Analyse p-adique et nombres de Bell à deux variables

MAZOUZ Abdelhak

1 Introduction

Le n-ième nombre de Bell, B_n, est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On définit le n -ième nombre de Bell à deux variables λ et ω en posant :

$$B(n,\lambda,\omega) = \sum_{k=0}^{n} R(n,k,\lambda)\,\omega^k$$

où

[C] $$R(n,k,\lambda) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\lambda+j)^n$$

La série génératrice exponentielle de ces nombres est :

$$\sum_{n\geq 0} B(n,\lambda,\omega)\frac{x^n}{n!} = e^{\lambda x+\omega(e^x-1)}$$

Remarquons que :

• Si $\omega = 1$, $B(n,\lambda,1)$ est le n-ième nombre de Bell généralisé défini par Carlitz [C].

• Si $\lambda = 0$, $B(n,0,\omega)$ est le n-ième nombre de Bell généralisé défini par Chinthayama et Gandhi [C,G].

Received by the editors May 1995.
Communicated by A. Warrinier.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 11B73, 11S80, 05A18, 30G06.
Key words and phrases : Bell numbers, p-adic Analysis, Congruences.

On montre que la fonction génératrice des nombres de Bell à deux variables est un élément analytique p-adique sur un quasi-connexe de $\mathbb{C}_p$. Ce résultat est équivalent, d'après les théorèmes généraux d'analyse p-adique (théorème de Mittag Leffler p-adique, inégalités de Cauchy) à des congruences entre nombres de Bell à deux variables. Ainsi nous généralisons les résultats de Radoux [R],Carlitz [C],Layman [L], Layman et Prather [L,P]

2 Notations

Soit p un nombre premier, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_p$ ont leur signification habituelle [A]. La valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_p$ est normalisée par $|p| = p^{-1}$. On désigne par r un nombre réel strictement positif. Soit $a \in \mathbb{C}_p$, on note $B(a, r^+) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x-a| \leq r\}$ et $B(a, r^-) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a| < r\}$. On pose : $\binom{x}{n} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.
Soit $(\lambda, \omega) \in \mathbb{C}_p^2$ tel que $(\lambda, \omega) \in B(0, 1^+)^2$ et $[\mathbb{Q}_p(\lambda, \omega) : \mathbb{Q}_p] < +\infty$
On note :
R : l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p(\lambda, \omega)$,
e : l'indice de ramification de l'extension $\mathbb{Q}_p(\lambda, \omega)$ sur $\mathbb{Q}_p$,
f_λ : le degré résiduel de l'extension $\mathbb{Q}_p(\lambda)$ sur $\mathbb{Q}_p$,
f_ω : le degré résiduel de l'extension $\mathbb{Q}_p(\lambda)(\omega)$ sur $\mathbb{Q}_p(\lambda)$,
$\mathfrak{P}$: l'idéal maximal de R,
$\mathbb{F}_q$: le corps à q éléments, $q = p^{f_\lambda f_\omega}$, corps résiduel de l'extension $\mathbb{Q}_p(\lambda, \omega)$ sur $\mathbb{Q}_p$,
$\overline{\mathbb{F}_q}$: la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}_p$. On désigne par $H_0(\mathcal{A})$ l'espace des éléments analytiques sur $\mathcal{A}$, qui tendent vers zéro à l'infini si $\mathcal{A}$ est non borné, muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{A}$, $||F||_\mathcal{A} = \sup_{x \in \mathcal{A}} |F(x)|$. Soit $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$ et soit $a \in \mathcal{O}_p$, on note $\bar{a}$ l'image de a dans le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$.

3 Résultats

Soit $b_{\lambda,\omega} = \lambda^p - \lambda + \omega^p$ et $k_p = \frac{p^p - 1}{p-1}$. Les résultats obtenus sont les suivants :

(1) Si $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $|b_{\lambda,\omega} - 1| < 1$ et si $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p} \overline{\omega} \neq 0$, alors :
– pour p premier impair et $h \geq 1$

$$B(n + p^{h-1} \cdot k_p, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

– pour $p = 2$ et $h \geq 2$

$$B(n + 3.2^h, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h \quad \text{où} \quad (2)_R = \mathfrak{P}^e$$

– pour $p = 2$ et $h = 1$

$$B(n + 3, \lambda, \omega) = B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P} \quad \text{où} \quad (2)_R = \mathfrak{P}^e$$

(2) Si $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $|b_{\lambda,\omega} - 1| = 1$ et si $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p} \overline{\omega} = 0$, alors :
– pour p premier impair et $h \geq 1$

$$B(n + [p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1] \cdot k_p \cdot p^{h-1}, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

– $p = 2$ et $h \geq 2$

$$B(n + 3(2^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1)\, 2^h, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h \quad \text{où} \quad (2)_R = \mathfrak{P}^e$$

– pour $p = 2$ et $h = 1$

$$B(n + 3(2^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1), \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P} \quad \text{où} \quad (2)_R = \mathfrak{P}^e$$

(3) Si $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et si $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} \neq 0$, alors :
– pour p premier et $h = 1$

$$B(n + (p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1), \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}$$

– pour p premier et $h \geq 2$

$$B(n + (p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1) \cdot p^h, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

