ARTÍCULOS

Expansión de las soluciones para ecuaciones integrales cuadráticas.

Eribel Marquina, Javier Quintero, Nelson Viloria.

Resumen. En este artículo encontramos la expansión de la solución de

$$x(t) + \int_a^t d_s K(t,s) g(s) B x(s) = u(t), \qquad t \in [a,b],$$

basada en la teoría de representación de operadores multilineales aplicada a operadores bilineales.

Abstract. In this article we find the expansion of the solution of

$$x(t) + \int_a^t d_s K(t,s) g(s) B x(s) = u(t), \qquad t \in [a,b],$$

based on the theory of representation of multilinear operators applied to bilinear operators.

Introducción

Sean X, Y espacios de Banach y consideremos la ecuación integral no lineal de Volterra-Stieltjes del tipo

$$x(t) + \int_a^t d_s K(t,s) f(s, x(s)) = u(t), \qquad t \in [a,b], \qquad (K),$$

donde x es una función reglada incógnita, u es una función reglada conocida, K es una función simplemente reglada como función de t y uniformemente de semivariación de Fréchet como función de s, anulándose en la diagonal; y la no

2010 AMS Subject Classifications: Primary 45D05, Secondary 06B15.
Keywords: Ecuaciones Integrales de Volterra-Stieltjes, Ecuaciones Integrales Cuadráticas, Integral de Dushnik, Semivariación Acotada, Funciones Regladas, Teoremas de Representación de Riez, Expansiones de Volterra.

linealidad de (K) está dada por $f : [a,b] \times X \longrightarrow X$, con $f(t,x) = g(t)Bx$, donde g es una función reglada y $Bx = L_2 x$ un operador polinomial de grado dos sobre X.

Daremos la expansión de la solución de (K), basándonos en la Teoría de representación de operadores multilineales, aplicada a operadores bilineales.

1 Funciones regladas

Consideremos X, Y, W y Z espacios de Banach, y $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado.

Una función $x : [a,b] \longrightarrow X$ es una **función reglada** si sólo tiene discontinuidades de primera especie, es decir, si

i) para todo $t \in [a,b)$ existe $x(t^+) = \lim_{h\downarrow 0} x(t+h)$ y

ii) para todo $t \in (a,b]$ existe $x(t^-) = \lim_{h\downarrow 0} x(t-h)$.

Al espacio de las funciones regladas de $[a,b]$ en X lo denotamos por $G([a,b];X)$, tal espacio es un espacio de Banach con la norma del supremo.

Teorema 1.1. *(Hönig[3], Theorem 1.3.1) Una función $x : [a,b] \longrightarrow X$ es reglada si, y sólo si, existe una sucesión de funciones escalonadas*

$$(\varphi_n)_{n\geq 1} : [a,b] \longrightarrow X, \textit{ tal que } \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = x(t) \ \forall\ t \in [a,b].$$

Una función $x : [a,b] \longrightarrow X$ es **reglada por la izquierda** si $x(a) = 0$ y $x(t) = x(t^-)$ para todo $t \in (a,b]$. A este subespacio cerrado de $G([a,b];X)$ lo denotamos por $G^-([a,b];X)$.

Una función $x : [a,b] \longrightarrow L(W,X)$ es **simplemente reglada** si, para todo $w \in W$, la función

$$\begin{array}{rcl} xw : [a,b] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & x(t)w, \qquad \text{es reglada} \end{array}$$

y escribimos $x \in G^\sigma([a,b];L(W,X))$, que es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|x\| = \sup_{t\in[a,b]} \|x(t)\|_{L(W,X)} \qquad \forall\, x \in G^\sigma([a,b];L(W,X)).$$

Además,

$$G([a,b];L(W,X)) \subset G^\sigma([a,b];L(W,X)). \qquad \text{(Arbex [1])}$$

2 Funciones de variación y semivariación acotada

Una partición de un rectángulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ es el conjunto $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ con $\mathcal{P}_r \in \mathbb{P}[a_r, b_r]$, donde $a_r = t_0 < \ldots < t_{n(r)} = b_r$.

$\mathbb{P}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$ denota el conjunto de todas las particiones del rectángulo. Además, $n(\mathcal{P}) = n(\mathcal{P}_1) \times n(\mathcal{P}_2)$, $|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_1| \times |\mathcal{P}_2|$.

Sean $z : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow Z$ y $\mathcal{P} \in \mathbb{P}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$. Consideremos $i(1), i(2) \in \mathbb{N}$, con $1 \leq i(r) \leq n(\mathcal{P}_r)$. Definimos

- $\Delta_{i(1)} z : [a_2, b_2] \longrightarrow Z$ por

$$\Delta_{i(1)} z(s) = z(t_{i(1)}, s) - z(t_{i(1)-1}, s) \qquad \forall\, s \in [a_2, b_2]$$

- $\Delta_{i(2)} z : [a_1, b_1] \longrightarrow Z$ por

$$\Delta_{i(2)} z(s) = z(s, t_{i(2)}) - z(s, t_{i(2)-1}) \qquad \forall\, s \in [a_1, b_1]$$

En particular, para $[a, b] \subset \mathbb{R}, z : [a, b] \longrightarrow Z$ está dada por

$$\Delta_i z = z(t_i) - z(t_{i-1}).$$

Luego, $\Delta_{i(1)} \Delta_{i(2)} z$ denota el cálculo $\Delta_{i(1)} \left(\Delta_{i(2)} z\right)(s)$.

