Completion d'une classe de demi-treillis topologiques, applications

Jean-Pierre Grenier

Résumé

Let $(E, \leq, T)$ be a topological inf-lattice. Using mild hypotheses on T, we construct a universal extension $(\tilde{E}, \ll, \tilde{T})$ of $(E, \leq, T)$ in which negative cones are Hausdorff compact. Then we apply our construction to the theory of totally increasing functions.

1 Introduction, notations.

La notion de fonction totalement croissante (ou monotone d'ordre infini dans G. Choquet [**1**]) étend au cas des ensembles partiellement ordonnés la notion habituelle de fonction de répartition F_μ d'une probabilité μ sur $\mathbf{R}$. L'étude générale des fonctions totalement croissantes $f : E \to \mathbf{R}$ remonte à G.Choquet et A.Revuz [**5**]. Celui-ci montre qu'il est naturel de supposer que E est un demi-treillis inférieur, c'est à dire un ensemble ordonné $(E, \leq)$ dans lequel toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de E a une borne inférieure notée $x \wedge y$. *Dans la suite,* $(E, \leq)$ *sera toujours un demi-treillis inférieur.* Les notations et résultats rappelés dans la suite de ce paragraphe proviennent essentiellement de [**5**].

On appelle cône négatif de sommet x l'ensemble $C_-(x) = \{t \in E/t \leq x\}$; on a $C_-(x) \cap C_-(y) = C_-(x \wedge y)$. Pour toute partie *finie* P de E on convient d'appeler aussi cônes les ensembles $C_-(x; P) = C_-(x) \setminus \bigcup_{p \in P} C_-(p)$ et $C_-(.; P) = E \setminus \bigcup_{p \in P} C_-(p)$. L'anneau booléen $\mathcal{B}$ engendré par les cônes $C_-(x)$ est l'ensemble des unions finies disjointes de cônes $C_-(x; P)$. Lorsque μ est une mesure sur E, si les cônes $C_-(x)$ sont mesurables et de mesure finie, on définit une application $F_\mu : E \longrightarrow \mathbf{R}$ par $F_\mu(x) = \mu(C_-(x))$ qu'on appelle la fonction de répartition de μ. Réciproquement,

Received by the editors September 1995.
Communicated by J. Schmets.
1991 *Mathematics Subject Classification :* primary 06A12, secondary 54J05, 03H05, 54H12.
Key words and phrases : semilattices, nonstandard topology, totally increasing functions.

pour toute application $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$, il existe une unique mesure finiment additive $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f = F_\mu$; (Voir [**3**] pour une démonstration non standard). Dans la suite, on supposera toujours que $f = F_\mu$.

Rappelons la définition d'une fonction totalement croissante.
Considèrons $f : E \to \mathbf{R}$. On définit par récurrence les différences $\nabla = \nabla_f$ de Bernstein par
$\nabla(x; \emptyset) = f(x)$
$\nabla(x; x_1) = f(x) - f(x \wedge x_1)$
et la relation de récurrence
$\nabla(x; \{x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}\}) = \nabla(x; \{x_1, x_2, \dots, x_p\}) - \nabla(x \wedge x_{p+1}; \{x_1, x_2, \dots, x_p\})$

Par récurrence sur p, on établit la relation

$$\nabla(x; \{x_1, x_2, \dots, x_p\}) = \sum_{Q \subset \{1,2,\dots,p\}} (-1)^{\mathrm{card}(Q)} f(x \wedge \bigwedge_{i \in Q} x_i).$$

On dit que f est totalement croissante lorsque toutes les différences de Bernstein sont positives ou nulles.

Par récurrence sur card(P), on établit la relation $\nabla_f(x; P) = \mu(C_-(x : P))$. On voit que μ est positive si et seulement si f est totalement croissante.

Un des problèmes les plus importants est de savoir à quelles conditions sur f et E, la mesure finiment additive positive μ est prolongeable en une mesure σ-additive définie au moins sur $\sigma(\mathcal{B})$. Ce problème a été étudié par A.Revuz. Dans le cas classique $E = [-\infty, +\infty[^n$ muni de l'ordre produit, on sait qu'une fonction $f : E \to \mathbf{R}_+$ totalement croissante est la fonction de répartition d'une mesure σ-additive sur E si et seulement si f est continue à droite. Pour établir ce résultat, les deux propriétés suivantes sont essentielles :
les cônes $C_-(x)$ sont compacts,
pour tout $x \in E$, dans tout voisinage à droite U de x, il existe y tel que $C_-(y)$ est un voisinage de $C_-(x)$.

Cependant dans certains cas classiques comme $E = \{(x, y) \in {\mathbf{R}_+}^2 / x + y \leq 1\}$ muni de la topologie induite et de l'ordre induit par l'ordre produit, où toute fonction $f : E \to \mathbf{R}_+$ totalement croissante continue à droite est aussi la fonction de répartition d'une mesure σ-additive sur E, seuls les points non maximaux satisfont cette dernière propriété. Ceci conduit à distinguer les points maximaux des autres points de E. Dans la suite, l'ensemble des points maximaux de E est noté $\mathcal{M}$.

Revuz a donc naturellement supposé E muni d'une topologie T et défini une *topologie à droite* sur E satisfaisant les conditions remarquées ci dessus, pour cela il a introduit donc les notations et le vocabulaire suivants que nous conserverons.

Soient x et y deux éléments de E, l'ensemble $C_+(x) = \{t \in E \ / \ t \geq x\}$ s'appelle le cône positif de sommet x et l'intersection $C_-(y) \cap C_+(x)$ l'intervalle $[x, y]$. Pour tout $x \in E$, l'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$. Un *voisinage à droite* de x est une partie U de E qui contient $C_+(x) \cap V$ où V est un voisinage de x (on écrira $U \in \mathcal{V}_+(x)$) ; les voisinages à droite définissent une topologie (la topologie à droite) notée T_+. La notation $\overset{\circ}{A}$ désigne l'intérieur de A pour la topologie T.