(4) Si $|b_{\lambda,\omega}| < 1$, alors :
– pour p premier et $h = 1$

$$B(n + (p - 1), \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}$$

– pour p premier impair, $h \geq 2$ et $n \geq p^h(1 + p^{-1} + h)$

$$B(n + (p - 1)\, p^{2h}, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

– pour $p = 2$; $h \geq 2$ et $n \geq 2^h(h + 2^{-1})$

$$B(n + 2^{2h+1}, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h \quad \text{où} \quad \mathfrak{P}^e = (2)_R.$$

4 Transformation de Laplace formelle

Définition 4.1 *Soit* $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{x^n}{n!} \in K[[x]]$ *où* K *est un corps de caractéristique zéro. On pose :* $\mathcal{L}(F(x)) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$*. L'application linéaire* $\mathcal{L}$ *sur K[[x]] ainsi définie est appelée la transformation de Laplace formelle, cf. [B].*

Lemme 4.2 *Si* $\mathcal{L}(\overline{F}(x)) = F(x)$*, alors :*

$$\mathcal{L}(e^{\lambda x} \cdot \overline{F}(x)) = \frac{1}{1 - \lambda x} \cdot F\left(\frac{x}{1 - \lambda x}\right) \qquad \text{[B]}$$

Lemme 4.3 *Soit* $G(x) = \sum_{n\geq 0} B(n, \lambda, \omega) x^n$*, alors par la transformation de Laplace formelle, on a :*

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} B(n, \lambda, \omega) x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{\omega^n \cdot x^n}{(1 - \lambda x) \ldots (1 - (\lambda + n)x)}$$

Preuve : Par définition : $\sum_{n\geq 0} B(n, \lambda, \omega) \frac{x^n}{n!} = e^{\lambda x + \omega(e^x - 1)}$. D'après le lemme précédent, on a l'égalité énoncée dans le lemme ∎

5 Etude de la fonction génératrice

Lemme 5.1 *La série génératrice* $G(x) = \sum_{n \geq 0} B(n, \lambda, \omega) x^n$ *est congrue modulo* $p^h \mathcal{O}_p[[x]]$ *à la fraction rationnelle* $G_{h,p}(x)$ *où :*

$$G_{h,p}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{p^h-1} \omega^j x^j (1-(\lambda+j)x)\dots(1-(\lambda+p^h-1)x)}{(1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+p^h-1)x)-(\omega x)^{p^h}}$$

Preuve : Posons $n = k\,p^h + j \quad$ où $\quad 0 \leq j \leq p^h - 1$,

On a donc la congruence suivante $\bmod p^h \mathcal{O}_p[[x]]$:

$$\begin{aligned}
G(x) &\equiv \sum_{j=0}^{p^h-1} \frac{(\omega x)^j}{(1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+j)x)} \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{(\omega x)^{kp^h}}{[(1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+p^h-1)x]^k} \\
G(x) &\equiv \sum_{j=0}^{p^h-1} \frac{(\omega x)^j}{(1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+j)x)} \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{(\omega x)^{kp^h}}{[(1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+p^h-1)x]^k} \\
G(x) &\equiv \frac{\sum_{j=0}^{p^h-1} \omega^j x^j (1-(\lambda+j)x)\dots(1-(\lambda+p^h-1)x)}{(1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+p^h-1)x)-(\omega x)^{p^h}} \quad \bmod p^h \mathcal{O}_p[[x]]
\end{aligned}$$

Si on note $G_{h,p}(x)$ le second membre de la congruence précédente. D'où la congruence énoncée dans le lemme ∎

Lemme 5.2 *Soit* $D_{h,p} = (1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+p^h-1)x)-(\omega x)^{p^h}$*, alors :*

$$D_{h,p} \equiv [1 - x^{p-1} - b_{\lambda,\omega} x^p]^{p^{h-1}} \bmod pR[x].$$

où $b_{\lambda,\omega} = \lambda^p - \lambda + \omega^p$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
D_{h,p}(x) &= (1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+p^h-1)x)-(\omega x)^{p^h} \\
D_{h,p}(x) &\equiv [(1-\lambda x)\dots(1-(\lambda+p-1)x]^{p^{h-1}} - (\omega x)^{p^h} \bmod pR[x] \\
&\equiv [1 - x^{p-1} - (\lambda^p - \lambda)\, x^p]^{p^{h-1}} - (\omega^p x^p)^{p^{h-1}} \bmod pR[x] \\
&\equiv [1 - x^{p-1} - (\lambda^p - \lambda + \omega^p)\, x^p]^{p^{h-1}} \quad \bmod p^h R[x]
\end{aligned}$$

Posons $b_{\lambda,\omega} = \lambda^p - \lambda + \omega^p$. D'où

$$D_{h,p}(x) \equiv [1 - x^{p-1} - b_{\lambda,\omega} x^p]^{p^{h-1}} \bmod pR[x].$$

Ce qui achève la démonstration. ∎

6 Congruence fondamentale $\bmod \mathfrak{P}$ sur les nombres $B(n, \lambda, \omega)$

Théorème 6.1 *Soit $\overline{E}_p(x) = x^p - x - (\overline{\lambda}^p - \overline{\lambda} + \overline{\omega}^p) \in \mathbb{F}_q[x]$. Posons $k_p = \dfrac{p^p - 1}{p - 1}$ et $b_{\lambda,\omega} = \lambda^p - \lambda + \omega^p$.*

1. Soit $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $|b_{\lambda,\omega} - 1| < 1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} \neq 0$, alors :

$$B(n + k_p, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}$$

2. Soit $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $|b_{\lambda,\omega} - 1| = 1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} \neq 0$, alors :

$$B(n + (p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1) \cdot k_p, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}$$

3. Soit $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} = 0$, alors :

$$B(n + (p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1), \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}$$

4. Si $|b_{\lambda,\omega}| < 1$, alors :

$$B(n + (p - 1), \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}$$

Preuve :

1. Si $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $|b_{\lambda,\omega} - 1| < 1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} \neq 0$.