Dados $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ espacios de Banach. Consideremos, en $X_1 \times X_2$, la topología producto inducida por las normas sobre X_1, X_2, es decir,

$$\|x\|_{X_1 \times X_2} = \sup\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}.$$

Una aplicación $q : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$ es bilineal si es lineal en cada variable por separado. Diremos que $q \in L(X_1 \times X_2, Y)$ si q es bilineal y continua (es decir, $\exists\, M > 0$ tal que $\|q(x_1, x_2)\| \leq M\|x_1\|\|x_2\|$).

Sea $\alpha : [a, b] \longrightarrow L(X, Y)$. Se define la **semivariación de** α en $[a, b]$ por

$$\begin{aligned} SV[\alpha] &= \sup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}[a,b]} SV[\alpha; \mathcal{P}] \\ &= \sup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}[a,b]} \sup_{\substack{x_i \in X \\ \|x_i\| \leq 1}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n(\mathcal{P})} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] x_i \right\| \right\}. \end{aligned}$$

Si $SV[\alpha] < \infty$, entonces α es una función de **semivariación acotada** y se escribe $\alpha \in SV([a,b]; L(X,Y))$.

Sea $K : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \longrightarrow Z$. Se define **variación de Vitali de** K en $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ por

$$V[K] = \sup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}([a_1,b_1]\times[a_2,b_2])} V[K;\mathcal{P}],$$

donde

$$V[K;\mathcal{P}] = \sum_{i(1),i(2)}^{n(\mathcal{P})} \|\Delta_{i(1)}\Delta_{i(2)}K\|$$

Si $V[K] < \infty$, entonces K es una función de **variación acotada de Vitali en** $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ y se escribe $K \in BV\left([a_1,b_1] \times [a_2,b_2]; Z\right)$.

Sea $K : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \longrightarrow L(X,Y)$, se define la **semivariación de Vitali de** K en $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ como

$$SV[K] = \sup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}([a_1,b_1]\times[a_2,b_2])} SV[K;\mathcal{P}],$$

donde

$$SV[K;\mathcal{P}] = \sup_{\|x_{i(1)i(2)}\| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i(1),i(2)}^{n(\mathcal{P})} \Delta_{i(1)}\Delta_{i(2)}K x_{i(1)i(2)} \right\| : x_{i(1)i(2)} \in X \right\}.$$

Si $SV[K] < \infty$, entonces K se dice de **semivariación acotada de Vitali** y se escribe

$$K \in SV\left([a_1,b_1] \times [a_2,b_2]; L(X,Y)\right).$$

Teorema 2.1. *(Viloria[8]; Teorema 2.1.1)*
$BV\left([a_1,b_1] \times [a_2,b_2], L(X,Y)\right) \subset SV\left([a_1,b_1] \times [a_2,b_2], L(X,Y)\right)$ y si $K \in BV\left([a_1,b_1] \times [a_2,b_2], L(X,Y)\right)$, entonces $SV[K] \leq V[K]$.

Sea $K : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \longrightarrow L(X_1,X_2;Y)$. Se define la **variación de Fréchet** de K en $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ por

$$SF[K] = \sup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} SF[K;\mathcal{P}]$$

donde

$$SV[K;\mathcal{P}] = \sup_{\|x_{i(r)}\|\leq 1}\left\{\left\|\sum_{i(1),i(2)}^{n(\mathcal{P})}\Delta_{i(1)}\Delta_{i(2)}K\left(x_{i(1)},x_{i(2)}\right)\right\| : x_{i(r)}\in X_r\right\}$$

Si $SF[K]<\infty$, entonces K se dice de **semivariación acotada de Fréchet** y se escribe $K\in SF\left([a_1,b_1]\times[a_2,b_2];L(X_1,X_2;Y)\right)$.

Teorema 2.2. *(Viloria [8]; Teorema 2.1.2)*
$BV\left([a_1,b_1]\times[a_2,b_2],L\left(X_1,X_2;Y\right)\right)\subset SF\left([a_1,b_1]\times[a_2,b_2];L\left(X_1,X_2;Y\right)\right)$
Además, si $K\in BV\left([a_1,b_1]\times[a_2,b_2],L\left(X_1,X_2;Y\right)\right)$, *entonces*

$$SF[K] < V[K].$$

3 Integral interior de Dushnik

La integral interior de Dushnik fue concebida por Pollard, en 1920, y redescubierta por Dushnik, en 1931. Posteriormente fue utilizada por Kaltenborn, en 1934, para representar los elementos del espacio $L((G[a,b],\mathbb{R}),\mathbb{R})$, resultado generalizado por Hönig, en 1975, al espacio $L(G([a,b],X);Z)$ y extendido por Viloria [7], en 1997, para representar los elementos de los espacios $L\left(\prod_{r=1}^{m}G^-([a,b],X);Z\right)$ y $L\left(\prod_{r=1}^{m}G^-([a_r,b_r];X_r),G^-([a,b];Y)\right)$, y también para los operadores causales en $L\left(\prod_{r=1}^{m}G^-([a_r,b_r];X),G^-([a,b];Y)\right)$. En este trabajo es empleada para representar, de manera particular, los elementos de $L\left(G^-([a_1,b_1];X)\times G^-([a_2,b_2];X);G^-([a,b];Y)\right)$.

