengan el mismo valor de λ , ya que en ese caso (véase [1]):

El vinicultor podría calcular el volumen de todas las barricas usando la fórmula (3), que quedaría solamente en función de λ . Si en la fabricación de los barriles, el tonelero no pudiera conseguir exactamente la relación t_0 y terminara haciéndolos con la relación t_1 ($t_1 \approx t_0$), el volumen real del barril V_1 siempre sería menor que el

volumen máximo V_0 , pero él recibiría el pago correspondiente a V_0 . Por otro lado, un vinicultor respetable no está interesado en engañar al cliente, le importa que el volumen real del barril se diferencie lo menos posible del volumen V_0 .

Se trata pues, como puede observarse, de un problema de optimización planteado alrededor de 70 años antes de que se descubriera el cálculo infinitesimal, incluso bastante antes de que naciera Newton (1642).

En el otoño de 1615, a solicitud de Kepler, se realizó un encuentro entre él y el representante de los fabricantes de barricas de vino. La conversación fue la siguiente (véase [1]):

- Señor representante, - empezó Kepler, - estoy interesado en el método que usan los fabricantes de barricas austriacas para medir la capacidad de las mismas.

- Verá usted, Señor matemático de su majestad, - dijo el representante, - ése es un secreto de nuestra comunidad y se ha heredado de una generación a otra desde los viejos tiempos.

- Yo creo que hace mucho tiempo existió algún excelente geómetra que enseñó a nuestros fabricantes de barricas, pero pienso que he podido descubrir su secreto, - replicó Kepler .

- Entonces diga usted, Señor matemático de su majestad, en qué según su opinión consiste el secreto de los viejos fabricantes de barricas, y yo le prometo decir cuáles de sus palabras son verdad.

- Mis reflexiones me guiaron a una conclusión, - contestó Kepler, - que al fabricar las barricas, independientemente del tamaño, los fabricantes de Linz usan solamente una idea, que la longitud de las duelas sea 1.5 veces mayor que el diámetro de los fondos -.

- Perfectamente cierto! - afirmó con asombro el representante.

- Además, para medir la capacidad de las barricas, ustedes utilizan una regla cuya escala sigue la ley cúbica.

- Ésa es la mera verdad!, - afirmó aún con mayor sorpresa el representante, - ¿No es usted clarividente Señor Kepler? Escuché que usted como astrónomo de su majestad sabe leer el pasado y el futuro de acuerdo a las posiciones de las estrellas. ¿Acaso descubrió usted el secreto con la ayuda de la astrología?

- No, lo hice con ayuda de las matemáticas, - contestó Kepler, dándose con esto por terminada la conversación.

Pasamos a continuación, para terminar el artículo, a reseñar unas breves notas biográficas sobre la vida y obra de Johannes Kepler, que ayuden a entender



Figura 3: Johannes Kepler.

mejor el pensamiento de este genial científico y el enorme interés que siempre tuvo por resolver cualquier interrogante que se le plantease en el mundo en el que él vivía. De hecho, Kepler trató indistintamente temas de Astronomía, Matemáticas y Física, aparte de llegar a descubrir dos nuevos sólidos poliédricos. No obstante, para el objetivo de este artículo, la publicación, aunque menor, que nos merece destacar de Kepler aparece como resultado del estudio de los volúmenes de los sólidos de revolución: *Nova Stereometria doliorum vinariorum, in primis Austriaci, figurae omnium aptissimae; et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus & plane singularis. Accessit Stereometriae Archimedae supplementum...* (Linz, Johann Planck, 1615), en la que basándose en la obra de Arquímedes, usó un método de partición en indivisibles, que sería posteriormente desarrollado por Bonaventura Cavalieri (1598-1647) y es considerado sin ninguna duda como uno de los precursores del Cálculo Infinitesimal.

Aunque se han consultado varias biografías de Kepler para hacer el extracto que sigue a continuación, la mayor parte de los datos que se comentan se han tomado de [6].

2. Breves notas biográficas de Johannes Kepler

Johannes Kepler nació el 27 de Diciembre de 1571 en la pequeña ciudad de Weil der Stadt, Württemberg, Sacro Imperio Romano (ahora Alemania) y se mudó a la cercana Leonberg con sus padres en 1576. Mientras fue niño, Kepler vivió con su madre en la posada de su abuelo, y según él mismo cuenta, ayudando a servir en la posada.