Montrons d'abord que le polynôme $\overline{E}_p(x) = x^p - x - b_{\lambda,\omega}$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ ne possède aucune racine dans $\mathbb{F}_q$. Supposons que $x \in \mathbb{F}_q$ soit racine de $\overline{E}_p(x)$; donc $x^p - x - \overline{\lambda}^p + \overline{\lambda} - \overline{\omega}^p = 0$ ce qui équivaut à $(x - \overline{\lambda})^p - (x - \overline{\lambda}) - \overline{\omega}^p = 0$. On en déduit que $x - \overline{\lambda}$ est racine du polynôme $x^p - x - \overline{\omega}^p$. Posons $t = x - \overline{\lambda}$ donc $t \in \mathbb{F}_q$, d'où $t^{p^{f_\omega \cdot f_\lambda}} = t$. Or $t^p = t + \overline{\omega}^p$ donc $t^{p^{f_\lambda \cdot f_\omega}} = t + tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega}$. Par conséquent $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} = 0 \bmod p$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\overline{E}_p(x)$ ne possède aucune racine dans $\mathbb{F}_q$.

Si x est racine de $\overline{E}_p(x)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ alors $x + 1$, $x + 2, \ldots, x + p - 1$ sont racines de $\overline{E}_p(x)$, donc $\mathbb{F}_q(x)$ est une extension galoisienne de $\mathbb{F}_q$.

Le groupe de Galois $\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_q$ est engendré par le Frobenius :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{F}_q(x) &\to \mathbb{F}_q(x) \\ t &\to t^{p^{f_\lambda \cdot f_\omega}} \\ \sigma^i : t &\to t^{(p^{f_\lambda \cdot f_\omega})^i}, \quad 1 \leq i \leq p - 1 \end{aligned}$$

Notons $\bar{x}_j$, $0 \leq j \leq p - 1$, les racines de $\overline{E}_p(x)$.

Posons $\overline{F_n(\lambda, \omega)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \bar{x}_j^n$ où les α_j sont choisis dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ de telle sorte que $\overline{F_n(\lambda, \omega)} = \overline{B(n, \lambda, \omega)}$. Il vient : $B(n + k_p, \lambda, \omega) \equiv \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j x_j^{n+k_p}$

Puisque $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} \neq 0$, on a

$$\bar{x}_j^{k_p} = \bar{x}_j^{\frac{(p^{f_\lambda \cdot f_\omega})^p - 1}{p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1}} = \prod_{0 \leq i \leq p-1} \sigma^i(\bar{x}_j) = \overline{b}_{\lambda,\omega}$$

Par conséquent :

$$B(n+k_p,\lambda,\omega)\equiv b_{\lambda,\omega}B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}$$

Comme $b_{\lambda,\omega}\equiv 1 \bmod \mathfrak{P}$, on a :

$$B(n+k_p,\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}$$

2. Si $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}|=1$ et $|b_{\lambda,\omega}-1|=1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\bar{\omega}\neq 0$.

D'après 1, on a $B(n+k_p,\lambda,\omega)\equiv b_{\lambda,\omega}B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}$. Puisque $b_{\lambda,\omega}^{p^{f_\lambda\cdot f_\omega}}\equiv 1 \bmod \mathfrak{P}$,on obtient la congruence suivante :

$$B(n+(p^{f_\lambda\cdot f_\omega}-1)\cdot k_p,\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}$$

3. Si $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}|=1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega}=0$.

Notons $\bar{x}_j$ $0\leq j\leq p-1$ les racines de $\overline{E}_p(x)$ on a $\bar{x}_j^{p^{f_\lambda\cdot f_\omega}}=\bar{x}_j+tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega}$, comme $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\bar{\omega}=0$ donc $\bar{x}_j^{f_\lambda\cdot f_\omega}=\bar{x}_j$. A l'aide de cette égalité, en appliquant un argument analogue à celui exposé dans 1, on déduit que :

$$B(n+(p^{f_\lambda\cdot f_\omega}-1),\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}.$$

4. Si $|b_{\lambda,\omega}|<1$.

Soit x racine de $\overline{E}_p(x)$ donc $x^{p-1}=1$. De la même manière que dans (1) et (2) on montre que

$$B(n+(p-1),\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}.$$

■

7 Préliminaire aux congruences entre les nombres $B(n,\lambda,\omega)$

Nous allons étudier maintenant un peu plus finement $G_{h,p}(x)$ et sa convergence p-adique vers $G(x)$. Pour cela on localisera les pôles de $G_{h,p}$. Quatre cas sont à envisager :

1er cas : Si $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}|=1$ et $|b_{\lambda,\omega}-1|<1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega}\neq 0$.