Sean $e,(e_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}}$ en un espacio topológico E, escribiremos $\lim_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}} e_{\mathcal{P}} = e$ si, para todo entorno V de e, existe $\mathcal{P}_V\in\mathbb{P}$ tal que

$$\mathcal{P}\geq\mathcal{P}_V \Leftrightarrow e_{\mathcal{P}}\in V.$$

Definición 3.1. *(Integral doble de Dushnik)*
Sean $K:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\longrightarrow L(X_1,X_2;Y), x_1:[a_1,b_1]\longrightarrow X_1$ *y* $x_2:[a_2,b_2]\longrightarrow X_2$. *Si existe* $\lim_{P\in\mathbb{P}}\sigma_P$, *donde* $\mathbb{P}=\mathbb{P}([a_1,b_1]\times[a_2,b_2])$ *y*

$\sigma_P = \sum_{i(1)}^{n(P_1)} \sum_{i(2)}^{n(P_2)} \Delta_{i(1)}\Delta_{i(2)}K(x_1(\xi_{i(1)}), x_2(\xi_{i(2)})$ *con* $\xi_{i(r)} \in (t_{i(r)-1}, t_{i(r)})$, *entonces es llamado* ***integral interior de Dushnik*** *de la función* $x = (x_1, x_2)$ *con respecto al núcleo* K *y se denota por*

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} d_{s_1 s_2}K(s_1, s_2)(x_1(s_1), x_2(s_2)).$$

Un resultado, que nos ofrece una condición suficiente para la existencia de la integral, es el siguiente

Teorema 3.1. *(Viloria [8]; Lema 2.2.1)*
Sean $K \in SF\left([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]; L\left(X_1, X_2; Y\right)\right)$ *y* $x_r \in G^-([a_r, b_r]; X_r), r = 1, 2.$
Entonces

(i) Existe $\Lambda_K : G^-([a_1, b_1]; X_1) \times G^-([a_2, b_2]; X_2) \longrightarrow Y$, *definida por*

$$\Lambda_K(x_1; x_2) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} d_{s_1 s_2}K(s_1; s_2)(x_1(s_1), x_2(s_2)),$$

(ii) Λ_K *es bilineal,*

(iii) $\|\Lambda_K x\| \leq SF[K]\|x_1\|\|x_2\|$,

(iv) Si $x_r \in \Omega_0([a_r, b_r]; X_r)$ *para algún* $r = 1, 2$, *entonces* $\Lambda_K x = 0$.

4 Teoremas de representación integral para operadores bilineales

Definición 4.1. *Sea* $K : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow L\left([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]; Z\right)$ *tal que*

$$K(a_1, s_2) = K(s_1, a_2) = 0 \qquad \forall\, s_1 \in [a_1, b_1] \text{ y } \forall\, s_2 \in [a_2, b_2].$$

Entonces diremos que $K \in SF_{a^2}\left([a_1, b_1] \times [a_2, b_2], L\left(X_1 \times X_2; X\right)\right)$.

Teorema 4.1. *(Viloria [8]; Teorema 2.3.1)*
La aplicación $K \mapsto \Lambda_K$*, definida por*

$$\Lambda_K(x_1, x_2) = \int_{a_2}^{b_2} d_{s_2} \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(s_1, s_2) x_1(s_1) x_2(s_2),$$

es una isometría entre los espacios de Banach

$$SF_{a^2}\left([a_1, b_1] \times [a_2, b_2], L\left(X_1, X_2; Z\right)\right)$$

y

$$L\left(G^-([a_1, b_1]; X_1), G^-([a_2, b_2]; X_2); Z\right).$$

Además,

$$K(s_1, s_2)(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = \Lambda_K\left(\mathcal{X}_{(a_1, s_1]}\overline{x_1}, \mathcal{X}_{(a_2, s_2]}\overline{x_2}\right)$$

con $\|\Lambda_K\| = SF[K]$.

Definición 4.2. *Sea* $K : [a, b] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow L\left(X_1, X_2; Y\right)$. *Definimos*
$K^t : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow L\left(X_1, X_2; Y\right)$ *y* $K_{s^2} : [a, b] \longrightarrow L\left(X_1, X_2; Y\right)$ *por*

$$K^t(s_1, s_2) = K(t_1, s_1, s_2) = K_{s^2}(t).$$

Además, consideremos las siguientes propiedades:
(G^σ) : *K es simplemente reglada como función de* t*, es decir,*

$$K_{s^2} \in G^\sigma\left([a, b]; L\left(X_1, X_2; Y\right)\right).$$

(SF^u) : *K es uniformemente de semivariación de Fréchet acotada como función de* (s_1, s_2)*, esto es,*

$$SF^u[K] = \sup_{t \in [a,b]} [K^t] < \infty.$$

$(SF^u_{a^2})$: *K satisface* (SF^u) *y* $K^t \in SF_{a^2}\left([a_1, b_1] \times [a_2, b_2], L\left(X_1, X_2; Y\right)\right)$ *para todo* $t \in [a, b]$.
Si K verifica (G^σ) *y* (SF^u)*, escribimos*

$$K \in G^\sigma \cdot SF^u\left([a, b] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], L\left(X_1, X_2; Y\right)\right).$$

Análogamente definimos $K \in G^\sigma \cdot SF^u_{a^2}$.

Teorema 4.2. *(Viloria [8]; Teorema 2.3.2)*
La aplicación $K \mapsto \Lambda_K$ dada por

$$\Lambda_K(x_1,x_2)(t) = \int_{a_2}^{b_2} d_{s_2} \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_2(s_2)$$

es una isometría entre los espacios de Banach

$$G^\sigma \cdot SF^u_{a^2}\left([a,b]\times[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]; L\left(X_1,X_2;Y\right)\right)$$

y

$$L\left(G^-([a_1,b_1];X_1), G^-([a_2,b_2];X_2); G([a,b];Y)\right),$$

con $K(t,s_1,s_2)(\overline{x_1},\overline{x_2}) = \Lambda_K(\mathcal{X}_{(a_1,s_1]}\overline{x_1}, \mathcal{X}_{(a_2,s_2]}\overline{x_2})(t)$ y $\|\Lambda_K\| = SF^u[K]$.

