**ARTÍCULOS**

# Topología de Zariski para el espectro del módulo libre $(K\,[\mathbf{X}])^s$

Sandra Patricia Barragán Moreno

**Resumen.** En el documento que a continuación se presenta se estudia la topología de Zariski para el espectro primo del módulo libre $K\,[X]^s$; en particular, se calcula una base de abiertos y se consideran propiedades como la compacidad, la conexidad y de separación intermedias entre $T_0$ y $T_1$.

**Abstract.** In this paper, the Topology of Zariski is studied for the prime spectrum of the free module $K\,[X]^s$, and in particular, a base of open sets is calculated, and properties such as compacteness, connectedness and separation $T_0$ and $T_1$ are considered.

**Palabras clave:** submódulo primo, topología de Zariski.

**2010 AMS Subject Classifications:** Primaria: 13P10. Secundaria: 13E05.

## 1 Introducción.

Tomando como base el estudio detallado de la teoría de las Bases de Gröbner para los submódulos de $K\,[x_1, \ldots, x_n]^s$ presentado en [1] y los algoritmos presentados en [4] y [8], se inicia el estudio del espectro primo de $K\,[X]^s$. Para llevar a cabo este trabajo en la segunda sección se establecen las definiciones y proposiciones preliminares. En la tercera sección se muestra la definición para la topología de Zariski para $SpecK\,[X]^s$, allí mismo se examina la compacidad, la conexidad y la separación para este espacio. Finalmente, en la tercera sección se exhiben ejemplos en los que se ha usado el programa CoCoA para facilitar los cálculos.

## 2 Preliminares.

En adelante, $R$ representa un anillo conmutativo y $K$ un cuerpo.

**Definición 2.1.** *Sean $R$ un anillo y $P$ un ideal propio. Se dice que $P$ es un ideal primo de $R$ si para cualesquiera $a$,$b \in R$ con $ab \in P$ se cumple que $a \in P$ ó $b \in P$.*

**Definición 2.2.** *Se denota con $X^R := Spec(R) := \{P : P \text{ es ideal primo de} R\}$ al espectro primo del anillo $R$. La colección de ideales maximales de $R$ se denota por $Max(R)$.*

**Definición 2.3.** *Para cada subconjunto $E$ de $R$, $V(E) := \left\{P \in X^R : E \subseteq P\right\}$. Además, $X_a^R := X^R - V(\{a\}) = X^R - V(\langle a\rangle)$. Finalmente, $rad(R)$ representará el nilradical de $R$ y consta de los elementos nilpotentes de $R$.*

**Definición 2.4.** *Un $R$-módulo $M$ se dice noetheriano si cada cadena ascendente de submódulos se estabiliza. El anillo $R$ es Noetheriano si considerado como $R$-módulo es Noetheriano.*

**Definición 2.5.** *Sea $M$ un $R$- módulo. Para cualquier submódulo $N$ de $M$ se denota el anulador del módulo $M/N$ por $(N : M)$ y coincide con el conjunto $\{r \in R : rM \subseteq N\}$.*

**Definición 2.6.** *Sean $R$ un anillo y $M$ un $R$ - módulo. Un submódulo $K$ de $M$ es submódulo primo si $K \neq M$ y siempre que $r \in R$ y $m \in M$ con $rm \in K$, entonces $r \in (K : M)$ ó $m \in K$.*

**Definición 2.7.** *Se denota con $SpecM := \{K \mid \text{es un submódulo primo de} M\}$. Además, el espectro de $M$ relativo al ideal primo $P$ se define por*
*$Spec_P M := \{K \in X : (K : M) = P\}$.*

**Definición 2.8.** *Sea $R$ un anillo y $M$ un $R$- módulo, se dice que $M$ es carente de primos si $X = \phi$.*

**Definición 2.9.** *Para $X \neq \phi$, se tiene la función natural*

$$\begin{array}{rccl} \psi : & X & \longrightarrow & X^{\overline{R}} \\ & K & \mapsto & \psi(K) = (K : M) \diagup AnnM = \overline{(K : M)} \end{array}$$

*donde $X^{\overline{R}} = Spec\,(R \diagup AnnM)$*

**Proposición 2.10.** *$SpecK\,[\mathbf{X}]^s \neq \phi$.*

*Demostración.* Todo submódulo maximal es primo. En particular cada módulo no nulo finitamente generado tiene al menos un submódulo primo. □

**Proposición 2.11.** $AnnK[\mathbf{X}]^s = \langle 0 \rangle$

*Demostración.*
$$AnnK[\mathbf{X}]^s = (0 : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq K[\mathbf{X}]$$

$\supseteq 0 \in (0 : K[\mathbf{X}]^s)$.
$\subseteq$ Sea $r \in (0 : K[\mathbf{X}]^s)$ entonces $r\mathbf{m} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$, en particular para $(1, \ldots, 1)$ así, $r(1, \ldots, 1) = (0, \ldots, 0)$ de donde $(r, \ldots, r) = (0, \ldots, 0)$ y por tanto $r = 0$. □

**Proposición 2.12.** *La función natural calculada para los submódulos $U$ de $SpecK[\mathbf{X}]^s$, equivale a $(U : K[\mathbf{X}]^s)$.*