On dit que E satisfait l'axiome :
X_a : lorsque les cônes négatifs sont compacts.
X_c : lorsque pour tout $x \in E$ non maximal et tout $U \in \mathcal{V}_+(x)$, il existe $y \in U$ tel que $C_-(y)$ est un voisinage de $C_-(x)$.

Pour les besoins techniques de ses démonstrations, A.Revuz a également introduit la définition suivante :
X_b : On dit que E satisfait l'axiome X_b lorsque l'application $(x,y) \to x \wedge y$ est continue à droite.

On le théorème suivant ([**5**] p.208) :

Théorème fondamental. *Soit $(E, \leq, T)$ un demi-treillis topologique qui satisfait les axiomes X_a, X_b, X_c et $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une application totalement croissante et continue à droite, alors la mesure μ est dénombrablement additive (donc, d'après le théorème de Caratheodory, elle se prolonge de manière unique à $\sigma(\mathcal{B})$ en une mesure σ-additive).*

L'hypothèse de compacité X_a est très contraignante, on se propose dans cet article de l'affaiblir, pour cela dira que E satisfait l'axiome
X_h : lorsque la topologie à droite est séparée.
X_f : lorsque les cônes négatifs sont fermés.

On suppose dans toute la suite que $(E, \leq, T)$ satisfait les axiomes X_b, X_f, X_c, X_h.

Au paragraphe 2, on construit un complété universel $(\tilde{E}, \ll, \tilde{T})$ de $(E, \leq T)$ dans lequel les cônes sont compacts. On en déduit au paragraphe 4 que toute application totalement croissante $f : E \to \mathbf{R}$ continue à droite définit une mesure sur $\tilde{E}$ ce qui permet dans certains cas favorables d' établir que μ se prolonge à $\sigma(\mathcal{B})$ en une mesure σ-additive.

Une partie de ces résultats a été exposée, avec une construction standard assez longue "à la Dedekind", au séminaire d'Analyse 1990-91 de l'Université Blaise Pascal (Clermont II) (voir [**4**]) ; l'utilisation dans cet article de l'analyse non standard permet d'obtenir rapidement un résultat complet.

Je dois remercier Monsieur le Professeur Labib Haddad de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand ; les nombreux conseils qu'il m'a patiemment prodigués au cours des discussions que j'ai eues avec lui ont permi de clarifier et de simplifier la présentation de cet article.

2 Construction d'un complété de E

Nous allons montrer (théorème 2) qu'on peut plonger $(E, \leq, T)$ dans un complété universel $(\tilde{E}, \ll, \tilde{T})$ qui satisfait les propriétés suivantes : $(\tilde{E}, \ll, \tilde{T})$ est un demi treillis topologique dont l'ordre $\ll$ prolonge $\leq$, de plus $(\tilde{E}, \ll, \tilde{T})$ satisfait X_a, X_b, X_c et l'injection canonique $\pi : E \to \tilde{E}$ est continue à droite.

Remarque 1 : Si l'axiome X_h est satisfait, alors (dans X_c) on peut toujours choisir y non maximal. En effet (avec les notations de la définition de X_c), si y est maximal, $(U \cap \overset{\circ}{C_-}(y)) \setminus \{y\} \in \mathcal{V}_+(x)$; on applique X_c à $(U \cap \overset{\circ}{C_-}(y)) \setminus \{y\}$, d'où l'existence de $z \in (U \cap \overset{\circ}{C_-}(y)) \setminus \{y\}$ tel que $C_-(z)$ est un voisinage de $C_-(x)$. Or $z < y$ donc z n'est pas maximal.

Remarque 2 : En reprenant l'idée des démonstrations de A.Revuz [**5**] p.211-213, il est facile de vérifier que la topologie induite sur E par $\tilde{T}$ est une topologie moins fine que T dans laquelle une base d'ouverts est formée par les intérieurs de cônes négatifs. Lorsque T coincide avec la topologie induite par $\tilde{T}$, l'application π est un plongement ; c'est le cas des exemples classiques de l'Analyse.

On considère un modèle M de l'analyse contenant $E, \mathbf{R}, ...$, on désigne par ${}^*M$ un élargissement non standard de M (voir Robinson [**6**]), On suppose que ${}^*M$ est κ-saturé avec $\kappa >$Card(E) ; en conséquence la monade $\bigcap\{{}^*F/F \in \mathcal{F}\}$ de tout filtre $\mathcal{F}$ sur E est une partie non vide de ${}^*E$ et les parties standards de ${}^*E$ sont compactes pour la S-topologie (c'est à dire la topologie sur ${}^*E$ engendrée par les parties standards).

On désigne par $\mathcal{E}$" (resp.$\mathcal{E}'$) l'ensemble (éventuellement externe) des éléments de ${}^*E$ majorés par un élément standard (resp. standard non maximal) de E ; les éléments maximaux de $\mathcal{E}$" sont les éléments de $\mathcal{M}$. Pour $u \in \mathcal{E}'$, on désigne par $\mathcal{F}(u)$ l'ensemble des cônes $C_-(x)$ qui sont voisinages d'un cône $C_-(y)$ tel que $C_-(u) \subset {}^*C_-(y)$, c'est à dire $\mathcal{F}(u) = \{C_-(x)\ /x \in E$ et $\Big(\exists y \in E, C_-(u) \subset {}^*C_-(y)$ et $C_-(y) \subset \overset{\circ}{C_-}(x)\Big)\}$. Il est clair que $\mathcal{F}(u)$ est une base de filtre sur E ($\mathcal{F}(u) \neq \emptyset$ d'après X_c) ; on note $\mathcal{C}_-(u)$ la monade de $\mathcal{F}(u)$, (c'est à dire $\mathcal{C}_-(u) = \bigcap\{{}^*F/F \in \mathcal{F}(u)\}$). Pour $u, v \in \mathcal{E}'$, il est clair que $v \in \mathcal{C}_-(u) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{C}_-(v) \subset \mathcal{C}_-(u)$, de sorte que la relation $\ll$ définie sur $\mathcal{E}'$ par $v \ll u \ \Leftrightarrow\ v \in \mathcal{C}_-(u)$ est un préordre. La proposition suivante est la clé de toute la construction :