Kepler primeramente estudió en una escuela local y después en un seminario cercano, del cual pasó a la Universidad de Tübingen (de ortodoxia luterana), con la intención de ser ordenado sacerdote (a lo largo de toda su vida, Kepler siempre fue un hombre profundamente religioso y todos sus escritos contienen

numerosas referencias a Dios. Él estaba convencido de que Dios había hecho el Universo conforme a un plan matemático (creencia ya encontrada en las obras de Platón y asociada con Pitágoras)).

Por aquella época, era normal para todos los estudiantes de una universidad asistir a clases sobre Matemáticas. En principio esto incluía las cuatro ciencias matemáticas: aritmética, geometría, astronomía y música. En Tübingen, Kepler fue instruido en astronomía por uno de los astrónomos principales de la época, Michael Maestlin (en aquella época, los astrónomos se veían a sí mismos como matemáticos). También estudió griego y hebreo, aparte de que la enseñanza en la Universidad era en latín (curiosamente, al final de su primer año, Kepler obtuvo las mejores calificaciones en todo, menos en matemáticas).

Kepler ha pasado a la posteridad principalmente por descubrir las tres leyes del movimiento planetario que llevan su nombre (publicadas en 1609 y 1619). Hizo también un importante trabajo en óptica (1604, 1611), descubrió dos nuevos poliedros regulares (1619), dio por primera vez tratamiento matemático a la agrupación apretada de esferas iguales (conduciendo a una explicación de la forma de las celdas de una colmena, 1611), aportó la primera prueba de cómo funcionaban los logaritmos (1624), y diseñó un método para hallar los volúmenes de sólidos de revolución que, retrospectivamente, puede verse como una contribución al desarrollo del cálculo infinitesimal (1615, 1616). Además, calculó las tablas astronómicas más exactas conocidas hasta el momento, las Tablas Rudolfinas, Ulm, 1627.

Kepler murió en Regensburg, el 15 de Noviembre de 1630, siendo sepultado en la iglesia local, aunque ésta luego fue destruida en el curso de la Guerra de los Treinta Años, no quedando nada ya de su tumba.

Como curiosidad, reseñar que un biógrafo de la época escribió con admiración, lo grande y magnífica que fue la obra de Kepler, pero al final se lamentaba de que un hombre de su sabiduría llegase a tener demencia senil en la última etapa de su vida, llegando incluso a afirmar (Kepler) que *las mareas venían motivadas por una atracción que la luna ejercía sobre los mares...*, un hecho que por cierto fue demostrado años después de su muerte. Asimismo, y en su honor, una cadena montañosa del satélite marciano Fobos fue bautizada con el nombre de 'Kepler Dorsum'.

Permítasenos finalizar este trabajo adhiriéndonos al homenaje que el insigne poeta de la "Generación del 27" Gabriel Celaya le brindó a Kepler, por su gran honestidad científica, en forma de un no muy conocido poema:

*Kepler miró llorando los cinco poliedros
encajados uno en otro, sistemáticos, perfectos,
en orden musical hasta la gran esfera.
Amó al dodecaedro, lloró al icosaedro
por sus inconsecuencias y sus complicaciones*

*adorables y raras, pero, ¡ay!, tan necesarias,
pues no cabe idear más sólidos perfectos
que los cinco sabidos, cuando hay tres dimensiones.
Pensó, mirando el cielo matemático, lejos,
que quizá le faltara una lágrima al miedo.
La lloró cristalina: depositó el silencio,
y aquel metapoliedro, geometría del sueño,
no pensable y a un tiempo normalmente correcto,
restableció sin ruido la paz del gran sistema.
No cabía, es sabido, según lo que decían,
más orden que el dictado. Mas él soñó: pensaba.
Eran más que razones: las razones ardían.
Estaba equivocado, mas los astros giraban.
Su sistema era sólo, según lo presentido,
el orden no pensado de un mundo enloquecido,
y él buscaba el defecto del bello teorema.
Lo claro coincidía de hecho con el espanto
y en la nada, la nada le besaba a lo exacto.*

Referencias

- [1] Balk M. B. *El secreto del viejo barriquero*, Kvant **8**(1986), 14–18 (original, en ruso. Puede verse en <http://kvant.mccme.ru/1986/08/p14.htm>).
- [2] Janés, Clara. *Omar Jayyam Rubayat*, Alianza Editorial, 2007.
- [3] Nieves Huerta A. y Mejía Velasco H.R. *Johannes Kepler y el secreto de la fabricación de las barricas de vino austriacas*, Epsilon **59**, **20**:2(2004), 261–274.
- [4] Solaeche Galera M. C. *Omar Khayyam: las Matemáticas, la Nada, el Vino, el Torno y la Amada*, Divulgaciones Matemáticas, **10**:1 (2002), 79–83.
- [5] Tikhomirov V. M. *Stories about maxima and minima* (original, en ruso). Traducido en Amer. Math. Monthly **99**:2 (1990), 182–183.
- [6] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Indexes/K.html> (sobre la biografía de Johannes Kepler).