*Demostración.* Como $SpecK[\mathbf{X}]^s \neq \phi$, se tiene que

$$\begin{array}{llll} \psi : & SpecK[\mathbf{X}]^s & \longrightarrow & Spec(K[\mathbf{X}] \diagup AnnK[\mathbf{X}]^s) = SpecK[\mathbf{X}] \\ & U & \mapsto & \psi(U) = (U : K[\mathbf{X}]^s) \diagup AnnK[\mathbf{X}]^s \\ & & & = \overline{(U : K[\mathbf{X}]^s)} = (U : K[\mathbf{X}]^s) \end{array}$$

□

**Proposición 2.13.** *Sea $I$ un ideal primo de $K[\mathbf{X}]$, el submódulo*

$$I^s = \{\mathbf{m} \mid \mathbf{m} = (a_1, \ldots, a_s),\ a_i \in I\}$$

*es primo.*

*Demostración.* Sea $I \in SpecK[\mathbf{X}]$, $I^s$ es submódulo primo de $K[\mathbf{X}]^s$. Para comprobar esto, primero se verá que $I^s$ es submódulo, luego que es propio y finalmente primo. $I^s$ es submódulo: Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in I^s$, entonces $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_s)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_s)$ tales que $u_i$, $v_i \in I$ para $1 \leq i \leq s$. Así

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, \ldots, u_s) + (v_1, \ldots, v_s) = (u_1 + v_1, \ldots, u_s + v_s) \in I^s$$

Ahora, sea $r \in K[\mathbf{X}]$, $r\mathbf{u} = r(u_1, \ldots, u_s) = (ru_1, \ldots, ru_s) \in I^s$. $I^s$ es submódulo propio: Supongamos que $I^s = K[\mathbf{X}]^s$ entonces $(1, \ldots, 1) \in I^s$ y así $1 \in I$ que no es cierto. $I^s$ es submódulo primo: Sea $r \in K[\mathbf{X}]$ y $\mathbf{v} \in K[\mathbf{X}]^s$ con

$$r\mathbf{v} \in I^s \text{ y } r \notin (I^s : K[\mathbf{X}]^s)$$

entonces $r\mathbf{v} = (rv_1, \ldots, rv_s)$ donde cada $rv_i \in I$. Como $I$ es ideal primo de $K[\mathbf{X}]$ se tiene que $r \in I$ o $v_i \in I$. Si $r \in I$ entonces $r\mathbf{u} \in I^s$ para cualquier $\mathbf{u} \in K[\mathbf{X}]^s$, lo cual contradice que $r \notin (I^s : K[\mathbf{X}]^s)$. De modo que $v_i \in I$ para $1 \leq i \leq s$. Por tanto, $\mathbf{v} \in I^s$. □

**Proposición 2.14.** *Si $I \in SpecK[\mathbf{X}]$ entonces*

$$IK[\mathbf{X}]^s \in SpecK[\mathbf{X}]^s \text{ y } (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) = I.$$

*Demostración.* Inicialmente se verá que $(IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) = I$.

Sea $r \in (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$ esto implica que $r\mathbf{m} \in IK[\mathbf{X}]^s$ para todo $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$, en particular para los elementos de la base canónica $\mathbf{e}_i$, esto es $r\mathbf{e}_i \in IK[\mathbf{X}]^s$, de modo que $r \in I$. La otra contenencia es fácil de verificar.

Ahora se probará que $IK[\mathbf{X}]^s \in SpecK[\mathbf{X}]^s$. Nótese que $IK[\mathbf{X}]^s$ es un submódulo propio, en otro caso $1 \in (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$ que no es posible, porque es un ideal propio.

Ya se tiene que $(IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$ es un ideal primo. Faltaría probar que

$$T\left(K[\mathbf{X}]^s \diagup IK[\mathbf{X}]^s\right) = \left\{\overline{\mathbf{0}}\right\}$$

es decir, considerando a $K[\mathbf{X}]^s \diagup IK[\mathbf{X}]^s$ como $K[\mathbf{X}] \diagup I$ - módulo, éste resulta sin torsión. Sea

$$\overline{\mathbf{m}} \in T\left(K[\mathbf{X}]^s \diagup IK[\mathbf{X}]^s\right)$$

entonces existe $\widehat{r} \neq \widehat{0}$ tal que $\widehat{r}\overline{\mathbf{m}} = \overline{0}$, es decir que $r\mathbf{m} \in IK[\mathbf{X}]^s$ de donde $r(m_1, \ldots, m_s) \in IK[\mathbf{X}]^s$. Así, $rm_i \in I$ y como $I$ es un ideal primo $r \in I$ o $m_i \in I$ pero $r \notin I$ porque $\widehat{r} \neq \widehat{0}$, de tal manera que $m_i \in I$ para $1 \leq i \leq s$, por tanto $m \in IK[\mathbf{X}]^s$ y por eso $\overline{\mathbf{m}} = \overline{\mathbf{0}}$. □

**Proposición 2.15.** *La función natural $\psi$ es sobreyectiva.*

*Demostración.* Las Proposiciones 2.13 y 2.14, permiten mostrar que la función natural es sobreyectiva. □

