INFORMACIÓN NACIONAL

La esquina olímpica

Rafael Sánchez Lamoneda

La Esquina Olímpica del primer número de este volumen del Boletín de la AMV, se escribió cuando estaba comenzando la actividad internacional del año 2011. En esa oportunidad informamos sobre los eventos por venir. Ahora podemos resumir toda la experiencia de este año en el ámbito internacional.

El 21 de Mayo se organizó en 6 ciudades del país, Porlamar, Maracaibo, Valencia, Barquisimeto, Puerto Ordaz y Caracas, la Olimpiada de Mayo, con la participación de más de 200 alumnos menores de 16 años. De este grupo de jóvenes se seleccionaron los 10 mejores de cada nivel, de acuerdo a las reglas de la competencia y sus calificaciones, así como las pruebas de los alumnos ubicados en los lugares, primero, tercero y séptimo de cada nivel, fueron enviadas a Buenos Aires, donde está instalado el Comité Organizador de esa olimpiada. Los resultados fueron muy buenos, nuestros muchachos ganaron 17 premios, una medalla de oro, una de plata, cuatro de bronce y 11 menciones honoríficas. Los resultados se pueden ver en nuestra página web, www.amc.ciens.ucv.ve, también pueden tener una información completa en la página oficial de la Olimpiada Matemática Argentina.

Del 16 al 26 de Junio se celebró en Colima, México, la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, OMCC, con la asistencia de 12 países y 33 estudiantes. Cuba fue el único ausente a la cita y Jamaica participó por segundo año consecutivo. Allí también se destacaron nuestros estudiantes. Rubmary Rojas del colegio Divina pastora de Barquisimeto ganó medalla de plata y Sergio Villarroel, del colegio San Lázaro de Cumaná, ganó medalla de bronce.

La Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, se llevó a cabo en Amsterdam del 12 al 24 de Julio y como reseñamos en el número anterior asistimos con dos alumnos, Diego Peña del colegio Los Hipocampitos, estado Miranda y Carlos Lamas del colegio Independencia de Barquisimeto. Ambos jóvenes ganaron mención honorífica. Asistieron 101 países y 564 estudiantes y se contó con la participación de dos países como observadores, Senegal y Uganda.

Finalmente del 23 de Septiembre al 1 de Octubre estuvimos presentes en la XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM. A la cita concurrieron 20 países y un total de 78 estudiantes. Faltaron República Dominicana y Cuba. Nuestro equipo estuvo integrado por Diego Peña, Rubamry Rojas y Sergio Villarroel, solo tres de los cuatro posibles, pues a última hora Carlos Lamas no pudo viajar. La jefe de delegación fue la profesora Laura Vielma de la Academia Washington y la tutora Estefanía Ordaz, alumna de la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Simón Bolívar. Otra vez los tres jóvenes fueron galardonados, Diego obtuvo medalla de bronce y Rubmary y Sergio menciones honoríficas.

Como se puede observar, ha sido un buen año para nuestros estudiantes. Cerramos esta esquina con los problemas de la XIII OMCC, la 52ª IMO y la XXIV OIM..

XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe.

Primer Día

Problema 1. En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

Problema 2. Sean ABC un triángulo escaleno, D el pie de la altura desde A, E la intersección del lado AC con la bisectriz del $\angle ABC$, y F un punto sobre el lado AB. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sean X, Y, Z los puntos donde se cortan las rectas AD con BE, BE con CF, CF con AD, respectivamente. Si XYZ es un triángulo equilátero, demuestra que uno de los triángulos OXY, OYZ, OZX es un triángulo equilátero.

Problema 3, *Aplicar un desliz* a un entero $n \geq 2$ significa tomar cualquier primo p que divida a n y reemplazar n por $\frac{n+p^2}{p}$. Se comienza con un entero cualquiera mayor o igual a 5 y se le aplica un desliz. Al número así obtenido se le aplica un desliz, y así sucesivamente se siguen aplicando deslices. Demuestra que, sin importar los deslices aplicados, en algún momento se obtiene el número 5.