Definición 4.3. *Sea $K \in G^\sigma \cdot SF^u\left([a,b]^3; L_2\left(X;Y\right)\right)$, donde $[a,b]^3 = [a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ y $L_2(X;Y) = L\left(X\times X;Y\right)$.*
Si, para todo $x \in X$, la función $K_\Delta : [a,b] \longrightarrow Y$ definida por

$$K_\Delta(t) = K(t,t,t)(x,x) \quad \forall\, t \in [a,b]$$

es reglada, se dice que K es simplemente reglada en la diagonal y escribimos

$$K \in G^\sigma_\Delta SF^u\left([a,b]^3, L_2(X;Y)\right).$$

Si, además, $K_\Delta(t) = 0 \quad \forall\, t \in [a,b]$, se dice que K se anula en la diagonal y escribimos

$$K \in G^\sigma_0 \cdot SF^u\left([a,b]^3, L_2(X;Y)\right).$$

Definición 4.4. *$P \in L_2(G([a,b],X); G([a,b],Y))$ es un operador **causal** si para todo $x \in G([a,b];X)$ y para todo $T \in [a,b]$,*

$$x|_{[a,T]} = 0 \Rightarrow P(x,x)|_{[a,T]} = 0.$$

Definición 4.5. *Sea $K \in G^\sigma \cdot SF^u([a,b]^3; L_2(X,Y))$. Para $x = (x_1,x_2)$ con $x_r \in G^-([a,b];X), r = 1,2$, definimos*

$$(kx)(t) = \int_a^t d_{s_2} \int_a^t d_{s_1} K(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_2(s_2) \quad \forall\, t \in [a,b]$$

A continuación mostramos que los operadores bilineales causales también pueden ser representados.

Teorema 4.3. *(Viloria [8]; Teorema 2.3.3)*
La aplicación $K \mapsto k$ *es una isometría entre el espacio de Banach* $G_0^\sigma \cdot SF^u([a,b]^3, L_2(X;Y))$ *y el subespacio de los operadores causales de* $L_2(G^-([a,b],X); G([a,b],Y))$, *donde* $\|k\| = SF^u[K]$ *y*

$$K(t,s_1,s_2)(\overline{x_1},\overline{x_2}) = k\left(\mathcal{X}_{(a,t]}\overline{x_1}, \mathcal{X}_{(a,t]}\overline{x_2}\right)(t).$$

Ahora presentaremos el concepto de polinomial de Volterra-Stieltjes de grado dos.

Definición 4.6. *Si* $h_2 \in G^\sigma \cdot SF_a^u([a,b]^3, L_2(X;Y))$, *el operador*

$$P_2 : G^-([a,b];X) \longrightarrow G^-([a,b];X),$$

definido por

$$P_2x(t) = h_0(t) + \int_a^b d_{s_1} h_1(t,s_1)x(s_1) + \int_a^b d_{s_2} \int_a^b d_{s_1} K(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_2(s_2)$$

es llamado Polinomio de Volterra-Stieltjes de grado dos.

Daremos a continuación la definición de Expansión de Volterra-Stieltjes de un operador en $G^-([a,b];X)$.

Definición 4.7. *Un operador* $T : G^-([a,b];X) \longrightarrow G^-([a,b];X)$ *posee una expansión de Volterra-Stieltjes de grado dos, en una vecindad de* $x_0 \in G^-([a,b];X)$, *si existen núcleos* h_1, h_2 *tales que*

$$T(x_0+x)-T(x_0) = \int_a^t d_{s_1} h_1(t_1 s_1)x(s_1) + \int_a^t d_{s_2} \int_a^t d_{s_1} h_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x(s_2) + R_2(x_0;x),$$

donde $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{\|R_2(x_0;\lambda x)\|}{\lambda^2} = 0.$

Teorema 4.4. *(Hille - Phillips [2]; Theorem 26.3.5)*
Sean $V \subset X$ *no vacío, abierto y* $T : V \longrightarrow X$ *un operador 2 veces diferenciable Gâteaux. Entonces*

a) ∂T_{x_0} *es lineal simétrica,* $\partial^2 T_{x_0}$ *es bilineal y simétrico con* $\partial T_{x_0}[x]$ *y* $\partial^2 T_{x_0}[x]$ *polinomios homogéneos de grado 1 y 2, respectivamente.*

b) $T(x_0+x) - T(x_0) = \partial T_{x_0}[x] + \frac{1}{2}\partial^2 T_{x_0}[x] + R_2(x_0,x)$, *con*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|R_2(x_0,\lambda x)\|}{\lambda^2} = 0$$

Corolario 4.1. *Sea* $V \subset G^-([a,b];X)$ *no vacío, abierto y* $T : V \longrightarrow G^-([a,b];X)$ *2 veces diferenciable Gâteaux en* x_0*, con* $\partial^2 T_{x_0}$ *causal. Entonces* T *tiene una expansión de Volterra-Stieltjes de grado dos.*

Definición 4.8. *Una aplicación* $T : V \longrightarrow Y$ *es analítica en* V*, si puede representarse como*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[x]^n,$$

donde a_n *es un operador polinomial homogéneo de grado* n *y la serie converge absolutamente en* V*, y uniformemente sobre conjuntos cerrados y acotados de* V*.*