## 3 Topología de Zariski para el espectro primo de $K[\mathrm{X}]^s$.

**Proposición 3.1.** *Para $K[\mathbf{X}]^s$ como $K[\mathbf{X}]$-módulo y para cualquier $N \leq K[\mathbf{X}]^s$ , se considera la variedad*

$V(N) := \{U \in SpecK[\mathbf{X}]^s \mid (N : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)\}$

*entonces:*

*(i)* $V(0) = SpecK[\mathbf{X}]^s$ *y* $V(K[\mathbf{X}]^s) = \phi$

*(ii)* *Para cada familia $\{N_i\}_{i\in I}$ de submódulos de $K[\mathbf{X}]^s$ se cumple que* $\bigcap_{i\in I} V(N_i) = V\left(\sum_{i\in I}(N_i : K[\mathbf{X}]^s) K[\mathbf{X}]^s\right)$

*(iii)* *Para $N_1$, $N_2 \leq K[\mathbf{X}]^s$ se tiene $V(N_1) \cup V(N_2) = V(N_1 \cap N_2)$.*

*la topología inducida $\tau$ se denomina topología de Zariski para* $SpecK[\mathbf{X}]^s$ *donde*

$\varsigma(K[\mathbf{X}]^s) := \{V(N) : N \leq K[\mathbf{X}]^s\}$

*es la colección de cerrados.*

**Proposición 3.2.** *Para $K[\mathbf{X}]^s$ como $K[\mathbf{X}]$- módulo $\psi$ es continua para la topología de Zariski.*

*Demostración.* Sea $V^{K[\mathbf{X}]}(I)$ cerrado en $SpecK[\mathbf{X}]$,

$$V^{K[\mathbf{X}]}(I) = \{P : P \in SpecK[\mathbf{X}], I \subseteq P\}.$$

Se mostrará que $\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}(I)\right) = V(IK[\mathbf{X}]^s)$.

$\supseteq$ Considérese $U \in V(IK[\mathbf{X}]^s)$, así $U \in SpecK[\mathbf{X}]^s$ y $(IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$.

Como $U \in SpecK[\mathbf{X}]^s$, $(U : K[\mathbf{X}]^s) \in SpecK[\mathbf{X}]$ además $I \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$ puesto que $I \subseteq (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$.

En efecto, para $i \in I$, $iK[\mathbf{X}]^s \subseteq IK[\mathbf{X}]^s$ es decir que $i \in (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$. $\psi(U) \in V^{K[\mathbf{X}]}(I)$ pues $(U : K[\mathbf{X}]^s) \in SpecK[\mathbf{X}]$ y $\overline{I} \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s) = \psi(U)$. En conclusión $U \in \psi^{-1}(V^{K[\mathbf{X}]}(I))$.

$\subseteq$ Sea $U \in \psi^{-1}(V^{K[\mathbf{X}]}(I))$, esto implica que $U \in SpecK[\mathbf{X}]^s$ y $\psi(U) \in V^{K[\mathbf{X}]}(I)$, así que mediante la definición de la función, $(U : K[\mathbf{X}]^s) \in V^{K[\mathbf{X}]}(I)$ esto es $(U : K[\mathbf{X}]^s) \in SpecK[\mathbf{X}]$ y $I \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$, de donde

$$(IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$$

se puede concluir entonces que $U \in V(IK[\mathbf{X}]^s)$. $\square$

**Proposición 3.3.** $V(N) = V((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s)$

*Demostración.* $\supseteq$ Sea $U \in V((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s)$ entonces

$$((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s).$$

Si $r \in (N : K[\mathbf{X}]^s)$ entonces $r\mathbf{m} \in (N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$, para todo $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$, esto es $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq (N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$. Así $r \in ((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$ y por hipótesis $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$.

$\subseteq$ Sea $U \in V(N)$, por definición de esta variedad $(N : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$. Si $r \in ((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$, $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq (N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$, de aquí que $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$, es decir, para todo $m \in K[\mathbf{X}]^s$, $r\mathbf{m} \in (U : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$, de donde $r\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} s_i\mathbf{m}_i$ pero cada $s_i\mathbf{m}_i \in U$ pues $s_iK[\mathbf{X}]^s \subseteq U$ de modo que la suma también pertenece a $U$.

Por tanto, $r\mathbf{m} \in U$ y como $U$ es submódulo primo, $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$ ó $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$, para todo $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$. Pero como $U \subset K[\mathbf{X}]^s$, existe $\mathbf{m'} \notin U$ luego $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$. $\square$

**Proposición 3.4.** *La función natural $\psi$ es cerrrada y abierta.*

*Demostración.* (i) $\psi$ es cerrada: Se verá que, para todo $N \leq K[\mathbf{X}]^s$ se tiene que $\psi(V(N)) = V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))$. Teniendo en cuenta que $\psi$ es una función continua tal que

$$\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}(I)\right) = V(IK[\mathbf{X}]^s)$$

para todo ideal $I$ de $K[\mathbf{X}]$. Tomando $I = (N : K[\mathbf{X}]^s)$, en la Proposición 3.3 se tiene que

$$\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right) = V((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s) = V(N).$$

De lo que se sigue que $\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right) = V(N)$, así que

$$\psi\left(\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right)\right) = \psi(V(N)),$$

ya que $\psi$ es sobreyectiva (ver Proposición 2.15), se concluye que

$$V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s)) = \psi(V(N)).$$

(ii) $\psi$ es abierta:

$$\psi(SpecK[\mathbf{X}]^s - V(N)) =$$
$$\psi\left(SpecK[\mathbf{X}]^s - \psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right)\right) =$$
$$\psi\left(\psi^{-1}(SpecK[\mathbf{X}]) - \psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right)\right) =$$

$$\psi\left(\psi^{-1}\left(SpecK[\mathbf{X}] - V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right)\right) = SpecK[\mathbf{X}] - V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))$$

pues $\psi$ es sobreyectiva como lo muestra la Proposición 2.15.