Proposition 1. *Pour tous $u, v \in \mathcal{E}'$, il existe $w \in \mathcal{E}'$ tel que $\mathcal{C}_-(w) = \mathcal{C}_-(u) \cap \mathcal{C}_-(v)$.*

Preuve.
Posons $W = \mathcal{C}_-(u) \cap \mathcal{C}_-(v)$; alors $W = \bigcap\{{}^*C_-(x \wedge y)/C_-(x) \in \mathcal{F}(u)$ et $C_-(y) \in \mathcal{F}(v)\}$. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties non vides de la forme $W \cap {}^*C_-(.; P)$ où P est une partie finie de E. Il est clair que $\mathcal{F}$ est une base de filtre, sa monade α est non vide et contenue dans W. Considèrons $w \in \alpha$; comme $w \in W$, on a $w \in \mathcal{C}_-(u)$ (resp. $\mathcal{C}_-(v)$) et donc $\mathcal{C}_-(w) \subset \mathcal{C}_-(u)$ (resp. $\mathcal{C}_-(v)$), d'où $\mathcal{C}_-(w) \subset W$.

Réciproquement, considèrons z standard tel que $w \leq z$.
<u>Ou bien</u> , on peut choisir z dans W ; alors $z \in \alpha$ et donc $W \subset {}^*C_-(z)$ (sinon $W \cap {}^*C_-(.; z) \neq \emptyset$ et on aurait $z \notin \alpha$), mais W est une intersection de cônes et contient z, d'où l'égalité ${}^*C_-(z) = W$; de plus la définition de $\mathcal{C}_-(z)$ montre que ${}^*C_-(z) \subset \mathcal{C}_-(z)$, on a donc $W \subset \mathcal{C}_-(z)$. En conséquence $W = \mathcal{C}_-(z)$.
<u>Ou bien</u> , il n'existe aucun $z \in W$ standard tel que $w \leq z$, on a alors $W \subset {}^*C_-(z)$ (sinon $W \cap {}^*C_-(.; z) \neq \emptyset$ donc $\alpha \subset W \cap {}^*C_-(.; z)$ or $w \in \alpha$ et ainsi z ne majorerait pas w). Comme $W = \bigcap\{{}^*C_-(x \wedge y)/C_-(x) \in \mathcal{F}(u)$ et $C_-(y) \in \mathcal{F}(v)\}$ est une monade, par saturation il existe $C_-(x) \in \mathcal{F}(u)$ et $C_-(y) \in \mathcal{F}(v)$ tels que ${}^*C_-(x \wedge y) \subset {}^*C_-(z)$. On a donc $W = \bigcap\{{}^*C_-(x \wedge y)/C_-(x) \in \mathcal{F}(u)$ et $C_-(y) \in \mathcal{F}(v)\} \subset \bigcap\{{}^*C_-(z)/w \leq z\} \subset \mathcal{C}_-(w)$.

On définit sur $\mathcal{E}'$ une relation d'équivalence $\sim$ compatible avec $\ll$ par la formule $u \sim v \Leftrightarrow \Big(u \ll v$ et $v \ll u\Big)$. En utilisant le résultat de la proposition 1, on vérifie que l'ensemble quotient $\mathcal{E}'/\sim$ ordonné par l'ordre quotient $\ll$ est un demi treillis inférieur. Nous noterons $\tilde{u} \wedge \tilde{v}$ la borne inférieure de $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$, $s : \mathcal{E}' \to (\mathcal{E}'/\sim)$ la surjection canonique, $\mathcal{C}_-(\tilde{u})$ (resp.$\mathcal{C}_+(\tilde{u})$) l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}'/\sim$ majorés (resp.minorés) par $\tilde{u}$ et $[\tilde{u}, \tilde{v}] = \mathcal{C}_+(\tilde{u}) \cap \mathcal{C}_-(\tilde{v})$. Il est clair que $\mathcal{C}_-(s(u)) = \mathcal{C}_-(\tilde{u}) = s(\mathcal{C}_-(u))$.

Proposition 2. *Soit $\pi : (E \setminus \mathcal{M}, \leq) \to (\mathcal{E}'/\sim, \ll)$ l'application qui à x associe $\tilde{x}$, on a les propriétés suivantes.*
(i) π est une injection strictement croissante.
(ii) π induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre $(E\setminus\mathcal{M}, \leq)$ et $(\pi(E \setminus \mathcal{M}), \ll)$.

Preuve.
(i) Par définition de $\ll$ sur $\mathcal{E}'$, il est clair que π est croissante ; il reste à vérifier qu'elle est strictement croissante. Donnons nous $x, y \in E \setminus \mathcal{M}$ et supposons que $x < y$. Il existe $z \in E \setminus \mathcal{M}$ tel que $x \in \overset{\circ}{C_-}(z)$ et $y \notin \overset{\circ}{C_-}(z)$. Sinon pour tout $U \in \mathcal{V}_+(x)$ il existe (d'après X_c) $z \in U$ tel que $x \in \overset{\circ}{C_-}(z)$ et $y \in \overset{\circ}{C_-}(z)$ ce qui implique $y \leq z$ c'est à dire $y \wedge z = y$; en faisant tendre z vers x on obtient (en utilisant X_b et X_h) $y \wedge x = y$, c'est à dire $y \leq x$, ce qui est impossible. En conséquence, (en appliquant X_c à $\overset{\circ}{C_-}(z)$) il existe $t \in E$ tel que $C_-(x) \subset \overset{\circ}{C_-}(t) \subset C_-(t) \subset \overset{\circ}{C_-}(z)$, on a donc $\tilde{x} \subset {}^*C_-(t)$ alors que $y \notin {}^*C_-(t)$ d'où $\tilde{x} \neq \tilde{y}$.