Juan Núñez y Juan Portero
Departamento de Geometría y Topología.
Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
Apto. 1160. 41080-Sevilla (Spain).
e-mail: jnvaldes@us.es, juanitopb@hotmail.com

El problema del mago.

Rafael Sánchez Lamonedá

En la Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO 2000, se planteó un problema muy interesante. Digo esto pues el problema es uno de esos que cualquier persona puede comprender y más aún, disfrutar de su encanto, además nos permite a los profesores de matemáticas, asombrar a nuestros alumnos, amigos, familiares y cualquiera a quien le mostremos el truco de magia que dicho problema plantea. Sin más preámbulos veamos el Problema del Mago.

- **Problema . (IMO 2000)**

Un mago tiene cien cartas numeradas del 1 al 100. Las dispone en tres cajas de tal manera que en cada una de ellas haya al menos una carta. Seguidamente pide a alguien de la audiencia que tome dos cartas que estén en cajas diferentes pero, sin que el mago vea de cuáles cajas las tomó. De inmediato esta persona debe anunciar en voz alta la suma de los números escritos en las cartas seleccionadas. Con esta información, el mago dice de cuales cajas se tomaron las cartas. ¿Cuántas maneras hay de disponer las cartas para que el truco funcione?

- **Solución**

Hay doce maneras de disponer las cartas. Veamos:

Primera solución: Se distribuyen las cartas módulo 3. Es decir, en la primera caja se ponen los números que dejan resto cero al dividir entre 3. En la segunda los que dejan resto 1 y en la tercera los de resto 2. De esta forma se garantiza siempre el éxito.

Segunda solución: Se distribuyen poniendo la carta con el 1 en la primera caja, la carta con el 100 en la segunda caja y el resto en la tercera caja.

Cada una de estas dos maneras de hacerlo da seis disposiciones distintas, teniendo 12 en total.

Queda ahora demostrar que estas son las únicas formas de hacer la distribución. Yo conozco dos maneras distintas de hacer esto.

- **Primera Demostración [1]**

Como tenemos tres cajas, una roja, una blanca y la tercera azul, diremos que una carta con el número i es roja, si está en la caja roja, azul si está en

la caja azul o blanca si está en la caja blanca. En cada caso simplemente diremos que i es rojo, o azul o blanco, según la caja donde esté la carta.

Esta demostración analiza dos casos posibles:

- Caso 1. Supongamos que existe un i tal que, $i, i + 1, i + 2$, tienen colores diferentes. Digamos rba , (rojo, blanco, azul).

Como $i + (i + 3) = (i + 1) + (i + 2)$, y como el truco funciona bien, entonces el color de $i + 3$ no puede ser b ni a , es decir, no puede ser ni el color de $i + 1$ ni el color de $i + 2$. En consecuencia $i + 3$ es r .

De esta forma hemos visto que tres colores vecinos distintos, determinan al siguiente, es decir, si $i, i + 1, i + 2$, tienen colores distintos, entonces $i + 3$ tiene el mismo color de i . Además el patrón se repite: $rbarbarba \dots etc.$

Por lo tanto será suficiente con asignar los colores a 1, 2, 3, lo cual puede hacerse de seis maneras distintas, (las seis permutaciones). Todos estos arreglos funcionan bien, pues las sumas $r + b$, $b + a$, y $a + r$, dan restos diferentes módulo 3.

- Caso 2. Supongamos ahora que no hay tres números consecutivos con colores diferentes.

Supongamos que 1 es rojo, con ello no perdemos generalidad. Sea i el menor número que no es rojo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que su color es blanco. Sea k el menor número azul. Claramente $i < k$, pero además, $i + 1 < k$, ya que si $i + 1 = k$, como $i - 1$ es rojo, entonces tendríamos que $i - 1, i, i + 1$ serían rba , lo cual es una contradicción pues no hay rba .