Teorema 4.5. *(Pisanelli [6])*
Sea $V \subset X$ *no vacío, abierto, acotado y* $T : V \longrightarrow X$ *un operador localmente acotado tal que*

i) T *es diferenciable Gâteaux,*

ii) ∂T_{x_0} *es invertible en una vecindad de* x_0*.*

Entonces existen vecindades de x_0 *y* T_{x_0} *respectivamente donde* T *posee una única inversa dada por:*

$$T^{-1}u = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m[u],$$

donde

$$\begin{aligned} Q_1[u] &= [\partial T_{x_0}]^{-1}[u] \\ Q_m[u] &= -[\partial T_{x_0}]^{-1} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j_1+\ldots+j_n=m} \frac{1}{n!} \partial^m T_{x_0}(Q_{j_1}, \ldots, Q_{j_n})[u]. \end{aligned}$$

Como resultado del teorema anterior, obtenemos cómo podemos definir la inversa local de un operador polinomial de grado dos, sobre espacios de Banach de forma explícita.

Corolario 4.2. *Sea* $V \subset X$ *no vacío, abierto, acotado y* $T : V \longrightarrow X$ *un operador polinomial de grado dos, con* ∂T_{X_0} *invertible en una vecindad de* x_0*. Entonces, existen vecindades de* x_0 *y de* T_{x_0}*, respectivamente, donde* T *tiene una única inversa dada por:*

$$T^{-1}u = Q_1[u] + Q_2[u],$$

con

$$\begin{aligned} Q_1[u] &= [\partial T_{x_0}]^{-1}[u] \\ Q_2[u] &= -[\partial T_{x_0}]^{-1}(\partial^2 T_{x_0})(Q_1, Q_1)[u] - \frac{1}{2}[\partial T_{x_0}]^{-1}\partial^2 T_{x_0}(Q_1, Q_1)[u]. \end{aligned}$$

Definición 4.9. *Consideremos el espacio vectorial*

$$\mathbb{F} = \Big\{ x : [a,b] \longrightarrow X \ : \ x \text{ es una función} \Big\}$$

y $f : [a,b] \times X \longrightarrow X$ *una función cualquiera. El operador no lineal* $F : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ *dado por*

$$Fx(t) = f(t, x(t)) \ \ \forall\, t \in [a,b], \ \forall\, x \in \mathbb{F},$$

es llamado el operador composición asociado a la función f.

Definición 4.10. *El conjunto de las funciones* $f : [a,b] \times X \longrightarrow X$ *tales que*

- f *es reglada por la izquierda en la primera variable,*
- f *es Lipschitz en la segunda variable,*

forman un espacio de Banach, denotado $G^- \cdot Lips([a,b] \times X; X)$ *con la norma*

$$\|f\| = \sup \Big\{ \|f_0\|; [f] \Big\},$$

donde $f_0 : [a,b] \longrightarrow X$ *definida por* $f_0(t) = f(t, \theta)$ *y*

$$[f] = \inf \Big\{ M \ : \ \|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq M\|x_2 - x_1\|, \quad x_1, x_2 \in X \Big\}.$$

A continuación expondremos el resultado de Viloria [7], que indica las condiciones necesarias y suficientes en f, para que F actúe en el espacio $G^-([a,b]; X)$.

Teorema 4.6. *Sea* $f : [a,b] \times X \longrightarrow X$ *Lipschitz en la segunda variable. Entonces, el operador* F *de composición asociado a* f*, es tal que*
$F : G^-([a,b]; X) \longrightarrow G^-([a,b]; X)$ *si, y sólo si,* $f \in G^- \cdot Lips([a,b] \times X; X)$. *Además,* F *es acotado.*

5 Condiciones de existencia y unicidad de soluciones

Consideremos la ecuación

$$x(t) + \int_a^t d_s K(t,s) f(s, x(s)) = u(t), \qquad t \in [a,b] \qquad (K)$$

Teorema 5.1. *(Hönig)*
Sean $K \in G_0^\sigma \cdot SV^u\left([a,b] \times [a,b]; L(X,X)\right)$ *y* $f \in G^- \cdot Lips([a,b] \times X, X)$ *con*
$C(K,\mathcal{P})[f] < 1$*, para algún* $\mathcal{P} \in \mathbb{P}([a,b])$*. Entonces, para cada* $u \in G([a,b];X)$*, existe una única* $x \in G([a,b];X)$*, solución de* (K)*, que depende continuamente de* u, K *y* f*; donde*

$$C(K,\mathcal{P}) = \sup_{0 \le i \le n-1} \left\{ \|K(t_{i+}^{\cdot}, t_i)\|; \sup_{t_i \le t \le t_{i+1}} SV_{(t_i,t]}[K^t] \right\}.$$

El siguiente resultado expresa en el caso lineal, es decir cuando $f(t,x(t)) = x(t)$, que el resolvente de la solución puede ser expresado por una Serie de Neumann.