(ii) se déduit facilement de (i) car $E\setminus\mathcal{M}$ et $\mathcal{E}'/\sim$ sont des demi-treillis inférieurs.

Ensemble $\tilde{E}$.

On prolonge comme suit les relations $\sim$ et $\ll$ à $\mathcal{E}$". Si $u \in \mathcal{E}" \setminus \mathcal{E}'$, alors u est majoré par un seul élément $x \in E$ et x est maximal ; on pose $u \sim x$ et on dit que $v \ll u$ lorsque $v \sim x$ ou lorsqu'il existe $z \in E$ tel que $z < x$ et $v \ll z$. On notera $\mathcal{C}_-(u) = \{v \in \mathcal{E}"/v \ll u\}$.

On pose $\tilde{E} = (\mathcal{E}'/\sim) \cup \mathcal{M}$. On prolonge la surjection canonique s à $\mathcal{E}$" (resp. l'ordre quotient sur $\tilde{E}$) en posant $s(u) = x$ lorsque $u \sim x$ (resp. $\tilde{u} \ll \tilde{v}$ lorsque $u \ll v$). Cela prolonge naturellement l'injection π à E. Les résultats suivants sont alors évidents :
Les éléments maximaux de $\tilde{E}$ sont les éléments de $\mathcal{M}$.
Deux éléments $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ de $\mathcal{M}$ ne sont comparables pour $\ll$ que s'ils sont égaux.
Pour $x \in \mathcal{M}$ et $\tilde{u} \in (\mathcal{E}'/\sim)$, on a $\tilde{u} \ll \tilde{x}$ si et seulement s'il existe $y \in E$ tel que $y < x$ et $\tilde{u} \ll \tilde{y}$; ainsi l'ensemble $\mathcal{C}_-(\tilde{x})$ des éléments de $\tilde{E}$ majorés par $\tilde{x}$ (qui n'est autre que $s(\mathcal{C}_-(x))$) est égal à $\{\tilde{x}\} \cup \bigcup\{\mathcal{C}_-(\tilde{y})/y \in E \text{ et } y < x\}$.

Proposition 3.$(\tilde{E}, \ll)$ *est un demi treillis inférieur et $\ll$ prolonge $\leq$; on peut donc identifier $(E, \leq)$ et $\pi(E)$ muni de l'ordre induit par $\ll$.*

Preuve.
Le seul point non évident est l'existence de la borne inférieure dans $(\tilde{E}, \ll)$ de $\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ lorsque x ou y sont maximaux et distincts.

Si x et y sont tous les deux maximaux, pour tout $\tilde{u} \in \tilde{E}$, on a $\Big(\tilde{u} \ll \tilde{x} \text{ et } \tilde{u} \ll \tilde{y}\Big) \Leftrightarrow \Big(\tilde{u} \in \mathcal{C}_-(\tilde{x}) \cap \mathcal{C}_-(\tilde{y})\Big)$. Mais $\mathcal{C}_-(\tilde{x}) \cap \mathcal{C}_-(\tilde{y}) = \bigcup\{\mathcal{C}_-(\tilde{z})/\ z \in E\ ,\ z < x\ ,\ z < y\} = \mathcal{C}_-(\widetilde{x \wedge y})$, ainsi $\tilde{x} \wedge \tilde{y}$ existe et est égale à $\widetilde{x \wedge y}$.

Si $\tilde{x}$ est maximal et $\tilde{y}$ est non maximal, on peut supposer $x \in E$. Considèrons $z \in E \setminus \mathcal{M}$ qui majore y ; pour tout $u \in \mathcal{E}$", on a $\Big(u \ll y \text{ et } u \ll x\Big) \Leftrightarrow \Big(u \ll y, u \ll z \text{ et } u \ll x\Big)$. Comme $u \ll y$ et $\tilde{y} \notin \mathcal{M}$, on voit que $\tilde{u}$ n'est pas maximal, ainsi sous ces conditions l'expression $u \ll x$ équivaut à $\exists t \in E,\ t < x$ et $u \in \mathcal{C}_-(t)$ de sorte que $\Big(u \ll x \text{ et } u \ll z\Big)$ équivaut à $u \in \mathcal{C}_-(x \wedge z)$. On en déduit que $\Big(u \ll y \text{ et } u \ll x\Big) \Leftrightarrow \Big(u \ll x \wedge z \text{ et } u \ll y\Big)$ c'est à dire $\tilde{x} \wedge \tilde{y} = (\widetilde{x \wedge z}) \wedge \tilde{y}$.