Supongamos que $k < 100$. Como $i + k = (i - 1) + (k + 1)$, entonces $k + 1$ tendría que ser rojo, pues en caso contrario el truco no funcionaría: $blanco + azul = rojo + otro$.

Pero como $(i + 1) + k = i + (k + 1)$, entonces $i + 1$ tendría que ser azul, lo cual es una contradicción, pues k es el menor azul.

Por lo tanto $k = 100$.

Como $(i - 1) + 100 = i + 99$, entonces 99 es blanco.

Demostraremos ahora que 1 es rojo, 100 azul y los restantes son blancos.

Si algún t , con $1 < t < 100$, fuese rojo, como $t + 99 = (t - 1) + 100$, entonces $t - 1$ sería azul, lo cual es una contradicción, pues $k = 100$ es el menor azul. En consecuencia, si $1 < t < 100$, entonces t es blanco.

Esto nos da la coloración, $rbb \dots ba$. Finalmente este arreglo se puede de 6 formas diferentes: $rbb \dots ba$, $abb \dots br$, $rab \dots bb$, $arb \dots bb$, $bb \dots ar$ y $bb \dots bra$.

Tenemos así las 12 formas posibles en las cuales se pueden disponer las cartas para que el truco funcione.

- **Demostración por inducción [2]**

En efecto, sea S_n la proposición: las únicas soluciones posibles para cartas numeradas de 1 a n son las dos anteriores.

Demostremos ahora por inducción que la proposición S_n es cierta para $n \geq 3$.

El caso $n = 3$ es cierto de inmediato, más aún en este caso ambas soluciones coinciden, 1,3,2 o cualquier permutación.

Supongamos la proposición cierta para n y demostrémosla para $n + 1$.

Supongamos que $n + 1$ está solo en una caja. Si el 1 no estuviese solo, sea N la suma de las dos cartas mayores que podemos tomar de las dos cajas donde no está el $n + 1$. Entonces

$$n + 2 \leq N \leq n + (n - 1).$$

Pero entonces podemos obtener N como la suma de otras cartas pertenecientes a cajas distintas, $N = (n + 1) + (N - n - 1)$ y esto es una contradicción. Por lo tanto el 1 debe estar solo y la solución que tenemos es de la forma, 1, $n + 1$ y $2, \dots, n$.

Supongamos ahora que $n + 1$ no está solo en una caja. Si lo quitamos tendremos una solución para n . Esta no puede ser 1, n y $2, \dots, n - 1$, pues en ese caso no podríamos poner a $n + 1$ en una de las cajas y tener solución. Tendríamos entonces la solución módulo 3 y en este caso $n + 1$ debe ir en la caja correspondiente a su resto módulo 3, pues de lo contrario no tendríamos solución para $n + 1$.

Bibliografía

- [1] The 41st International Mathematical Olympiad. Short-listed problems and solutions. IMO 2000. Korea
- [2] <http://web.archive.org/web/20040509013140/www.kalva.demon.co.uk/imo/isoln/isoln004.html>

Rafael Sánchez Lamonedá
UCV. Escuela de Matemáticas
e-mail: rafael.sanchez@ciens.ucv.ve

INFORMACIÓN NACIONAL

La esquina olímpica.

Rafael Sánchez Lamonedá

El primer semestre del año 2010 ha sido especial para la actividad de Olimpiadas Matemáticas en Venezuela. Celebramos la séptima edición de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM, y la novena del Canguro Matemático. En la OJM participaron 61693 estudiantes de 1° a 5° año de bachillerato, provenientes de 22 estados del país, y en el Canguro Matemático superamos otra vez la cifra de los 156.000 alumnos. De ellos 95.000 son estudiantes de 3°, 4°, 5° y 6° grado y participaron en la Olimpiada Recreativa de Matemáticas. Cabe señalar que en la final Nacional de la OJM, celebrada el 26 de Junio en la Universidad Rafael Urdaneta, se otorgaron tres premios especiales, el Premio Fundación Empresas Polar a la mejor prueba de la competencia, el Premio de la Universidad de Carabobo, otorgado al estudiante de 1° o 2° año, que realizó el mejor examen y el Premio UNEXPO, a la solución más creativa. Los premios recayeron en los jóvenes, David Villalobos del colegio Alemán de Maracaibo, Rubmary Rojas del colegio Divina Pastora de Barquisimeto y Freddy Sánchez del colegio Coronel Miguel A Vásquez de Maracaibo, respectivamente. Una información completa de la OJM 2010, ganadores por estado y problemas de las tres etapas de la competencia aparecen en nuestro sitio www.acm.org.ve.