Soit $\alpha_{i,1}$ $(1\leq i\leq p)$ les racines de $D_{1,p}(x)$. D'après le Théorème 5.1 on a $\overline{\alpha_{i,1}^{-1}}^{k_p}=\bar{b}_{\lambda,\omega}$ d'où $|b_{\lambda,\omega}\,\alpha_{i,1}^{k_p}-1|\leq p^{-1/e}$. Comme $|b_{\lambda,\omega}-1|<1$ on aura $|\alpha_{i,1}^{k_p}-1|\leq p^{-1/e}$.

Soit θ_i le représentant de Teichmüller de $\alpha_{i,1}$ (c'est-à-dire que θ_i est une racine primitive de l'unité d'ordre premier à p contenue dans $\mathbb{C}_p$ telle que $|\theta_i-\alpha_{i,1}|\leq p^{-\frac{1}{e}}$, car l'extension $\mathbb{Q}_p(\lambda,\omega)\,(\alpha_{i,1})$ est non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p(\lambda,\omega)$).

Notons $\alpha_{i,j}$ $(1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p^{h-1})$ les racines de $D_{h,p}(x)$ dans $\mathbb{C}_p$. Le lemme de Hensel montre que ces racines se groupent en p classes contenant chacune p^{h-1} racines. A chaque classe correspond une racine $\alpha_{i,1}$ $(1\leq i\leq p)$ de $D_{1,p}(x)$. Deux racines de la même classe vérifient $|\alpha_{i,j}-\alpha_{i,j'}|<1$. En utilisant le lemme de Hensel [A] et le lien qui existe entre le degré résiduel, l'indice de ramification et le degré de l'extension finie de $\mathbb{Q}_p(\lambda,\omega)$ il vient :

$$|\theta_i-\alpha_{i,j}|\leq\left(p^{-1/p^{h-1}}\right)^{1/e}.$$

On déduit immédiatement de cette étude que $G_{h,p}(x)$ est une fraction rationnelle nulle à l'infini sans pôle sur le quasi-connexe $W_{h,p} = \mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} B\Big(\theta_i, (V_{h-1}^{1/e})^+\Big)$ où $V_h = p^{-m(h)}$ avec $m(h) = p^{-h}$.

Proposition 7.1 *Soit $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $|b_{\lambda,\omega} - 1| < 1$. Soit ω tel que $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} \neq 0$. Alors $G(x)$ est la restriction à $B(0,1^-) \subset \mathbb{C}_p$ d'un élément analytique nul à l'infini sur le quasi-connexe $\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} B(\theta_i, 1^-)$.*

Preuve : D'après le lemme 5.1

$$G(x) \equiv G_{h,p}(x) \bmod p^h\, \emptyset_p[[x]].$$

D'où

$$||G_{h,p} - G_{h-1,p}||_{B(0,1^-)} \leq p^{-h}.$$

D'après [A,F] on a :

$$||G_{h,p} - G_{h-1,p}||_{\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} B(\theta_i,1^-)} \leq p^{-h}.$$

Il est immédiat que la suite $h \to G_{h,p}(x)$ est une suite de Cauchy, pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} B(\theta_i, 1^-)$.

Donc $G(x)$ peut être prolongé de manière unique [Ro] en un élément analytique nul à l'infini, sur le quasi-connexe $\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} B(\theta_i, 1^-)$. ∎

D'après [A,F] la proposition entraîne les corollaires suivants.

Corollaire 7.2 *Soit $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $|b_{\lambda,\omega} - 1| < 1$. La suite $B(n,\lambda,\omega)_{n\geq 0}$ est purement périodique. C'est-à-dire $\forall\, h \geq 0$, $\exists\, q(h) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$*

$$B(n + p^{q(h)} \cdot k_p, \lambda, \omega) \equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

Corollaire 7.3 *Soit $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $|b_{\lambda,\omega} - 1| = 1$ et soit ω tel que $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} \neq 0$ alors $G_{h,p}(x)$est une fraction rationnelle nulle à l'infini sans pôle sur le quasi-connexe*

$$W_{h,p} = \mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} B\Big(\theta_i, (V_{h-1}^{1/e})^+\Big) \quad \text{où} \quad \theta_i^{[p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1]\cdot k_p} = 1.$$

La suite $B(n,\lambda,\omega)$ est purement périodique, c'est à dire : $\forall\, h \geq 0$ $\exists\, q(h) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$B(n + [p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1] \cdot k_p \cdot p^{q(h)}, \lambda, \omega) \equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}^h.$$

Corollaire 7.4 *Soit $b_{\lambda,\omega}$ tel que $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et soit ω tel que $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\bar{\omega} = 0$, alors $G_{h,p}(x)$ est une fraction rationnelle nulle à l'infini sans pôle sur le quasi-connexe*

$$W_{h,p} = \mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} B\Big(\theta_i, (V_h^{\frac{1}{e}})^+\Big) \quad \text{où} \quad \theta_i^{p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1}$$

On a de plus la propriété suivante : la suite $B(n,\lambda,\omega)$ est purement périodique :
$\forall h \geq 0\ \exists q(h) \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$B(n+(p^{f_\lambda \cdot f_\omega}-1)p^{q(h)},\lambda,\omega) \equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