Topologie sur $\tilde{E}$.
Pour tout $x \in E$, posons $O_-(x) = \bigcup\{\mathcal{C}_-(v)/v \in \mathcal{E}\text{"}$ et $\mathcal{C}_-(v) \subset {}^*C_-(x)\}$. Notons Ω l'ensemble formé d'une part de tous les $O_-(x)$ lorsque x décrit E et d'autre part de tous les ensembles $\mathcal{E}\text{"} \setminus \mathcal{C}_-(u)$ lorsque u décrit $\mathcal{E}'$; désignons par $T\text{"}$ la topologie engendrée par Ω sur $\mathcal{E}\text{"}$.
Remarque 3. Considérons $v \in \mathcal{E}'$, étudions les voisinages de v pour la topologie $T\text{"}$. Donnons nous $x \in E \setminus \mathcal{M}$; dire que $v \in O_-(x)$ signifie que $\mathcal{C}_-(v) \subset {}^*C_-(x)$, par saturation il existe $F \in \mathcal{F}(v)$ tel que ${}^*F \subset {}^*C_-(x)$, il existe donc un y standard tel que $\mathcal{C}_-(v) \subset {}^*C_-(y)$ et $C_-(y) \subset \overset{\circ}{C_-}(x)$. Comme $y \in O_-(x)$, on voit que $O_-(x)$ est la réunion des cônes ${}^*C_-(y)$ pour lesquels $C_-(y) \subset \overset{\circ}{C_-}(x)$. De plus $O_-(y)$ est un voisinage ouvert de v contenu dans $\mathcal{C}_-(y)$. On a les conséquences suivantes :
(i) Comme $\overset{\circ}{C_-}(x) \cap \overset{\circ}{C_-}(y) = \overset{\circ}{C_-}(x \wedge y)$, pour $x, y \in E$ non maximaux, on a $O_-(x) \cap O_-(y) = O_-(x \wedge y)$.
(ii) D'après (i) et la définition de $T\text{"}$, une base de voisinages de v est constituée des ensembles $O_-(x) \cap \mathcal{C}_-(.; P)$ qui contiennent v.
(iii) Comme (avec les notations précédentes) $\mathcal{C}_-(y)$ est un voisinage de v contenu dans $O_-(x)$, on voit qu'une base de voisinages de v est formée des cônes $\mathcal{C}_-(y; P)$ qui contiennent v et tels que $\mathcal{C}_-(v) \subset {}^*C_-(y)$.
(iv) Si $C_-(x) \in \mathcal{F}(v)$ alors $O_-(x)$ est un voisinage de $\mathcal{C}_-(v)$.
Remarque 4. Considérons un élément maximal x de E, étudions les voisinages de x pour la topologie $T\text{"}$. Deux cas sont possibles :
<u>Ou bien</u> $x \in O_-(x)$ alors $\mathcal{C}_-(x) = O_-(x) = {}^*C_-(x)$ est standard, ouvert et fermé ; dans ce cas une base de voisinages de x est formée de l'ensemble des cônes $\mathcal{C}_-(x; P)$ (où P est une partie finie de $\mathcal{E}'$) qui contiennent x.
<u>Ou bien</u> $x \notin O_-(x)$, alors une base de voisinages de x est formée des cônes $\mathcal{C}_-(.; P)$ (où P est une partie finie de $\mathcal{E}'$) qui contiennent x.

Proposition 4. *La topologie $T\text{"}$ est moins fine que topologie induite sur $\mathcal{E}\text{"}$ par la S-topologie.*

Preuve.
Nous avons à montrer que les éléments de Ω sont des ouverts de la (topologie induite sur $\mathcal{E}\text{"}$ par la) S-topologie. Pour $u \in \mathcal{E}'$ les cônes $\mathcal{C}_-(u)$ sont des intersections de parties standard donc des fermés de la S-topologie. Comme (remarque 3) pour $x \in E \setminus \mathcal{M}$, l'ensemble $O_-(x)$ est la réunion des cônes ${}^*C_-(y)$ pour lesquels $C_-(y) \subset \overset{\circ}{C_-}(x)$, $O_-(x)$ est un ouvert de la S-topologie. La seule difficulté consiste à établir que pour x maximal dans E, l'ensemble $O_-(x)$ est un ouvert de la S-topologie ; il y a deux cas :
<u>Ou bien</u> pour tout $v \in O_-(x)$, v est majoré par un élément $y = y(v) \in E$ non maximal, alors $O_-(x) = \bigcup\{O_-(y)/\ y < x\}$, donc $O_-(x)$ est une union d' ouverts de la S-topologie ;
<u>Ou bien</u> il existe $v \in O_-(x)$ tel que $v \sim x$, alors $\mathcal{C}_-(v) = \mathcal{C}_-(x)$, or $\mathcal{C}_-(v) \subset O_-(x) \subset {}^*C_-(x)$ et ${}^*C_-(x) \subset \mathcal{C}_-(x)$ donc $O_-(x) = {}^*C_-(x)$.

Par construction les éléments de Ω sont saturés pour $\sim$, on peut donc munir $\tilde{E}$ de la topologie quotient que nous noterons $\tilde{T}$.

Théorème 1. *Le demi treillis $(\tilde{E}, \ll, \tilde{T})$ satisfait les axiomes (X_a, X_b, X_c), E est $\tilde{T}_+$-dense dans $\tilde{E}$ et l'injection canonique $\pi : E \to \tilde{E}$ est continue à droite.*

Preuve.
Traitons d'abord la densité à droite de E. Si $u \in \mathcal{E}'$, d'après le point (iii) de la remarque 3, une base de voisinages à droite de $\tilde{u}$ est formée d'intervalles $[\tilde{u}, \tilde{x}]$ où x est dans $E \setminus \mathcal{M}$; si $u \notin \mathcal{E}'$ alors il existe x maximal équivalent à u et $\mathcal{V}_+(\tilde{u})$ est l'ultrafiltre des surensembles de $\tilde{x}$. Dans les deux cas tout voisinage à droite de $\tilde{u}$ rencontre E qui est donc $\tilde{T}_+$-dense dans $\tilde{E}$.

Comme la surjection canonique s est continue et croissante, il suffit de vérifier les autres propriétés (sauf la séparation) dans $\mathcal{E}$".

Montrons la quasi compacité des cones $\mathcal{C}_-(u)$.
<u>Si $u \in \mathcal{E}'$</u>, alors $\mathcal{C}_-(u)$ est une intersection de parties standards, or T" est moins fine que la S-topologie donc $\mathcal{C}_-(u)$ est quasi-compact.
<u>Si $u \notin \mathcal{E}'$</u>, il existe $x \in E$ maximal tel que $u \sim x$ et donc $\mathcal{C}_-(u) = \mathcal{C}_-(x)$. Si $x \in O_-(x)$, alors (remarque 4) $\mathcal{C}_-(x)$ est standard donc quasi-compact. Si $x \notin O_-(x)$, considèrons un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{C}_-(x)$; ou bien il existe $y \in E$ strictement inférieur à x tel que $\mathcal{C}_-(y) \in \mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ converge car $\mathcal{C}_-(y)$ est quasi compact, ou bien pour tout $y < x$, $\mathcal{C}_-(y) \notin \mathcal{U}$, mais alors $\mathcal{C}_-(x; y)$ appartient à $\mathcal{U}$, ce qui prouve (remarque 4) que $\mathcal{U}$ est plus fin que le filtre des voisinages de x.