Teorema 5.2. *(Arbex [1], Corolario 3.22 parte b))*
Sea $K \in G_0^\sigma \cdot SV^u\left([a,b] \times [a,b]; L(X,X)\right)$ *y* $C(K,\mathcal{P}) < 1$*, para algún* $\mathcal{P} \in \mathbb{P}([a,b])$*. Entonces, para cada* $u \in G([a,b];X)$*, existe una única* $x \in G([a,b];X)$*, solución de* (K)*, la cual esta dada por*

$$x(t) = u(t) - \int_a^t d_s R(t,s) u(s),$$

donde el operador resolvente se escribe

$$R(s,t) = I(t,s) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} K_n(t,s),$$

con

$$\begin{cases} K_1(t,s) &= K(t,s) \\ K_{n+1}(t,s) &= \displaystyle\int_a^t d_s K(t,\sigma) K_n(\sigma,s) \quad \forall\, n \ge 1 \end{cases}$$

núcleos iterados.

6 Forma Explícita de la Solución para ecuaciones cuadráticas

Consideremos la ecuación integral no lineal de Volterra-Stieltjes

$$x(t) + \int_a^t d_s K(t,s) f(s, x(s)) = u(t), \qquad t \in [a,b] \qquad (K)$$

donde $x \in G([a,b];X)$ es incógnita, $u \in G([a,b];X)$ es conocida y
$K \in G_0^\sigma \cdot SF^u\left([a,b] \times [a,b] \times [a,b]; L_2(X,X)\right)$.

Ahora supongamos $V \subset X$ no vacío, abierto, acotado y $f : [a,b] \times V \longrightarrow X$, definida por

$$f(t,x) = g(t)Bx,$$

donde $g \in G^-([a,b];\mathbb{C})$ y B un operador polinomial homogéneo de grado 2 sobre X, definido por $Bx = L_2(x,x)$, con L_2 bilineal simétrico.

Veamos que

$$f \in G^- \cdot Lips([a,b] \times V, X).$$

En efecto,

- f es reglada por la izquierda en la primera variable,
- f es Lipschitz en la segunda variable.
- Sea $t \in (a,b]$

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(t-h,x) &= \lim_{h \to 0} g(t-h)Bx \\ &= g(t^-)Bx \qquad (\text{ya que } g \in G^-([a,b],X)), \\ &= f(t^-,x) \end{aligned}$$

  luego,

$$f(t^-,x) = \lim_{h \to 0} f(t-h,x) \qquad \forall\, x \in X,$$

  esto demuestra que f es reglada por la izquierda en la primera variable.

- Sean $x_1, x_2 \in V$ tales que $[x_1,x_2] \subset V$. Queremos ver que existe $L \in [0,1)$ tal que:

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

Así,

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \leq \sup_{x_0\in[x_1,x_2]} \|\partial_x f(t,x_0)\|\|x_1-x_2\| \qquad \forall\, t\in[a,b],$$

y como $[a,b]$ es compacto y $g\in G^{-}([a,b];\mathbb{C})$, sabemos que g es acotada. Además, V es acotado, por lo tanto existe $M>0$ tal que

$$\sup_{x_0\in[x_1,x_2]} \|\partial_x f(t,x_0)\| \leq M \qquad \forall\, t\in[a,b].$$

De donde, se sigue que

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \leq M\|x_1-x_2\| \qquad \forall\, t\in[a,b].$$

En consecuencia, f es Lipschitz respecto a X.

□

Consideremos ahora, el operador $F: G^{-}([a,b],X)\longrightarrow G^{-}([a,b],X)$ de composición asociado a f,

$$Fx(t)=f(t,x(t)) \qquad \forall\, x\in G^{-}([a,b];X),$$

el cual es acotado (por el Teorema 4.4).

Y, definiendo el operador lineal k por:

$$(kF)x(t)=\int_a^t d_sK(t,s)Fx(s), \tag{1}$$

la ecuación (K) se puede expresar como

$$\begin{aligned} x(t)+kFx(t) &= u(t) \qquad \forall\, t\in[a,b] \\ (I+kF)x &= u \qquad (x\in G^{-}([a,b];X)), \end{aligned}$$

donde $I: G^{-}([a,b];X)\longrightarrow G^{-}([a,b];X)$ es el operador identidad.

Si consideramos el operador $T: G^{-}([a,b];X)\longrightarrow G^{-}([a,b];X)$,

$$T=I+kF$$

que actúa sobre funciones $x\in G^{-}([a,b];X)$, entonces el operador T se puede invertir localmente hallando $[\partial T_{x_0}]^{-1}$ y $\partial^2 T_{x_0}$, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 6.1. *Sean* $K \in G_0^\sigma \cdot SV^u([a,b] \times [a,b] \times [a,b]; L_2(X,X))$ *y* $f \in G^- \cdot Lips([a,b] \times X; X)$. *Si* $C(K;\mathcal{P})[f] < 1$, *para algún* $\mathcal{P} \in \mathbb{P}([a,b])$, *y* $\|\partial F\| \leq \inf\{1, 1/SF[K]\}$, *entonces*

(i) T *es 2 veces diferenciable Gâteaux y*

(ii) la diferencial de T *posee inversa.*

Demostración:

(i) De su misma definición, tenemos que Fx es diferenciable Gâteaux, lo que nos induce la diferenciabilidad de T. Así que, dado $x_0 \in W \subset G^-([a,b];X)$, abierto y acotado,

$$\begin{aligned}
\partial T_{x_0}x(t) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{T(x_0+\lambda x)(t) - T(x_0)(t)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{(I+kF)(x_0+\lambda x)(t) - (I+kF)(x_0)(t)}{\lambda} \\
&= Ix(t) + k \lim_{\lambda\to 0} \frac{F(x_0+\lambda x) - F(x_0)(t)}{\lambda} \\
&= Ix(t) + k\partial F_{x_0}[x](t).
\end{aligned}$$

Siendo,

$$\begin{aligned}
\partial F_{x_0}[x](t) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{F(x_0+\lambda x)(t) - F(x_0)(t)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(t,x_0+\lambda x) - f(t,x_0)}{\lambda}
\end{aligned}$$

donde, empleando las reglas del cálculo diferencial en espacios de Banach,

$$\begin{aligned}
\partial f_x(t,x_0) &= g(t)\partial B_{x_0}[x] \\
&= g(t)[L_2(x_0,x) + L_2(x,x_0)] \\
&= 2g(t)L_2(x_0,x).
\end{aligned}$$

Luego, $\partial T_{x_0} = I + k\partial F_{x_0}$ con $\partial T_{x_0} \in L(G^-([a,b];X); G^-([a,b];X))$.