En la escena internacional también las noticias son buenas. Del 25 de Mayo al 1 de Junio se celebró la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe, OMCC, en Mayagüez, Puerto Rico. Estuvimos representados por un equipo conformado por los jóvenes Diego Peña del colegio Los Hipocampitos de los Altos Mirandinos, Carlos Lamas, colegio Independencia de Barquisimeto y Sergio Villarroel del colegio San Lázaro de Cumaná. El jefe de la delegación fue la profesora Laura Vielma y la tutora Carmela Acevedo, ambas de la Academia Washington de Caracas. La actuación del equipo fue excelente, Diego obtuvo medalla de plata y Carlos y Sergio ganaron medallas de bronce, para en conjunto ganar la Copa El Salvador por segunda vez en la historia de esta competencia. Como he reseñado en otra oportunidad, este premio se otorga al país que muestra mayor progreso en dos años consecutivos. A la XII OMCC asistieron 13 países, Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Jamaica, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Trinidad y Tobago, Venezuela y el anfitrión, Puerto Rico. Por primera vez participaron países de habla inglesa, Jamaica y Trinidad y Tobago. Cada país estuvo representado por una delegación de hasta

tres alumnos y dos profesores.

La siguiente competencia donde estuvimos presentes fue la 51^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, celebrada en Astana, Kazajstán, del 2 al 14 de Julio. Nuestro equipo estuvo conformado por los estudiantes Carmela Acevedo, Academia Washington, Caracas y David Urdaneta, Liceo Los Robles, Maracaibo. El tutor de la delegación fue el profesor Henry Martínez de la UPEL-IPC y el jefe, el profesor Rafael Sánchez Lamonedá, UCV. La joven Carmela Acevedo ganó Mención Honorífica al resolver correctamente el problema 4 de la competencia. En Astana se dieron cita 98 países y 535 estudiantes.

Es importante señalar el apoyo recibido por nuestros patrocinadores, la Fundación Empresas Polar, el Banco Central de Venezuela, la Fundación Amigos de Ciencia, Facultad de Ciencias de la UCV, Acumuladores Duncan, Acumuladores Titán, MRW, la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman, y la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. También queremos agradecer a las Universidades e Instituciones que nos apoyan para la organización de todas nuestras actividades, UCV, USB, UNIMAR, LUZ, URU, UPEL, UCOLA, UNEXPO, UDO . Muchas gracias a todos.

Como siempre finalizamos con algunos de los problemas de las competencias a las cuales asistimos. En esta oportunidad les mostramos los exámenes de la IMO y la OMCC. Cada examen tiene una duración de cuatro horas y media y el valor de cada problema es de 7 puntos.

51^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Primer día

Astana, Kazajstán, 7 de Julio de 2010

Problema 1Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor xy \rfloor) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que z .)

Problema 2 Sea ABC un triángulo con circuncentro O . Sean P y Q puntos interiores de los lados CA y AB , respectivamente. Sean K, L y M los puntos medios de los segmentos BP, CQ y PQ , respectivamente, y Γ la circunferencia que pasa por K, L y M . Se sabe que la recta PQ es tangente a la circunferencia Γ . Demostrar que $OP = OQ$.

Problema 3 Sea \mathbb{N} el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que

$$(g(m) + n)(m + g(n)),$$

es un cuadrado perfecto para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Segundo día

Astana, Kazajstán, 8 de Julio de 2010

Problema 4 Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y P un punto en el interior del triángulo. Las rectas AP, BP y CP cortan de nuevo a Γ en los puntos K, L y M , respectivamente. La recta tangente a Γ en C corta a la recta AB en S . Si se tiene que $SC = SP$, demuestre que $MK = ML$

Problema 5 En cada una de las seis cajas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ hay inicialmente sólo una moneda. Se permiten dos tipos de operaciones:

Tipo 1: Elegir una caja no vacía B_j , con $1 \leq j \leq 5$. Retirar una moneda de B_j y añadir dos monedas a B_{j+1} .

Tipo 2: Elegir una caja no vacía B_k , con $1 \leq k \leq 4$. Retirar una moneda de B_k e intercambiar los contenidos de las cajas (posiblemente vacías) B_{k+1} y B_{k+2} .