Montrons X_c. Soit $u \in \mathcal{E}'$, un voisinage élémentaire à droite de u est de la forme $\mathcal{C}_+(u) \cap \mathcal{C}_-(x)$ où x un élément non maximal de E tel que $\mathcal{C}_-(u) \subset {}^*C_-(x)$; par saturation, il existe $y \in E$ tel que $\mathcal{C}_-(u) \subset {}^*C_-(y)$ et $C_-(y) \subset \overset{\circ}{C_-}(x)$; ainsi $y \in \mathcal{C}_+(u) \cap \mathcal{C}_-(x)$ et $\mathcal{C}_-(u) \subset O_-(y) \subset \mathcal{C}_-(y) \subset O_-(x)$ donc $\mathcal{C}_-(y)$ est un voisinage de $\mathcal{C}_-(u)$.

Montrons X_b. Donnons nous $u, v \in \mathcal{E}$" et considèrons $w \in \tilde{u} \wedge \tilde{v}$. Si $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont maximaux, il n'y a rien à montrer. Sinon on considère un voisinage ouvert $O_-(x)$ de $\mathcal{C}_-(w)$. Deux cas sont possibles :
<u>Ou bien</u> ni $\tilde{u}$, ni $\tilde{v}$ ne sont maximaux, alors comme $\mathcal{C}_-(w)$ est égal à l'intersection $\bigcap\{{}^*C_-(y) \cap {}^*C_-(z)/C_-(y) \in \mathcal{F}(u) \text{ et } C_-(z) \in \mathcal{F}(v)\}$ de quasi-compacts, l'un de ces quasi-compacts est contenu dans $O_-(x)$; comme (remarque 3-iv) ${}^*C_-(y)$ (resp. ${}^*C_-(z)$) est un voisinage de $\mathcal{C}_-(u)$ (resp.$\mathcal{C}_-(v)$) et ${}^*C_-(y) \subset \mathcal{C}_-(y)$ (resp. ${}^*C_-(z) \subset \mathcal{C}_-(z)$) on a bien montré la continuité à droite de $\wedge$.
<u>Ou bien</u> $\tilde{u}$ est maximal et $\tilde{v}$ ne l'est pas, il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que $x \in \tilde{u}$; on a alors $\mathcal{C}_-(u) = \tilde{x} \cup \bigcup\{\mathcal{C}_-(y)/\ y \in E \text{ et } y < x\}$. On choisit $z \in \mathcal{F}(v)$. Pour tout $t \in \mathcal{E}$", on a $\Big(t \ll v \text{ et } t \ll x\Big) \iff \Big(t \ll x \wedge z \text{ et } t \ll v\Big)$ de sorte que $\mathcal{C}_-(w)$ est égal à $\bigcap\{{}^*C_-(y) \cap \mathcal{C}_-(x \wedge z)/y \in \mathcal{F}(v)\}$; C'est une intersection de quasi compacts contenus dans l'ouvert $O_-(x)$, on termine comme dans le premier cas (en utilisant la remarque 4 au lieu de la remarque 3).

Montrons la séparation des cônes $\mathcal{C}_-(\tilde{x})$. Considérons $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ deux éléments distincts de $\mathcal{C}_-(\tilde{x})$, on peut supposer que $u \not\ll v$, donc en particulier $v \in \mathcal{E}'$.
<u>Ou bien</u> $\tilde{u}$ est maximal, alors on choisit $y \in E \setminus \mathcal{M}$ tel que $O_-(y)$ soit un voisinage de v ; il est clair que les ensembles disjoints $s(O_-(y))$ et $\mathcal{C}_-(.; \tilde{y})$ sont des voisinages respectifs de $\tilde{v}$ et $\tilde{u}$.
<u>Ou bien</u> $\tilde{u}$ n'est pas maximal, comme $u \not\ll v$, il existe $C_-(y) \in \mathcal{F}(v)$ tel que $C_-(y) \notin \mathcal{F}(u)$, on a donc $v \in O_-(y)$ alors que $u \notin \mathcal{C}_-(y)$. Ainsi $\mathcal{C}_-(\tilde{y}))$ et $\mathcal{C}_-(.; \tilde{y})$ sont des voisinages disjoints de $\tilde{v}$ et $\tilde{u}$.

Vérifions la continuité à droite de l'injection canonique π en $x \in E$.
Si x est maximal, il n'y a rien à montrer car $\mathcal{V}_+(x)$ est l'ultrafiltre des sur-ensembles de x.
Si x n'est pas maximal, d'après la remarque 3 et la définition d'une topologie à droite, tout voisinage à droite V de $\tilde{x}$ contient un intervalle $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ où $C_-(y)$ est un voisinage de $C_-(x)$. L'intervalle $[x, y]$ est un voisinage à droite de x, de plus π étant croissante, on a $\pi([x, y]) = [\tilde{x}, \tilde{y}] \cap \pi(E) \subset V$.

3 Théorème universel.

Dans ce paragraphe, nous allons formuler le résultat précédent dans le langage des catégories.

Soient $\mathcal{X}$ la catégorie des demi treillis topologiques qui satisfont les axiomes (X_b, X_c, X_f, X_h), $\mathcal{Y}$ celle de ceux qui satisfont (X_a, X_b, X_c) et $\mathcal{G}$ la classe des applications croissantes continues à droite. On a alors

Théorème 2. *Pour tout triplet $(E, \leq, T)$ de $\mathcal{X}$, il existe un unique (à un isomorphisme près) quadruplet $(\tilde{E}, \ll,\ T, \pi)$ qui satisfait (i), (ii) et (iii).*
(i) $\tilde{E}$ est dans $\mathcal{Y}$.
(ii) π est dans $\mathcal{G}$ et $\pi(E)$ est dense dans $\tilde{E}$ pour la topologie à droite.
(iii) Pour tout F de $\mathcal{Y}$ et toute $f : E \to F$ de $\mathcal{G}$, il existe une (unique) $\tilde{f} : \tilde{E} \to F$ de $\mathcal{G}$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$.