Corollaire 7.5 *Si $|b_{\lambda,\omega}| < 1$, alors $G_{h,p}(x)$ est une fraction rationnelle nulle à l'infini sans pôle sur le quasi-connexe*

$$W_{h,p} = \mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p} B\Big(\theta_i,(V_h^{\frac{1}{e}})^+\Big) \cap B\left(0,\left((\frac{1}{V_h})^{\frac{1}{e}}\right)^-\right)$$

où $\theta_i^{p-1}=1$ et $\theta_i \neq 1$. La suite $B(n,\lambda,\omega)$ est presque périodique, c'est à dire :
$\forall h \geq 0\ \exists q(h)$ *et* $\alpha(h)$ *tels que pour* $n \geq \alpha(h)$ *on a*

$$B(n+(p-1)\,p^{q(h)},\lambda,\omega) \equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

8 Congruences sur les $B(n,\lambda,\omega)$, pour $|b_{\lambda,\omega}|=1$, $|b_{\lambda,\omega}-1|<1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\bar{\omega} \neq 0$

Lemme 8.1 *Soit $(\lambda,\omega) \in [B(0,1^+)]^2$. Si $G_{h,p}(x) = \sum_{n\geq 0} B(n,\lambda,\omega,h)\,x^n$, on a, pour $j \geq 1$ et $h \geq 1$:*
- $B(n,\lambda,\omega,h) \equiv B(n+p^{j-1}\cdot k_p,\lambda,\omega,h) \bmod \mathfrak{P}^j$ *si* $p>2$
- $B(n,\lambda,\omega,h) \equiv B(n+3\cdot 2^j,\lambda,\omega,h) \bmod \mathfrak{P}^j$ *si* $p=2$ *où* $(2)_R = \mathfrak{P}^e$.

Preuve : On va procéder par récurrence sur h pour j fixé.

Le lemme est vrai pour $h=1$ (il suffit d'appliquer le théorème de Mittag-Leffler p-adique [A] ou [RO]).

Supposons le lemme vrai pour $2,3,\ldots,h-1$. On a

$$G_{h,p}(x) = G_{h,p}(x) - G_{h-1,p}(x) + G_{h-1,p}(x)$$

avec $\|G_{h,p}-G_{h-1,p}\|_{W_{h,p}} \leq p^{-\frac{h+2+p^{-1}}{e}}$, car $\|D_{h,p}\cdot D_{h-1,p}\|_{B(\theta_i,1^-)-B(\theta_i,(V_{h-1}^{\frac{1}{e}})^+)} > p^{-\frac{1-p^{-1}}{e}}$ et $\|G_{h,p}-G_{h-1,p}\|_{\mathbb{C}_p-\bigcup_{i=1}^p B(\theta_i,1^-)} \leq p^{\frac{1-h}{e}}$.

Posons $F_{h,p} = G_{h,p}-G_{h-1,p}$, $\quad F_{h,p} \in H_0(W_{h,p})$. D'après le Théorème de Mittag-Leffler p-adique : $F_{h,p} = \sum_{i=1}^p F_{i,h}$ où $F_{i,h} \in H_0\Big(\mathbb{C}_p - B\Big(\theta_i,(V_{h-1}^{\frac{1}{e}})^+\Big)$ et $\|F_{h,p}\|_{W_{h,p}} = sup_{1\leq i\leq p}\|F_{i,h}\|_{\mathbb{C}_p-B\left(\theta_i(V_{h-1}^{\frac{1}{e}})^+\right)}$. Posons $F_{i,h}(x) = \sum_{k\geq 1} a_{i,h,k}(1-x\,\theta_i^{-1})^{-k}$.

Pour $|x|<1$ on a : $(1-x\,\theta_i^{-1})^{-k} = \sum_{h\geq 0}\binom{n+k-1}{k-1}\theta_i^{-n}x^n$. Donc $F_{i,h}(x) = \sum_{n\geq 0} f_{i,h,n}x^n$ avec $f_{i,h,n} = \sum_{k\geq 1} a_{i,h,k}\theta_i^{-n}\binom{n+k-1}{k-1}$.

D'autre part on a :

$$\left|\binom{n+p^{j-1}\cdot k_p+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1}\right| \leq \inf(1,p^{-j+1+\ell(k-1)})$$

où $\ell(k) \in \mathbb{N}$ et $p^{\ell(k)} \leq k < p^{\ell(k)+1}$.

Deux cas sont à envisager : $k-1 < p^j$ et $k-1 \geq p^j$

Si $k-1 < p^j$, alors :

$$|a_{i,h,k}| \left| \binom{n+p^{j-1}\cdot k_p+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1} \right| \leq p^{\frac{-S(k)}{e}}$$

où $S(k) = h-3-p^{-1}+k\,m(h-1)+j-\ell(k-1)$

$$S(k) \geq h-3-p^{-1}+k\,m(h-1)+j-\frac{\log(k-1)}{\log p}\cdot$$

Le minimum du dernier membre est atteint pour $x-1 = \dfrac{p^{h-1}}{\log p}\cdot$

Comme $\ell(k-1)$ garde la même valeur pour $p^m \leq k-1 < p^{m+1}$, on en déduit que le minimum de $S(k)$ est atteint pour $k-1 = p^{h-2}$ si $p>2$ et $h \geq 2$ (resp. pour $k-1 = 2^{h-1}$ si $p=2$).