□

**Proposición 3.5.** $X_r^{K[\mathbf{X}]} := SpecK[\mathbf{X}] - V(\langle r\rangle)$;$X_r := SpecK[\mathbf{X}]^s - V(rK[\mathbf{X}]^s)$

**Proposición 3.6.** *Sea $K[\mathbf{X}]^s$ considerado como $K[\mathbf{X}]$- módulo, $\psi$ la función natural y $r \in K[\mathbf{X}]$ entonces*

*(i)* $\psi^{-1}\left(X_r^{K[\mathbf{X}]}\right) = X_r$

*(ii)* $\psi(X_r) = X_r^{K[\mathbf{X}]}$*, porque $\psi$ es sobre.*

*Demostración.* (i) $\psi^{-1}\left(X_r^{K[\mathbf{X}]}\right) = \psi^{-1}\left(X^{K[\mathbf{X}]} - V^{K[\mathbf{X}]}(\langle r\rangle)\right) = \psi^{-1}\left(X^{K[\mathbf{X}]}\right) - \psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}(\langle r\rangle)\right) = SpecK[\mathbf{X}]^s - \psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}(\langle r\rangle)\right) = SpecK[\mathbf{X}]^s - V(\langle r\rangle K[\mathbf{X}]^s) = SpecK[\mathbf{X}]^s - V(rK[\mathbf{X}]^s) = X_r$.

(ii) Como $\psi^{-1}\left(X_r^{K[\mathbf{X}]}\right) = X_r$, $\psi\left(\psi^{-1}\left(X_r^{K[\mathbf{X}]}\right)\right) \subseteq X_r^{K[\mathbf{X}]}$, así que $\psi(X_r) \subseteq X_r^{K[\mathbf{X}]}$. Como $\psi$ es sobreyectiva, $\psi\left(\psi^{-1}\left(X_r^{K[\mathbf{X}]}\right)\right) = X_r^{K[\mathbf{X}]}$.

□

**Proposición 3.7.** *Para $K[\mathbf{X}]^s$ como $K[\mathbf{X}]$- módulo, $B = \{X_r\}_{r\in K[\mathbf{X}]}$ es una base para $K[\mathbf{X}]^s$ donde $X_r := SpecK[\mathbf{X}]^s - V(rK[\mathbf{X}]^s)$.*

*Demostración.* Como $SpecK[\mathbf{X}]^s \neq \phi$, considérese $H$ un abierto no vacío de $SpecK[\mathbf{X}]^s$. Como

$$\varsigma(K[\mathbf{X}]^s) = \{V(N) = V(IK[\mathbf{X}]^s) : I \leq K[\mathbf{X}]\}$$

$H = SpecK[\mathbf{X}]^s - V(IK[\mathbf{X}]^s)$ para algún ideal $I$ de $K[\mathbf{X}]$. Por la Proposición 3.3 y por ser $\tau$ topología se tiene que

$$V(IM) = V\left(\sum_{a_i\in I} a_iK[\mathbf{X}]^s\right) = V\left(\left(\sum_{a_i\in I} a_iK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s\right)K[\mathbf{X}]^s\right) =$$

$$V\left(\sum_{a_i\in I}(a_iK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s\right) = \bigcap_{a_i\in I} V(a_iK[\mathbf{X}]^s)$$

Así,

$$H = SpecK[\mathbf{X}]^s - \bigcap_{a_i\in I} V(a_iK[\mathbf{X}]^s)$$

$$= \bigcup_{a_i\in I}(SpecK[\mathbf{X}]^s - V(a_iK[\mathbf{X}]^s)) = \bigcup_{a_i\in I} X_{a_i}$$

Por tanto, $B$ forma una base para la topología de Zariski. □

**Nota 3.8.** *$X_r^{K[\mathbf{X}]}$ es un espacio compacto.*

**Proposición 3.9.** *$X_r$ es compacto para cada $r \in K[\mathbf{X}]$, en particular $SpecK[\mathbf{X}]^s$ es compacto.*

*Demostración.* Tomando $X_r$ un abierto básico de $SpecK[\mathbf{X}]^s$, sea

$$\{X_{r_\lambda},\ r_\lambda \in K[\mathbf{X}] : \lambda \in \Lambda\}$$

un cubrimiento abierto básico para $X_r$, es decir, $X_r \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_{r_\lambda}$. Como $\psi$ es sobreyectiva (ver Proposición 2.15) $\psi(X_r) = X_r^{K[\mathbf{X}]}$,

$X_r^{K[\mathbf{X}]} = \psi(X_r) \subseteq \psi\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_{r_\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]}$ ; así $X_r^{K[\mathbf{X}]} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]}$.