Segundo Día

Problema 4 Encuentra todos los enteros positivos p, q y r, con p y q números primos, que satisfacen la igualdad

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{(p+1)(q+1)}=\frac{1}{r}.$$

Problema 5. Los números reales positivos x, y, z son tales que

$$x+\frac{y}{z}=y+\frac{z}{x}=z+\frac{x}{y}=2.$$

Determine todos los valores posibles de $x+y+z$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Sean Y y Z los pies de las perpendiculares desde B y C sobre FD y DE, respectivamente. Sea F_1 la reflexión de F con respecto a E y sea E_1 la reflexión de E con respecto a F. Si $3EF = FD + DE$, demuestre que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.

Nota: La *reflexión* de un punto P respecto a un punto Q es el punto P_1 ubicado sobre la recta PQ tal que Q queda entre P y P_1, y $PQ = QP_1$.

52ª Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Primer Día

Problema 1. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma $a_1+a_2+a_3+a_4$ por s_A. Sea n_A el número de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para las cuales a_i+a_j divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

Problema 2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En $\mathcal{S}$ no hay tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta ℓ que pasa por un único punto $P \in \mathcal{S}$, al cual llamaremos pivote. Se rota ℓ en el sentido de las manecillas del reloj con centro en el pivote P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$ al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro, (pivote), se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentra otro punto de $\mathcal{S}$. Este proceso continúa indefinidamente, siendo siempre el centro de rotación un punto de $\mathcal{S}$. Demostrar que se puede elegir un punto $P \in \mathcal{S}$ y una recta ℓ que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como un centro de rotación un número infinito de veces.

Problema 3. Sea f una función del conjunto de los números reales en si mismo que satisface

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para todos los números reales x, y. Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \leq 0$.

Segundo Día

Problema 4. Sea Sea $n > 0$ un entero. Se dispone de una balanza de dos platillos y de n pesas cuyos pesos son 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Se coloca cada una de las pesas en la balanza, de una en una, mediante una sucesión de n movimientos. En el primer movimiento se elige una pesa y se coloca en el platillo izquierdo. En cada uno de los movimientos siguientes se elige una de las pesas restantes y se coloca en el platillo de la izquierda o en el de la derecha. Determinar el número de formas de llevar a cabo estos n movimientos de manera tal que en ningún momento el platillo de la derecha tenga más peso que el platillo de la izquierda.

Problema 5. Sea f una función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros positivos. Se supone que para cualesquiera dos enteros m y n, la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m-n)$. Demostrar que para todos los enteros m y n con $f(m) \leq f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Sean ℓ una recta tangente a Γ, y sean ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c las rectas que se obtienen al reflejar ℓ con respecto a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo determinado por las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c es tangente a la circunferencia Γ.

XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Primer Día

Problema 1. En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana. Cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que obtiene al aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicarlo por 2, o multiplicarlo por 3, o sumarle 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual que 2011 gana. Hallar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Problema 2. Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres números enteros no nulos x, y, z tales que

$$x + y + z = 0 \quad y \quad \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{z} = \tfrac{1}{n}.$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo y sean X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Suponga que C_1, C_2 y C_3 son circunferencias con cuerdas YZ, ZX, XY, respectivamente, tales que C_1 y C_2 se corten sobre la recta CZ y que C_1, C_3 se corten sobre la recta BY. Suponga que C_1 corta a las cuerdas XY y ZX en J y M respectivamente, que C_2 corta a las cuerdas YZ y XY en L e I, respectivamente, y que C_3 corta alas cuerdas YZ y ZX en K y N, respectivamente. demostrar que I, J, K, L, M y N están sobre una misma circunferencia.

Segundo Día

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AB \neq BC$, y sea O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.

Problema 5. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 \quad \geq \quad (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

Problema 6. Sean k y n números enteros positivos, con $k \geq 2$. En una línea recta se tienen kn piedras de k colores diferentes de tal forma que hay n piedras de cada color. Un *paso* consiste en intercambiar de posición dos piedras adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr, con a lo sumo m *pasos*, que las n piedras de cada color queden seguidas si:

- n es par.
- n es impar y $k = 3$.

Rafael Sánchez Lamoneda
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV

e-mail: rafael.sanchez@ciens.ucv.ve