– Si $p>2$ et $h \geq 2$ alors, $S(k) \geq S(1+p^{h-2}) > j-1$

– Si $p=2$ et $h \geq 2$ alors, $S(k) \geq S(1+2^{h-1}) > j-2$.

Si $k-1 \geq p^j$, on tire facilement des inégalités de Cauchy

$$|a_{i,h,k}| \left| \binom{n+p^{j-1}\cdot k_p+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1} \right| \leq p^{\frac{-j+1}{e}}$$

On a donc montré que :

$$|f_{i,h,n+p^{j-1}\cdot k_p} - f_{i,h,n}| < p^{\frac{-j+1}{e}} \quad \text{si} \quad p>2 \quad \text{et} \quad h \geq 2$$

respectivement

$$|f_{i,h,n+3.2^{j-1}\cdot k_p} - f_{i,h,n}| < 2^{\frac{-j+2}{e}} \quad \text{si} \quad p=2 \quad \text{et} \quad h \geq 2.$$

Or $B(n,\lambda,\omega,h) \in R$, les inégalités précédentes entraînent alors :

$$|f_{i,h,n+p^{j-1}\cdot k_p} - f_{i,h,n}| \leq p^{\frac{-j}{e}} \quad \text{si} \quad p>2$$

respectivement :

$$|f_{i,h,n+3.2^j} - f_{i,h,n}| \leq 2^{\frac{-j}{e}} \quad \text{si} \quad p=2 \quad \text{et} \quad h \geq 2$$

Comme $B(n,\lambda,\omega,h) = \sum_{i=1}^{p} f_{i,h,n} + B(n,\lambda,\omega,h-1)$, il vient en appliquant l'hypothèse de récurrence à $B(n,\lambda,\omega,h-1)$ et les inégalités précédentes :

$$|B(n+k_p\cdot p^{j-1},\lambda,\omega,h) - B(n,\lambda,\omega,h)| \leq p^{\frac{-j}{e}} \quad \text{si} \quad p>2$$

respectivement

$$|B(n+3.2^j,\lambda,\omega,h) - B(n,\lambda,\omega,h)| \leq 2^{\frac{-j}{e}} \quad \text{si} \quad p=2.$$

Le Lemme 8.1 est démontré. ∎

Théorème 8.2 *Soit* $(\lambda,\omega)\in B[(0,1^+)]^2$. *Soit* $b_{\lambda,\omega}$ *tel que* $|b_{\lambda,\omega}|=1$ *et* $|b_{\lambda,\omega}-1|<1$. *Soit* ω *tel que* $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega}\neq 0$ *où* $b_{\lambda,\omega}=\lambda^p-\lambda+\omega^p$. *On pose*

$$k_p=\frac{p^p-1}{p-1}\cdot$$

Les nombres $B(n,\lambda,\omega)$ *vérifient les congruences suivantes :*

- *Si* p *premier impair et* $h\geq 1$

$$B(n+p^{h-1}\cdot k_p,\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega)\ \mathrm{mod}\,\mathfrak{P}^h$$

- *Si* $p=2$ *et* $h\geq 2$

$$B(n+3.2^h,\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega)\ \mathrm{mod}\,\mathfrak{P}^h\quad \textit{où}\quad (2)_R=\mathfrak{P}^e$$

- *Si* $p=2$ *et* $h\geq 1$

$$B(n+3,\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega)\ \mathrm{mod}\,\mathfrak{P}\quad \textit{où}\quad (2)_R=\mathfrak{P}^e$$

Preuve : On a vu que :

$$||G-G_{h,p}||_{B(0,1^-)}\leq p^{\frac{-h}{e}}$$

D'après l'inégalité de Cauchy, on déduit que

$$B(n,\lambda,\omega,h)\equiv B(n,\lambda,\omega)\,\mathrm{mod}\,\mathfrak{P}^h$$

En appliquant le Lemme 8.1 on obtient le Théorème 8.2 ■

9 Congruences sur les nombres $B(n,\lambda,\omega)$ si $|b_{\lambda,\omega}|=1$ et $|b_{\lambda,\omega}-1|<1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega}\neq 0$

Théorème 9.1 *Soit* $(\lambda,\omega)\in B(0,1^+)^2$. *On pose* $b_{\lambda,\omega}=\lambda^p-\lambda+\omega^p$ *et* $k_p=\dfrac{p^p-1}{p-1}\cdot$
Soit $b_{\lambda,\omega}$ *tel que* $|b_{\lambda,\omega}|=1$ *et* $|b_{\lambda,\omega}-1|<1$ *et soit* ω *tel que* $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\bar{\omega}\neq 0$.
Les nombres $B(n,\lambda,\omega)$ *vérifient les congruences suivantes :*

- *Si* p *premier impair et* $h\geq 1$

$$B(n+[p^{f_\lambda\cdot f_\omega}-1]\cdot k_p\cdot p^{h-1},\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega)\ \mathrm{mod})\,\mathfrak{P}^{\mathrm{h}}$$

- *Si* $p=2$ *et* $h\geq 2$

$$B(n+3(2^{f_\lambda\cdot f_\omega}-1)\,2^h,\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega)\,\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^h\quad \textit{où}\quad \mathfrak{P}^e=(2)_R.$$

- *Si* $p=2$ *et* $h=1$

$$B(n+3(2^{f_\lambda\cdot f_\omega}-1),\lambda,\omega)\equiv B(n,\lambda,\omega)\ \mathrm{mod}\,\mathfrak{P}\quad \textit{où}\quad \mathfrak{P}^e=(2)_R.$$

Preuve : En utilisant la même démarche que dans le Lemme 8.1 et le Théorème 8.2 (en remplaçant k_p par $[p^{f_\lambda\cdot f_\omega}-1]\cdot k_p$) on en déduit les congruences énoncées dans le Théorème 9.1. ■

10 Congruences sur les nombres $B(n,\lambda,\omega)$, pour $|b_{\lambda,\omega}| = 1$ et $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} = 0$.