Como $X_r^{K[\mathbf{X}]}$ es compacto, así que existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$, $\Lambda'$ finito tal que $X_r^{K[\mathbf{X}]} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} X_r^{K[\mathbf{X}]}$ . Por lo tanto,

$$X_r = \psi^{-1}\left(X_r^{K[\mathbf{X}]}\right) \subseteq \psi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]}\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} \psi^{-1}\left(X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]}\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} X_{r_\lambda}$$

Tomando $r = 1$, $SpecK\left[\mathbf{X}\right]^s$ es compacto. □

**Nota 3.10.** *Para cualquier anillo $R$ se sabe que las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(i)* $X^R$ *no es conexo.*

*(ii)* $R \cong R_1 \times R_2$*, siendo* $R_1$*,* $R_2$ *anillos no nulos.*

*(iii)* $R$ *contiene idempotentes no triviales.*

**Proposición 3.11.** $SpecK\left[\mathbf{X}\right]$ *es conexo.*

*Demostración.* Teniendo en cuenta la observación anterior, como $K$ es un cuerpo, $K\left[\mathbf{X}\right]$ no contiene otros idempotentes distintos del 0 y el 1, porque es un anillo que no tiene divisores de cero. Se tiene entonces que $SpecK\left[\mathbf{X}\right]$ es conexo. □

**Proposición 3.12.** $SpecK\left[\mathbf{X}\right]^s$ *es conexo.*

*Demostración.* Supongamos que $SpecK\left[\mathbf{X}\right]^s$ no es conexo. Entonces $SpecK\left[\mathbf{X}\right]^s$ tiene al menos un subconjunto propio $Y$ no vacío que es simultáneamente abierto y cerrado. $\psi\left(Y\right) \subseteq SpecK\left[\mathbf{X}\right]$, $\psi\left(Y\right)$ es abierto y cerrado, pero esto no puede ocurrir porque en la proposición 3.11 se probó que $SpecK\left[\mathbf{X}\right]$ es conexo. □

**Proposición 3.13.** *La función natural* $\psi$ *no es inyectiva.*

*Demostración.* Como $K\left[\mathbf{X}\right]^s$ es finitamente generado, entonces tiene un submódulo maximal $U$ que es primo, sea $I := \left(U : K\left[\mathbf{X}\right]^s\right)$ su cociente. Además, por la Proposición 2.14, $IK\left[\mathbf{X}\right]^s$ también es submódulo primo y su cociente coincide con $I$, esto es, $I = \left(IK\left[\mathbf{X}\right]^s : K\left[\mathbf{X}\right]^s\right)$. Esto implica que

$$\psi\left(U\right) = \psi\left(IK\left[\mathbf{X}\right]^s\right)$$

falta ver que $U \neq IK\left[\mathbf{X}\right]^s$.

Supongamos que $U = IK\left[\mathbf{X}\right]^s$. $IK\left[\mathbf{X}\right]^s \subseteq I^s$, donde $I^s = \{(a_1, \ldots, a_s) \mid a_i \in I\}$. En efecto, si $I = \langle h_1, \ldots, h_s\rangle$, entonces, un elemento $\mathbf{m} \in IK\left[\mathbf{X}\right]^s$ es de la forma

$$\mathbf{m} = \beta_1(\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_n h_n)(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \beta_s(\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_n h_n)(0, 0, \ldots, 1)$$

cada $\beta_j \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \in I$ y por esto $\mathbf{m} \in I^s$.

Pero como $U = IK\left[\mathbf{X}\right]^s$, $IK\left[\mathbf{X}\right]^s$ adquiere la calidad de maximal y por eso $U = I^s$, esto implica que $I^s$ es también maximal, sin embargo

$$U = \underbrace{(I,\ldots,I,I)}_{s\text{-componentes}} \subsetneq \underbrace{(I,\ldots,I,K[\mathbf{X}])}_{s\text{-componentes}}$$

hecho que contradice la maximalidad de $I^s$. □

**Definición 3.14.** *Sea $Y$ un subconjunto de $SpecK[\mathbf{X}]^s$. Se denota con $\vartheta(Y)$ la intersección de todos los elementos de $Y$, y la clausura de $Y$ en $SpecK[\mathbf{X}]^s$ para la topología de Zariski por $cl(Y)$.*

**Proposición 3.15.** *Si $Y \subseteq SpecK[\mathbf{X}]^s$, $V(\vartheta(Y)) = cl(Y)$. Además, $Y$ es cerrado si y sólo si $V(\vartheta(Y)) = Y$.*

*Demostración.* Se mostrará que $Y \subseteq V(\vartheta(Y))$, y que $V(\vartheta(Y))$ es el más pequeño de los cerrados que contienen a $Y$. Sea $K \in Y$ entonces

$$\vartheta(Y) = \bigcap_{L\in Y} L \subseteq K \text{ por tanto } K \in V(\vartheta(Y)).$$