Determine si existe una sucesión finita de estas operaciones que deja a las cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vacías y a la caja B_6 con exactamente $2010^{2010^{2010}}$ monedas. (Observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problema 6 Sea a_1, a_2, a_3, \dots una sucesión de números reales positivos. Se tiene que para algún entero positivo s ,

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \text{ tal que } 1 \leq k \leq n-1\}$$

para todo $n > s$. Demuestre que existen enteros positivos ℓ y N , con $\ell \leq s$, tales que $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ para todo $n \geq N$.

XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y Del Caribe

Primer día

Mayagüez, Puerto Rico,
28 de Mayo de 2010

Problema 1 Si $S(n)$ denota la suma de los dígitos de un número natural n , encuentre todas las soluciones de

$$n(S(n) - 1) = 2010$$

mostrando que son las únicas.

Problema 2 Dado el $\triangle ABC$, sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB , respectivamente. Se traza una tangente al circuncírculo del $\triangle ABC$ en A , siendo P y Q las intersecciones respectivas de las rectas LM y LN con dicha tangente. Demuestre que CP es paralela a BQ .

Problema 3 Un jugador coloca una ficha en una casilla de un tablero $m \times n$, dividido en casillas de tamaño 1×1 . El jugador mueve la ficha de acuerdo a las siguientes reglas:

- En cada movimiento, el jugador cambia la ficha de la casilla en la que ésta se encuentra a una de las casillas que tienen un lado en común con ella.
- El jugador no puede ubicar la ficha en una casilla que ésta ha ocupado previamente.
- Dos movimientos consecutivos no pueden tener la misma dirección.

El juego termina cuando el jugador no puede mover la ficha. Determine todos los valores de m y n para los cuales el jugador puede colocar la ficha en alguna casilla tal que ésta haya ocupado todas las casillas al terminar el juego.

Segundo día

Mayagüez, Puerto Rico,
29 de Mayo de 2010

Problema 4 Se desea embaldosar un patio cuadrado de lado N entero positivo. Se dispone de dos tipos de baldosas: cuadradas de 5×5 y rectangulares de 1×3 . Determine los valores de N para los cuales es posible hacerlo.

Nota: El patio debe quedar completamente cubierto sin que las baldosas se sobrepongan.

Problema 5 Sean p , q y r números racionales distintos de cero tales que

$$\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{qr^2} + \sqrt[3]{rp^2}$$

es un número racional distinto de cero. Pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

Problema 6 Sean Γ y Γ_1 dos circunferencias tangentes internamente en A , de centros O y O_1 , y radios r y r_1 ($r > r_1$), respectivamente. Sea B el punto diametralmente opuesto a A en la circunferencia Γ , y C un punto en Γ tal que BC es tangente a Γ_1 en P . Sea A' el punto medio de BC . Si se cumple que O_1A' es paralela a AP , determine la razón $\frac{r}{r_1}$.

Rafael Sánchez Lamonedá
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV
e-mail: rafael.sanchez@ciens.ucv.ve



Asociación Matemática Venezolana
 XXIV JORNADAS VENEZOLANAS DE MATEMÁTICAS
 UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO
 BARQUISIMETO, 12 AL 15 DE ABRIL DE 2011



SEGUNDO ANUNCIO

Las Jornadas Venezolanas de Matemáticas son organizadas anualmente por la Asociación Matemática Venezolana en colaboración con algunas universidades nacionales. Se trata de un evento de carácter científico que sirve como mecanismo de registro y divulgación de los resultados de las investigaciones en distintas líneas de investigación en Matemática que se realizan en el país. Constituyen un foro de encuentro de matemáticos y diversos profesionales interesados en conocer, analizar y debatir los temas más actuales en investigación matemática. La vigésima cuarta edición de las Jornadas Venezolanas de Matemáticas se llevará a efecto en las instalaciones del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado en la ciudad de Barquisimeto entre el 12 y 15 de Abril de 2011. En esta ocasión las sesiones temáticas sobre las que se articula el evento, así como sus coordinadores, son:

SESIÓN	COORDINADORES
Análisis	Marisela Domínguez (marisela.dominguez@ciens.ucv.ve) Ramón Bruzual (ramon.bruzual@ciens.ucv.ve)
Análisis Numérico y Métodos Computacionales	Zenaida Castillo (zenaida.castillo@ciens.ucv.ve) Hugo Lara (hugol@ucla.edu.ve)
Ecuaciones en Derivadas Parciales y Física–Matemática	Antonio Di Teodoro (aditeodoro@usb.ve) Luis González (lagonzalezd@gmail.com)
Educación Matemática e Historia de la Matemática	Fredy González (fredygonzalez1950@gmail.com) Douglas Jiménez (dougjim@gmail.com)
Funciones de variación acotada y Aplicaciones	Mireya Bracamonte (mireyabracamonte@ucla.edu.ve) José Giménez (jgimenez@ula.ve)
Grafos y Combinatoria	Isabel Márquez (isabelmarquez_234@hotmail.com) Luz Marchán (luzelimarchan@gmail.com)
Lógica y Teoría de Conjuntos	José Gregorio Mijares (goyomijares@gmail.com) Carlos Uzcátegui (uzca@ula.ve)
Probabilidad y Estadística	Claudia Antonini (antclaudia@usb.ve) Alfredo Ríos (alfrios@usb.ve)
Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos	Wilmer Colmenárez (wilmerc@ucla.edu.ve) Bladismir Ruiz (bladismir@ula.ve)
Topología y Geometría	Ennis Rosas (ennisrafael@gmail.com) Jorge Vielma (vielma@ula.ve)

Las personas interesadas en participar como expositores en cualquiera de las sesiones temáticas deberán atender a los siguientes requerimientos:

1. La propuesta de toda comunicación oral en cualquier sesión temática tiene que ser hecha ante la coordinación de la correspondiente sesión. El resumen de la misma, de no más de una cuartilla, deber ser enviado, en archivos .tex y .pdf, a las direcciones electrónicas de los coordinadores de la sesión. La fecha límite para ello es 15 de enero de 2011 .
2. La selección de las comunicaciones orales de cada sesión es competencia exclusiva de la coordinación de la misma. Los proponentes recibirán, antes del 5 de febrero de 2011, la notificación sobre la aceptación o no de su propuesta.
3. Toda comunicación oral en las sesiones tendrá una duración de 20 minutos. El número máximo de ellas es de 30; sus horarios serán establecidos por el Comité Organizador, mientras que el orden de presentación será competencia de la coordinación de cada sesión.
4. Los resúmenes deberán ser sometidos siguiendo, preferiblemente, el siguiente formato LATEX:

```

\documentclass[12pt]{amsart}
\usepackage[spanish]{babel}
\begin{document}
\title{TITULO DE LA COMUNICACION ORAL}
\author{Autor 1, \underline{Autor 2}} %% subrayado el expositor
\address{INSTITUCION del Autor 1}
\email{xxx@uni.ve} %% direcci'on electr'onica del Autor 1
\address{INSTITUCION del Autor 2}
\email{xxx@uni.ve} %% direcci'on electr'onica del Autor 2
\maketitle
\section*{Resumen}
ACA VIENE EL CONTENIDO DEL RESUMEN
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{zw}
Z. Zhou and J. Wu. Attractive Periodic Orbits in Nonlinear Discrete-time
Neural Networks with Delayed Feedback. \textit{J. Difference. Equ. and Appl.}
Vol. {\bf 8}, (2001) 467--483.
\end{thebibliography}
\end{document}

```


El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs.F. 10 (US\$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history, philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance. All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsibility of the author. All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs.F. 10 (US\$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: <http://boletinamv.ma.usb.ve/>

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XVII, Número 1, Año 2010

PRESENTACIÓN	3
ARTÍCULOS	
Transient MHD flow between parallel porous plates with heat transfer under exponential decaying pressure gradient and the ion slip.	
Hazem A. Attia	5
M-mesurabilité, par rapport a une multimesure M a valeurs convexes fermées, et densité univoque d' une multimesure.	
Gabriel Birame Ndiaye	17
The cover time of the cube.	
Jose Luis Palacios	33
Moving cards arbitrarily with perfect K-shuffles.	
Roy Quintero	41
DIVULGACIÓN MATEMÁTICA	
Kepler nos enseña a medir el vino que se bebe.	
Juan Nuñez y Juan Portero	49
El problema del mago.	
Rafael Sanchez	59
INFORMACIÓN NACIONAL	
La esquina olímpica	
Rafael Sánchez Lamonedá	63
XXIV Jornadas Venezolanas de Matemáticas	69