Ahora, calculemos

$$
\begin{aligned}
\partial^2 T_{x_0}[x](t) &= \partial^2 T_{x_0}(x_1(t), x_2(t)) \\
\partial^2 T_{x_0}(x_1(t), x_2(t)) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}\left\{ \partial T_{x_0+\lambda x_2(t)}(x_1)(t) + \partial T_{x_0}(x_1)(t) \right\} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}\left\{ I(x_1)(t) + k\partial F_{x_0+\lambda x_2(t)}[x_1](t) - I(x_1)(t) - k\partial F_{x_0}[x_1](t) \right\} \\
\partial^2 T_{x_0}[x](t) &= k \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}\left\{ \partial F_{x_0+\lambda x_2(t)}[x_1](t) + \partial F_{x_0}[x_1](t) \right\} \\
&= k\partial^2 F_{x_0}[x_1, x_2](t) = k\partial^2 F_{x_0}[x](t),
\end{aligned}
$$

siendo

$$
\begin{aligned}
\partial^2 F_{x_0}[x](t) &= \partial_x(\partial_x f(t, x_0)) \\
&= \partial_x(2g(t)L_2(x_0, x)) = 2g(t)[L_2(x_0, x) + L_2(x, x_0)] \\
&= 4g(t)L(x_0, x).
\end{aligned}
$$

Esto es, $\partial^2 T_{x_0}$ existe y, además,

$$
\partial^2 T_{x_0} = k\partial^2 F_{x_0} \in L\left(G^-([a,b]; X) \times G^-([a,b]; X); G^-([a,b]; X)\right).
$$

Así, T es un operador 2 veces diferenciable Gâteaux.

Por otro lado, en virtud del Teorema 4.4,

$$
T(x_0 + x) - T(x_0) = \partial T_{x_0}[x] + \frac{1}{2}\partial^2 T_{x_0}[x]
$$

y resulta T un operador polinomial de grado dos.
Por otro lado, como por hipótesis

$$
\|\partial F\| \leq \inf\left\{1, \frac{1}{SF[K]}\right\},
$$

se tiene que

$$
\|k\partial F\| \leq \|k\|\|\partial F\| \leq SF[K]\frac{1}{SF[K]} = 1
$$

de donde ∂T_{x_0} es invertible en una vecindad de x_0. Se sigue entonces, del corolario anterior, que existen vecindades de x_0 y $T(x_0)$, respectivamente, donde T posee una única inversa definida por

$$T^{-1}u = Q_1[u] + Q_2[u] \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_1[u] &= [\partial T_{x_0}]^{-1}[u] \\ Q_2[u] &= -[\partial T_{x_0}]^{-1}\partial^2 T_{x_0}(Q_1, Q_1)[u] - \frac{1}{2}[\partial T_{x_0}]^{-1}\partial^2 T_{x_0}(Q_1, Q_1)[u]. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para hallar $(\partial T_{x_0})^{-1}$, basta resolver la ecuación lineal

$$Hx = u, \tag{3}$$

donde $\quad H = \partial T_{x_0} = I + k\partial F_{x_0}$.

La cual, según demostró Arbex, tiene resolvente determinada a partir de una serie de Neumann.

Pasemos a calcular H^{-1}.

La ecuación (3) puede escribirse como

$$x(t) + \int_a^t d_s K(t,s)\partial F_{x_0} x(s) = u(t) \tag{4}$$

donde, por ser

$$\partial F_{x_0} \in L(G^-([a,b];X); G^-([a,b];X)),$$

posee una representación integral, esto es existe

$$\overline{h_1} \in G_0^\sigma \cdot SV^u\left([a,b]\times[a,b]; L(X,X)\right)$$

tal que

$$\partial F_{x_0} x(t) = \int_a^t d_s \overline{h_1}(t,s)x(s) \qquad t \in [a,b],$$

con

$$\begin{aligned}\overline{h_1}(t,s)x &= \partial F_{x_0}(x\mathcal{X}_{(a,t]})(s)\\ &= 2g(s)L_2(x_0(s), x\mathcal{X}_{(a,t]}(s))\end{aligned}$$

y

$$\|\partial F_{x_0}\| = SV[\overline{h_1}] \quad = \quad \sup_{t\in[a,b]} SV[\overline{h_1}^t] < \infty.$$

Entonces, la ecuación (4) posee una única solución dada por

$$x(t) = u(t) - \int_a^t d_s R(t,s)u(s), \tag{5}$$

donde la resolvente está representada por el operador

$$R(t,s) = I + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}K_n(t,s)$$

siendo $K_1 = \overline{h_1}$ y $K_{n+1}(t,s) = \displaystyle\int_a^t d_\sigma \overline{h_1}(t,\sigma)K_n(\sigma,s)$.

Así, hemos hallado $[\partial T_{x_0}]^{-1}u$, mediante la expresión (5).