En appliquant un argument analogue à celui exposé dans le Lemme 8.1 et le Théorème 8.2, on déduit le théorème suivant :

Théorème 10.1 *Soit* $(\lambda,\omega) \in [B(0,1^+)]^2$. *On pose* $b_{\lambda,\omega} = \lambda^p - \lambda + \omega^p$ *et* $k_p = \dfrac{p^p-1}{p-1}\cdot$ *Soit* ω *tel que* $tr_{\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p}\overline{\omega} = 0$.

Les nombres $B(n,\lambda,\omega)$ *vérifient les congruences suivantes :*

- *Si* p *premier et* $h = 1$

$$B(n + (p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1), \lambda, \omega) \equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}$$

- *Si* p *premier et* $h \geq 2$

$$B(n + (p^{f_\lambda \cdot f_\omega} - 1)\, p^h, \lambda, \omega) \equiv B(n,\lambda,\omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

11 Congruences sur les $B(n,\lambda,\omega)$, pour $|b_{\lambda,\omega}| < 1$.

Lemme 11.1 *Soit* $G_{h,p}(x) = \sum_{n\geq 0} B(n,\lambda,\omega,h)\, x^n$. *Soit* $(\lambda,\omega) \in [B(0,1^+)]^2$ *tel que* $|b_{\lambda,\omega}| < 1$. *On a pour* $j \geq 1$ *et* $h \geq 2$ *:*

- *Si* $p > 2$ *et* $n \geq p^h(1 + j + p^{-1})$

$$B(n + (p-1)\, p^{j+h}, \lambda, \omega, h) \equiv B(n,\lambda,\omega,h) \bmod \mathfrak{P}^j$$

- *Si* $p = 2$ *et* $n \geq 2^h(j + 2^{-1})$.

$$B(n + 2^{j+h+1}, \lambda, \omega, h) \equiv B(n,\lambda,\omega,h) \bmod \mathfrak{P}^j \quad \text{où} \quad \mathfrak{P}^e = (2)_R.$$

Preuve : $G_{h,p}$ est un élément analytique sur $W_{h,p}$. D'après le théorème de Mittag-Leffler p-adique, on a :

$G_{h,p} = \sum_{i=0}^{p-1} G_{i,h}$ où $G_{i,h} \in H_0\left(\mathbb{C}_p - B\left(\theta_i, (V_h^{\frac{1}{e}})^+\right)\right)$ pour $1 \leq i \leq p-1$ et $G_{0,h} \in H_0\left(B\left(0, \left((\frac{1}{V_h})^{\frac{1}{e}}\right)^-\right)\right)$.

Pour $1 \leq i \leq p-1$, on a : $G_{i,h}(x) = \sum_{k\geq 1} a_{i,h,k}(1 - X\,\theta_i^{-1})^{-k}$ avec $\|G_{i,h}\|_{\mathbb{C}_p - B(\theta_i, (V_h^{\frac{1}{e}})^+)} = \sup_k |a_{i,h,k}|(V_h^{-k})^{\frac{1}{e}}$. D'autre part, on a

$$\|G_{h,p}\|_{W_{h,p}} < \frac{p^{2-p^{-1}-p^{-h}}}{e} \tag{1}$$

En effet si $G_{h,p}(x) = \dfrac{N_{h,p}(x)}{D_{h,p}(x)}$, on a : $\|D_{h,p}\|_{W_{h,p}} \geq V_h^{\frac{(p-1)p^{h-1}}{e}}$ et $\|N_{h,p}\|_{W_{h,p}} < V_h^{\frac{-(p^h-1)}{e}}$.

D'après le théorème Mittag-Leffler et les inégalités de Cauchy on tire de (1) :

$$|a_{i,h,k}| \leq p^{\frac{2-p^{-1}-p^{-h}-km(h)}{e}}$$

Posons $G_{i,h}(x) = \sum_{n\geq 0} g_{i,h,n}x^n$, alors : $g_{i,h,n} = \sum_{k\geq 1} b_{i,h,k}\theta_i^{-n}\binom{n+k-1}{k-1}$. On a donc, d'après l'inégalité ultramétrique

$$|g_{i,h,n+(p-1)p^{j+h}} - g_{i,h,n}| \leq \\ \sup_k |a_{i,h,k}| \left|\theta_i^{-n-(p-1)p^{j+h}}\binom{n+(p-1)p^{j+h}+k-1}{k-1} - \theta_i^{-n}\binom{n+k-1}{k-1}\right|$$

Comme $\theta_i^{p-1} = 1$ et

$$\left|\binom{n+(p-1)p^{j+h}+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1}\right| \leq \inf(1, p^{-j-h+\ell(k-1)})$$

on en déduit :

$$|g_{i,h,n+(p-1)p^{j+h}} - g_{i,h,n}| \leq p^{\frac{-E(k)}{e}} \cdot \inf(1, p^{-j-h+\ell(k-1)})$$

où $E(k) = -2 + p^{-1} + p^{-h} + km(h)$.