Preuve.
L'unicité est classique et sans difficultés, nous l'omettrons. Pour l'existence, on prend $\tilde{E}$ et π définis paragraphe 2 ; les conditions (i) et (ii) sont satisfaites. Il reste à construire $\tilde{f}$ ce qui va être l'objet des deux lemmes suivants.

Rappelons ([**5**] p.211-213) que comme F satisfait X_a, X_b, X_c, pour $x \in F$ non maximal, une base du filtre des voisinages à droite de x est $\{[x, y]/C_-(x) \subset \overset{\circ}{C_-}(y)\}$.

Convenons de dire qu'une partie A d'un ensemble ordonné est *filtrante à gauche* lorsque l'ensemble $\{A \cap C_-(y)/y \in A\}$ est une base de filtre.

Lemme 1. *Toute partie filtrante à gauche A de F a une borne inférieure a qui est la limite pour la topologie à droite de la base de filtre $< A >= \{[a, y]/y \in F\}$.*

Preuve.
Si A est réduit à un point, c'est évident. Sinon A contient un élément non maximal z, $C_-(z)$ est une partie compacte et fermée de F. La base de filtre $\{A \cap C_-(y)/y \in A\}$ converge vers un élément $a \in C_-(z)$. Les $C_-(y)$ étant fermés, on a $a \leq y$ pour tout $y \in A$. Soit b un autre minorant de A, et $C_-(x)$ un voisinage de a, par définition de a il existe $y \in A \cap C_-(x)$, on a alors $b \leq y \leq x$; en faisant tendre x vers a, on obtient $b \leq a$ donc $a = \inf A$. De plus $[a, y] \subset [a, x]$ de sorte que la base de filtre $< A >$ est plus fine que $\mathcal{V}_+(a)$.

Soit $\tilde{u} \in \tilde{E}$, l'ensemble $U = \mathcal{C}_+(\tilde{u}) \cap E$ est une partie filtrante à gauche de E, comme f est croissante, $f(U)$ est une partie filtrante à gauche de F, pose $\tilde{f}(\tilde{u}) = \inf f(U)$. Par construction, $\tilde{f}$ est croissante. Comme pour $u \in E$, on a ${}^*C_-(u) \subset$

$\mathcal{C}_-(u)$, on a $f(u) \leq \tilde{f}(\tilde{u})$, de plus, en utilisant la continuité à droite de f, on vérifie l'inégalité réciproque. En conséquence pour $u \in E$, on a $\tilde{f} \circ \pi(u) = \tilde{f}(\tilde{u}) = f(u)$.

Lemme 2.$\tilde{f} : \tilde{E} \to F$ *est continue à droite.*

Preuve.
Soit $\tilde{u} \in \tilde{E}$, posons $v = \tilde{f}(\tilde{u})$. Si v est maximal, il n'y a rien à montrer. Sinon, considèrons un voisinage à droite $[v, y]$ de v, il existe (en utilisant deux fois X_c) z dans $\overset{\circ}{C_-}(y)$ tel que $C_-(v) \subset \overset{\circ}{C_-}(z)$ et $C_-(z) \subset \overset{\circ}{C_-}(y)$. Comme $C_-(z)$ est un voisinage à droite de v et que la base de filtre $< f(U) >$ est plus fine que $\mathcal{V}_+(v)$, il existe $x \in U$ tel que $f(x) \in [v, z]$. Le cône $C_-(y)$ est un voisinage à droite de $f(x)$, donc puisque f est croissante et continue à droite, il existe un voisinage à droite $C_-(t)$ de x tel que $f(C_-(t)) \subset C_-(y)$. Comme $\tilde{f}$ est croissante, on a $\tilde{f}(\mathcal{C}_-(\tilde{t})) \subset C_-(y)$ d'où $\tilde{f}([\tilde{u}, \tilde{t}]) \subset [v, y]$.

Exemple 1. Lorsque E est égal à l'ensemble $\mathbf{Q}$ des rationnels, $\tilde{E}$ est isomorphe à l'intervalle $[-\infty, \infty[$ de $\bar{\mathbf{R}}$. (évident en utilisant le théorème universel)
Exemple 2. Soit X un espace compact et E est l'ensemble des fonctions numériques continues définies sur X muni de la topologie de la convergence uniforme. Considèrons l'ensemble $\mathcal{K}$ des parties compactes de $X \times \mathbf{R}_+$ muni de sa topologie d'hyperespace H et ordonné par inclusion. Soit F l'ensemble des parties $K \in \mathcal{K}$ qui satisfont les deux propriétés suivantes :
(1) $X \times \{0\} \subset K$
(2) $(x, t) \in K$ et $t' \leq t$ impliquent $(x, t') \in K$
On munit F de la topologie et de l'ordre induits. Nous allons construire explicitement un isomorphisme pour l'ordre et la topologie entre $(\tilde{E}, \ll, \tilde{T})$ et $(F, \subset, H)$.