Ahora, dado que

$$\partial^2 F_{x_0} \in L\left(G^-([a,b];X), G^-([a,b];X); G^-([a,b];X)\right)$$

existe un único $\overline{h_2} \in G^\sigma \cdot SF^u_{a^2}\left([a,b]\times[a,b]\times[a,b]; L(X,X;X)\right)$ tal que

$$\partial^2 F_{x_0}(x_1,x_2)(t) = \int_a^t d_{s_2}\int_a^t d_{s_1}\overline{h_2}(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_2(s_2),$$

donde

$$\begin{aligned}
\overline{h_2}(t,s_1,s_2)(x_1,x_2) &= \partial^2 F_{x_0}(x_1\mathcal{X}_{(a,t]}(s_1), x_2\mathcal{X}_{(a,t]}(s_2)) \\
&= 4g(t)L_2\bigg(x_0(t), x_1\mathcal{X}_{(a,t]}(s_1)+x_2\mathcal{X}_{(a,t]}(s_2)\bigg) \\
&= 4g(t)\bigg[L_2(x_0(t), x_1\mathcal{X}_{(a,t]}(s_1)) + L_2(x_0(t), x_2\mathcal{X}_{(a,t]}(s_2))\bigg] \\
&= 2\bigg[2g(t)L_2(x_0(t), x_1\mathcal{X}_{(a,t]}(s_1)) + 2g(t)L_2(x_0(t), x_2\mathcal{X}_{(a,t]}(s_2))\bigg] \\
&= 2\bigg[\overline{h_1}(t,s_1)x_1 + \overline{h_1}(t,s_2)x_2\bigg].
\end{aligned}$$

□

Finalmente, podemos concluir que la única solución para un sistema no lineal dado por una ecuación integral de Volterra-Stieltjes de la forma

$$x(t) + \int_a^t d_s K(t,s)g(s)Bx = u(t),$$

se expresa mediante la igualdad

$$x(t) = Q_1[u](t) + Q_2[u](t)$$

donde

$$Q_1[u](t) = u(t) - \int_a^t d_s R(t,s)u(s) \quad \text{con} \quad R = I + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}K_n$$

para $K_1 = \partial F_{x_0}$ y $K_{n+1}(t,s) = \int_a^t d_\sigma \partial F_{x_0}(x\mathcal{X}_{(s,t]}(\sigma))K_n(\sigma,s)$.

Y,

$$Q_2[u](t) = -\frac{3}{2}(I + k\partial F_{x_0})^{-1}(k\partial^2 F_{x_0})(Q_1,Q_1)[u](t)$$

con

$$\partial^2 F_{x_0}(Q_1,Q_1)u(t) = \int_a^t d_{s_2}\int_a^t d_{s_1}\overline{h_2}(t,s_1,s_2)(Q_1u(s_1), Q_1u(s_2)),$$

siendo

$$\overline{h_2} \in G_0^{\sigma} \cdot SF^u \left([a,b] \times [a,b] \times [a,b]; L(X,X;X)\right),$$

tal que

$$\begin{aligned} \overline{h_2}(t,s_1,s_2)(x_1,x_2) &= \partial^2 F_{x_0}(x_1\mathcal{X}_{(a,t]}(s_1), x_2\mathcal{X}_{(a,t]}(s_2)) \\ &= 2[\overline{h_1}(t,s_1)x_1 + \overline{h_1}(t,s_2)x_2] \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \overline{h_1}(t,s_1)x_1 &= 2g(s_1)L_2(x_0(s_1), x_1\mathcal{X}_{(a,t]}(s_1)) = \partial F_{x_0}x_1(s_1) \\ \overline{h_2}(t,s_2)x_2 &= 2g(s_2)L_2(x_0(s_2), x_2\mathcal{X}_{(a,t]}(s_2)) = \partial F_{x_0}x_2(s_2). \end{aligned}$$

References

[1] Arbex, S. *Ecuações Integrais de Volterra-Stieltjes com núcleos descontínuos*, Dr. Tese, IME - USP, Brasil. 1976.

[2] Hille, E and Phillips, R. *Functional analysis and semi-groups*, volumen 31. rev. ed, American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence. 1957.

[3] Hönig, C. *Volterra-Stieltjes Integral Equations*, Math Studies 16, North - Holland Publ. Comp, Amsterdam. 1975.

[4] Hönig, C. *Volterra-Stieltjes Integral Equations*, Funct. Diff. Eq. and Bif., Springer Lecture Notes in Mathematics 799, pag 173 - 216. 1979.

[5] Hönig, C. *Équations Integrales généraliseés at applications*, Publ. Math. D'orsay. Exp. n^{O} 5. 1983.

[6] Pisanelli, D. *Sull'invertibilità degli operatori analitici negli spazi di Banach*, Boll. Un. Mat. Italia 3(19). 110-113. 1964.

[7] Viloria, N. *Exponsão das soluções de sistemas não lineares no espaço das funções regradas a valores em espaços de Banach.* Dr. Tese, IME - USP, Brasil (1997).

[8] Viloria, N. *El operador de Nemytskij en el espacio de las funciones regladas,* Divulgaciones Matemáticas, Vol. 12, 149-153, No. 2(2004).

Eribel Marquina,
Magiter Scientiae en Matemáticas.

Javier Quintero,
Área de Matemáticas, Centro Local Mérida, Universidad Nacional Abierta.

Nelson Viloria,
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes.

e-mail: eribelm@hotmail.com, javier58@cantv.net, nelson@ula.ve