Ahora, sea $V(N)$ cualquier subconjunto cerrado de $SpecK[\mathbf{X}]^s$ que contiene a $Y$ es decir $Y \subseteq V(N)$ esto implica que para todo $K \in Y$, $K \in V(N)$, así que para todo $K \in Y$ $(N : SpecK[\mathbf{X}]^s) \subseteq (K : SpecK[\mathbf{X}]^s)$, en consecuencia

$$(N : SpecK[\mathbf{X}]^s) \subseteq \left(\bigcap_{K\in Y} K : SpecK[\mathbf{X}]^s\right).$$

En efecto, si $r \in (N : SpecK[\mathbf{X}]^s)$, entonces $r \in (K : SpecK[\mathbf{X}]^s)$ para todo $K \in Y$, de donde $rSpecK[\mathbf{X}]^s \subseteq K$ para todo $K \in Y$, por esto

$$rSpecK[\mathbf{X}]^s \subseteq \bigcap_{K\in Y} K \text{ y así } r \in \left(\bigcap_{K\in Y} K : SpecK[\mathbf{X}]^s\right)$$

$(N : SpecK[\mathbf{X}]^s) \subseteq (\vartheta(Y) : SpecK[\mathbf{X}]^s)$ entonces $V(\vartheta(Y)) \subseteq V(N)$ puesto que para todo $Q \in V(\vartheta(Y))$ por definición se tiene que

$$(\vartheta(Y) : SpecK[\mathbf{X}]^s) \subseteq (Q : SpecK[\mathbf{X}]^s)$$

de donde $(N : SpecK[\mathbf{X}]^s) \subseteq (\vartheta(Y) : SpecK[\mathbf{X}]^s) \subseteq (Q : SpecK[\mathbf{X}]^s)$.

Por tanto $Y \subseteq V(\vartheta(Y)) \subseteq V(N)$, de donde el cerrado más pequeño que contiene a $Y$ es $V(\vartheta(Y))$. Por tanto, $V(\vartheta(Y)) = cl(Y)$.

Finalmente, si $Y$ es cerrado $Y = cl(Y)$, entonces $Y = cl(Y) = V(\vartheta(Y))$. □

**Proposición 3.16.** *$SpecK[\mathbf{X}]^s$ no es un espacio $T_0$.*

*Demostración.* Como la función natural $\psi$ no es inyectiva (ver Proposición 3.13), existen $U$ y $L$ que pertencen a $SpecK[\mathbf{X}]^s$ tales que $\psi(U) = \psi(L)$ esto es $(U : SpecK[\mathbf{X}]^s) = (L : SpecK[\mathbf{X}]^s)$. Ahora, supongamos que $SpecK[\mathbf{X}]^s$ es $T_0$, entonces existe un abierto $W$ tal que $U \in W$ pero $L \in SpecK[\mathbf{X}]^s - W$. Según la Proposición 3.15

$$SpecK[\mathbf{X}]^s - W = cl(SpecK[\mathbf{X}]^s - W) = V(\vartheta(SpecK[\mathbf{X}]^s - W)),$$

por esto $L \in V(\vartheta(SpecK[\mathbf{X}]^s - W))$ de donde

$$(\vartheta(SpecK[\mathbf{X}]^s - W) : SpecK[\mathbf{X}]^s) \subseteq (L : SpecK[\mathbf{X}]^s)$$

lo que implica que

$$(\vartheta(SpecK[\mathbf{X}]^s - W) : SpecK[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : SpecK[\mathbf{X}]^s)$$

Así, $U \in V(\vartheta(SpecK[\mathbf{X}]^s - W)) = SpecK[\mathbf{X}]^s - W$ que es una contradicción. □

**Proposición 3.17.** *$SpecK[\mathbf{X}]^s$ no es un espacio $T_1$.*

*Demostración.* Si el espacio fuera $T_1$ sería $T_0$ lo cual no es cierto. □

**Proposición 3.18.** *$MaxK[\mathbf{X}]^s \neq SpecK[\mathbf{X}]^s$.*

*Demostración.* Supongamos que son iguales. Como la función natural $\psi$ no es inyectiva, existen $U$ y $L$ distintos, que pertencen a $SpecK[\mathbf{X}]^s$ tales que $\psi(U) = \psi(L)$ esto es $(U : SpecK[\mathbf{X}]^s) = (L : SpecK[\mathbf{X}]^s)$. Por otra parte, $U \cap L$ es primo, ya que si $r \in K[\mathbf{X}]$ y $m \in K[\mathbf{X}]^s$ tales que $r\mathbf{m} \in U \cap L$ y $r \notin (U \cap L : K[\mathbf{X}]^s)$ entonces $r\mathbf{m} \in U$ y $r\mathbf{m} \in L$, esto es,

$$[r \in (U : K[\mathbf{X}]^s) \text{ ó } \mathbf{m} \in U] \text{ y } [r \in (L : K[\mathbf{X}]^s) \text{ ó } \mathbf{m} \in L]$$

de manera que se tienen las siguientes posibilidades:

(i) Si $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$ y $r \in (L : K[\mathbf{X}]^s)$, $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq U$ y $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq L$ entonces $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq U \cap L$ por tanto $r \in (U \cap L : K[\mathbf{X}]^s)$, que contradice una de las hipótesis.

(ii) Si $r \in (L : K[\mathbf{X}]^s)$ y $\mathbf{m} \in U$ entonces $r \in (L : K[\mathbf{X}]^s) = (U : K[\mathbf{X}]^s) = (U \cap L : K[\mathbf{X}]^s)$, que también es una contradicción.