En appliquant un argument analogue à celui exposé dans le Lemme 8.1, on obtient les estimations suivantes :

$$|g_{i,h,n+(p-1)p^{j+h}} - g_{i,h,n}| < p^{\frac{1-j}{e}} \quad \text{si} \quad p > 2 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p-1 \tag{2}$$

respectivement

$$|g_{i,h,n+2^{j+h}} - g_{i,h,n}| < 2^{\frac{-j+2}{e}} \quad \text{si} \quad p = 2 \quad \text{et} \quad h \geq 2 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p-1 \tag{3}$$

Pour $i = 0, G_{0,h} \in H_0\left(B\left(0, \left((\frac{1}{V_h})^{\frac{1}{e}}\right)^-\right)\right)$, donc $G_{0,h}(x) = \sum_{n\geq 0} g_{0,h,n}x^n$ avec

$$||G_{0,h}||_{B(0,((\frac{1}{V_h})^{\frac{1}{e}})^-)} = \sup_n |g_{0,h,n}|\left(\frac{1}{V_h}\right)^{\frac{n}{e}}$$

D'après (1) on a :

$$|g_{0,h,n}| \leq p^{-(n+1)p^{-h}+2-p^{-1}} \tag{4}$$

D'autre part, pour établir des congruences entre les $B(n,\lambda,\omega,h)$, deux cas sont à envi-sager, $p > 2$ et $p = 2$.

- Si $p > 2$, on deduit de (2) et (4) on déduit que pour $p > 2$ et $n \geq p^h(1+j-p^{-1})$, on a :
$$|B(n+(p-1)p^{j+h},\lambda,\omega,h) - B(n,\lambda,\omega,h)| \leq p^{\frac{-j}{e}}$$
- Si $p = 2$, on déduit de (3) et (4) que pour $h \geq 2$; $p = 2$ et $n \geq 2^h(j+2^{-1})$ on a :
$$|B(n+2^{j+h+1},\lambda,\omega,h) - B(n,\lambda,\omega,h)| \leq 2^{\frac{-j}{e}}$$

Ainsi le Lemme 11.1 est démontré. ∎

Théorème 11.2 *Soit* $(\lambda, \omega) \in [B(0, 1^+)]^2$. *On pose* $b_{\lambda,\omega} = \lambda^p - \lambda + \omega^p$ *et* $k_p = \frac{p^p-1}{p-1}$
Soit $b_{\lambda,\omega}$ *tel que* $|b_{\lambda,\omega}| < 1$.
Les nombres $B(n, \lambda, \omega)$ *vérifient les congruences suivantes :*

- *Si* p *premier et* $h = 1$

$$B(n + (p-1), \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}$$

- *Si* p *premier impair,* $h \geq 2$ *et* $n \geq p^h(1 + h + p^{-1})$

$$B(n + (p-1)p^{2h}, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h$$

- *Si* $p = 2$ *;* $h \geq 2$ *et* $n \geq 2^h(h + 2^{-1})$

$$B(n + 2^{2h+1}, \lambda, \omega) \equiv B(n, \lambda, \omega) \bmod \mathfrak{P}^h \quad \textit{où} \quad \mathfrak{P}^e = (2)_R.$$

Preuve : En utilisant la même démarche que le Théorème 8.2, on déduit des congruences énoncées. ■

Références

[A] AMICE, Y. : *Nombres p-adiques*, PUF collection Sup, Le Mathématicien, Paris, (1975).

[A,F] AMICE, Y.et FRENEL, J : *Fonctions zéta p-adique des corps de nombres abéliens réels*, Acta Arith,Warszawa t.20, 353-384, (1970).

[B] BARSKY, D. : *Analyse p-adique et suites classiques de nombres*, Séminaire Lotharingien de combinatoire 5ème session, 7-8 décembre 1981, Publication de l'IRMA de Strasbourg 182/S-04, (1982).

[C] CARLITZ, L. : *Weighted Stirling Numbers of the first and second kind II*, the Fibonacci Quarterly 18, 147-162, (1980).

[C,G] CHINTHAYAMA and GANDHI, J.M. : *On numbers generated by* $e^{s(e^x-1)}$, Canad, Math, Bull. 10, 751-754, (1967).

[L] LAYMAN, J.W. : *Maximum zéro strings of Bell numbers modulo primes*, Journal of Combinatorial theory ; series A 40 , 161-168, (1985)

[L,P] LAYMAN,J.W.and PRATHER,C.L : *Generalized Bell numbers and zeros of successive derivatives of an entire function*, J. Anal. App. 96, 42-51, (1983).

[R] RADOUX, Ch. : *Arithmétique des nombres de Bell et analyse p-adique*, Bull. Soc. Math, Belg. t.29, 13-28, (1977).

[RO] ROBBA, Ph. : *Fonctions analytiques sur le corps valués ultramétriques complets*, Astérisque n°10, 109-220, (1973).

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Mathématiques
BP S15 MARRAKECH
(Maroc)