(iii) Si $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$ y $\mathbf{m} \in L$ se tiene que $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s) = (L : K[\mathbf{X}]^s) = (U \cap L : M)$, siendo contrario a lo supuesto.

(iv) Si $\mathbf{m} \in U$ y $\mathbf{m} \in L$, entonces $\mathbf{m} \in U \cap L$.

De modo que $U \cap L$ es un submódulo primo, además $U \cap L \subseteq U$ y $U \cap L \subseteq L$ pero como $MaxK[\mathbf{X}]^s = SpecK[\mathbf{X}]^s$, $U \cap L = U = L$ que es una contradicción. □

**Definición 3.19.** *Por conjunto degenerado se entenderá que es un conjunto vacío o unitario y por $A \vdash B$, se entenderá que existe un abierto $G$ tal que $A \subseteq G$ y $G \cap B = \phi$.*

**Definición 3.20.** *Un espacio topológico $(X, \tau)$ es:*

*(i)* $T_{UD}$*-espacio si y sólo si* $\forall x \in X$, $\{x\}'$ *es unión de cerrados disyuntos.*

*(ii)* $T_D$*-espacio si y sólo si* $\forall x \in X$, $\{x\}'$ *es cerrado.*

*(iii)* $T_{DD}$*-espacio si y sólo si es* $T_D$*- espacio y* $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\{x\}' \cap \{y\}' = \phi$.

*(iv)* $T_F$*-espacio si y sólo si* $\forall x \in X$, *y cualquier subconjunto finito* $F$ *de* $X$, *tal que,* $x \notin F$, *se tiene que* $x \vdash F$ *ó* $F \vdash x$.

*(v)* $T_{FF}$*-espacio si y sólo si* $\forall F_1, F_2 \subseteq X$, *finitos y* $F_1 \cap F_2 = \phi$, *se tiene que,* $F_1 \vdash F_2$ *ó* $F_2 \vdash F_1$.

*(vi)* $T_Y$*-espacio si y sólo si* $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, *se tiene que* $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ *es degenerado.*

*(vii)* $T_{YS}$*-espacio si y sólo si* $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, *se tiene que* $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ *es* $\phi$ *ó* $\{x\}$ *ó* $\{y\}$.

En [2] se puede consultar el siguiente diagrama de implicaciones:

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r] \arrow[dd] & T_{DD} \arrow[rr] \arrow[d] & & T_D \arrow[dd] & \\
& T_{YS} \arrow[d] & & & \\
T_{FF} \arrow[r] & T_Y \arrow[r] & T_F \arrow[r] & T_{UD} \arrow[r] & T_0
\end{tikzcd}$$

**Proposición 3.21.** *SpecK* $[\mathbf{X}]^s$ *no satisface ninguno de los axiomas de separación entre* $T_0$ *y* $T_1$.

*Demostración.* Si *SpecK* $[\mathbf{X}]^s$ llegara a satisfacer alguno los axiomas de separación entre $T_0$ y $T_1$, según el diagrama de implicaciones que se exhibió anteriormente, también sería un espacio $T_0$, sin embargo, como se probó en la Proposición 3.16, esto no es cierto. □

## 4 Ejemplos

Se presentan a continuación algunos ejemplos considerando $(\mathbb{Q}[x,y])^2$ como $\mathbb{Q}[x,y]$-módulo. Para hacer algunos de los cálculos correspondientes se ha empleado CoCoA.

**Ejemplo 4.1.** *Considere los vectores* $\mathbf{f}_1 = \left(0, x^3\right), \mathbf{f}_2 = \left(y - x^2, 0\right)$, $\mathbf{f}_3 = \left(x^3 + 1, x\right)$,
$\mathbf{f}_4 = \left(0, y - x^2\right) \in (\mathbb{Q}[x,y])^2$. *Se usará el orden TOP sobre* $(\mathbb{Q}[x,y])^2$ *con* $\mathbf{e}_1 > \mathbf{e}_2$ *y lex sobre* $\mathbb{Q}[x,y]$ *con* $x > y$. *Siendo* $N = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$, $N$ *no resulta un submódulo primo.*

**Ejemplo 4.2.** *Considere los vectores* $\mathbf{f}_1 = \left(0, x^3\right), \mathbf{f}_2 = \left(y - x^2, 0\right), \mathbf{f}_3 = \left(x^3 + 1, x\right),$
$\mathbf{f}_4 = \left(0, y - x^2\right), \mathbf{f}_5 = \left(x^2 - x + 1, 0\right), \mathbf{f}_6 = \left(0, x^2 - x + 1\right)$ *que pertenecen al módulo libre* $(\mathbb{Q}[x,y])^2$. *Se usará el orden POT sobre* $(\mathbb{Q}[x,y])^2$ *con* $\mathbf{e}_1 > \mathbf{e}_2$ *y lex sobre* $\mathbb{Q}[x,y]$ *con* $y > x$. *Siendo* $N = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5, \mathbf{f}_6 \rangle$, $N$ *es un submódulo primo.*

**Ejemplo 4.3.** $\left\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \right\rangle (\mathbb{Q}[x,y])^2$ *es un submódulo primo de* $(\mathbb{Q}[x,y])^2$.

Teniendo en cuenta que $\left\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \right\rangle$ es un ideal primo según se mostró en el Ejemplo 4.2 y además por la Proposición 2.15,

$$\left(\left\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \right\rangle (\mathbb{Q}[x,y])^2 : (\mathbb{Q}[x,y])^2\right) = \left\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \right\rangle$$

Nótese que, $\left\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \right\rangle (\mathbb{Q}[x,y])^2$ es igual al submódulo

$$\left\langle (y - x + 1, 0), (0, y - x + 1), \left(x^2 - x + 1, 0\right), \left(0, x^2 - x + 1\right) \right\rangle$$

($\supseteq$) Un elemento $\mathbf{m} \in \left\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \right\rangle (\mathbb{Q}[x,y])^2$ es de la forma,

$$u_1(f_1(y-x+1) + f_2(x^2-x+1))(1,0) + u_2(f_1(y-x+1) + f_2(x^2-x+1))(0,1)$$

donde $u_1,\ u_2,\ f_1,\ f_2 \in \mathbb{Q}[x,y]$.

De manera que, $(y - x + 1, 0)$ se obtiene con $u_1 = f_1 = 1,\ u_2 = f_2 = 0$, $(0, y - x + 1)$ se obtiene con $u_2 = f_1 = 1,\ u_1 = f_2 = 0$, $\left(x^2 - x + 1, 0\right)$ se obtiene con $u_1 = f_2 = 1,\ u_2 = f_1 = 0$, $\left(0, x^2 - x + 1\right)$ se obtiene con $u_2 = f_2 = 1,\ u_1 = f_1 = 0$.

$$(\subseteq) u_1(f_1(y-x+1)+f_2(x^2-x+1))(1,0)+u_2(f_1(y-x+1)+f_2(x^2-x+1))(0,1) =$$

$$(u_1 f_1(y-x+1), 0)+(u_1 f_2(x^2-x+1), 0)+(0, u_2 f_1(y-x+1))+(0, u_2 f_2(x^2-x+1))$$

pero el término de la derecha pertenece a

$$\left\langle (y - x + 1, 0), (0, y - x + 1), \left(x^2 - x + 1, 0\right), \left(0, x^2 - x + 1\right) \right\rangle$$

**Ejemplo 4.4.** *Los submódulos primos de los Ejemplos 4.2 y 4.3 tienen el mismo cociente sin embargo son submódulos diferentes.*

Con ayuda de CoCoA se calcularon las Bases de Gröbner Reducidas para los submódulos primos de los Ejemplos 4.2 y 4.3, como aparece a continuación:

considerando como antes, el orden POT sobre $(\mathbb{Q}[x,y])^2$ con $e_1 > e_2$ y lex sobre $\mathbb{Q}[x,y]$ con $y > x$. Para N definido por

$$\left\langle \left(0, x^3\right), \left(y - x^2, 0\right), \left(x^3 + 1, x\right), \left(0, y - x^2\right), \left(x^2 - x + 1, 0\right), \left(0, x^2 - x + 1\right) \right\rangle$$

la base reducida es

$$G_1 = \left\{ \left(x^2 - x + 1, 0\right), (0, 1), (y - x + 1, 0) \right\}.$$

Ahora, para $\left\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \right\rangle (\mathbb{Q}[x,y])^2$ la base reducida es

$$G_2 = \left\{ (0, y - x + 1), (y - x + 1, 0), \left(0, x^2 - x + 1\right), \left(x^2 - x + 1, 0\right) \right\}.$$

De nuevo con ayuda de CoCoA, se estudió si el vector $(0,1)$ pertenece o no a $G_2$, concluyendo que esto no ocurre. De tal forma que los dos submódulos son diferentes porque tienen sus bases reducidas diferentes.

## Bibliografía


[1] Adams, W., & Loustaunau, P.(1994). An Introduction to Gröbner Bases. Providence, Rhode Island, USA: American Mathematical Society.

[2] Avila, J. (2005). *Spec* $(R)$ y Axiomas de separación entre $T_0$ y $T_1$. Divulgaciones Matemáticas.

[3] Barragán, S. (2001). La Condición de Noether para el espectro primo de un módulo sobre un anillo conmutativo. Universidad Nacional de Colombia. Tesis de Maestría.

[4] Gianni, P., Trager, B., & Zacharias, G. (1988). Gröbner Bases and Primary Decomposition of Polinomial Ideals. Journal of Symbolic Computation, 149-167.

[5] Lu, C. P. (1984). Prime Submodules of Modules. Commentarii Mathematici Universitastis Sancti Pauli, 61-69.

[6] McCasland, R., Moore, M., & Smith, P. (1997). On the spectrum of a module over commutative ring. Communications in Algebra, 79-103.

[7] Muñoz, J. (2008). Introducción a la Topología. Bogotá, Colombia. Universidad Nacional de Colombia.

[8] Rutman, E. (1992). Gröbner Bases and Primary Decomposition of Modules. Journal of Symbolic Computation, 483-503.

Sandra Patricia Barragán Moreno.
Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.

e-mail: sandra.barragan@utadeo.edu.co
cardinal181@gmail.com