Pour toute application $f \in E$, notons $K(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbf{R}/t \leq f(x)\}$; il est clair que $K(f) \in F$. Comme pour tout $\tilde{u} \in \tilde{E}$, on a $\tilde{u} = \inf\{f \in E/\tilde{u} \ll f\}$ et qu'il est connu que toute partie K de F a un système fondamental de voisinages à droite formé d'ensembles $K(f)$, il est naturel de définir une application $k : \tilde{E} \to F$ en posant $k(\tilde{u}) = \bigcap\{K(f)/f \in E$ et $\tilde{u} \ll f\}$ pour tout $\tilde{u} \in \tilde{E}$; par construction k est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Montrons la continuité de k. Considérons $\tilde{u} \in \tilde{E}$ et posons $K = k(\tilde{u})$. Soit $< O_1, O_2, \ldots, O_n >$ un voisinage élémentaire de K pour la topologie H (rappelons que $< O_1, O_2, \ldots, O_n >$ est l'ensemble des éléments L de F qui satisfont les deux propriétés $L \subset \bigcup O_i$ et $L \cap O_i \neq \emptyset$ pour tout i). Considèrons $f \in E$ telle que $K \subset \overset{\circ}{K}(f) \subset \bigcup O_i$; pour chaque i, il existe un point $(x_i, t'_i) \in K \cap O_i$. Si $t'_i \neq 0$, on choisit un réel t_i tel que $0 < t_i < t'_i$ et si $t'_i = 0$ on pose $t_i = 0$. Posons $g_i(x) = 0$ si $x \neq x_i$ et $g_i(x) = t_i$ si $x = x_i$, la fonction g_i est s.c.s. ; notons G_i l'ensemble des éléments de E qui majorent g_i ; G_i est une partie filtrante de $\tilde{E}$, elle a donc une borne inférieure $\tilde{h}_i$ dans $\tilde{E}$. Comme par construction $\tilde{u} \not\ll \tilde{h}_i$ pour tout i, le cône $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_-(\tilde{f}, \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_n\})$ est un voisinage de $\tilde{u}$. Pour tout $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{C}}$, on a $\tilde{h} \ll \tilde{f}$ donc $k(\tilde{h}) \subset k(\tilde{f}) \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ donné, choisissons $h \in E$ telle que $g_i \leq h \leq f$, on a $\tilde{h}_i \ll \tilde{h}$ donc $k(\tilde{h}_i) \subset k(\tilde{h})$, or $(x_i, t_i) \in k(\tilde{h}_i)$ ce qui assure $k(\tilde{h}) \cap O_i \neq \emptyset$. On a donc bien $k(\tilde{\mathcal{C}}) \subset < O_1, O_2, \ldots, O_n >$.

La continuité de k^{-1} s'obtient par un argument classique de compacité.

4. Application aux fonctions totalement croissantes.

Soit $(E, \leq, T)$ un demi treillis topologique et $f : E \to \mathbf{R}$ une application totalement croissante (donc croissante) et continue à droite. D'après le théorème 2, f se prolonge en une application $\tilde{f} : \tilde{E} \to \mathbf{R}$ continue à droite. Comme l'opération $\wedge$ est continue à droite sur $\tilde{E}$, en utilisant la relation

$$\nabla_{\tilde{f}}(\tilde{x}; \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_p\}) = \sum_{Q \subset \{1,2,\ldots,p\}} (-1)^{\mathrm{card}(Q)} \tilde{f}(\tilde{x} \wedge \bigwedge_{i \in Q} \tilde{x}_i),$$

on voit que pour tout entier p l'application $(\tilde{x}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_p) \to \nabla_{\tilde{f}}(\tilde{x}; \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_p\})$ est continue à droite sur $\tilde{E}^{p+1}$. Comme E est dense dans $\tilde{E}$ pour la topologie à droite et $\nabla_{\tilde{f}}(\tilde{x}; \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_p\}) = \nabla_f(x; \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}) \geq 0$ pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dans E, on a $\nabla_{\tilde{f}}(\tilde{x}; \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_p) \geq 0$ sur $\tilde{E}^{p+1}$, c'est à dire que $\tilde{f}$ est totalement croissante. Ainsi en appliquant le théorème fondamental de la théorie des fonctions totalement croissantes rappelé au paragraphe 1, il existe une unique mesure positive $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{E}$ telle que pour tout $x \in E$ on a $\tilde{\mu}(\tilde{C}_-(x)) = f(x)$.

Pour toute partie finie P de E notons $\tilde{P} = \{\tilde{y}/y \in P\}$. Par récurrence sur card(P), on a $\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{x}, \tilde{P}) = \mu(x, P)$ pour tout $x \in E$ et toute partie finie P de E.

Remarque 5. En général cela ne permet pas de prouver que μ est dénombrablement additive (prendre $E = [0, 1] \cap \mathbf{Q}$ et $f(t) = t$).

Proposition 5.μ *est dénombrablement additive si et seulement si pour tout cône* $C_-(x; P)$ *de* E *et toute partition dénombrable* $(C_-(x_n, P_n))_n$ *de* $C_-(x; P)$ *en cônes de* E, *il existe une partie mesurable* N *de* $\tilde{E}$ *pour laquelle on a*

$$\mathcal{C}_-(\tilde{x}, \tilde{P}) = \bigcup_n \mathcal{C}_-(\tilde{x}_n; \tilde{P}_n) \cup N \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}(N) = 0.$$

Preuve : évident.

Application.

Un exemple classique contenant le cas où $E = \mathbf{R}^n$ est le suivant (voir également [**2**] et [**5**] p.237). On suppose que E satisfait X_b, X_c, X_f mais *ne satisfait pas* X_a qui est remplacé les deux propriétés suivantes :
X_α : Pour tous $x, y \in E$, l'intervalle $[x, y]$ est compact.
$X_{\alpha'}$: Pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que x est intérieur à $C_+(y)$.

L'ensemble des parties de la forme $E \setminus C_+(x)$ est la base d'un filtre Φ sur E, on considère une fonction $f : E \to \mathbf{R}$ totalement croissante continue à droite et telle que $\lim_\Phi f = 0$. Nous allons donner une *condition suffisante purement topologique* sur $\tilde{E}$ pour que μ soit dénombrablement additive.

Sous les conditions imposées, l'ensemble E satisfait X_h, peut donc contruire l'ensemble $\tilde{E}$. On pose $\Theta = \tilde{E} \setminus E$;

Lemme 3. *Pour tout $x \in E$, on a $\Theta \cap \mathcal{C}_+(\tilde{x}) = \emptyset$.*

Preuve.
Soit $\tilde{u} \in C_+(\tilde{x})$, si $\tilde{u}$ est maximal, alors $\tilde{u} \in E$. Sinon on choisit $y \in E$ tel que $\mathcal{C}_-(\tilde{y})$ soit un voisinage de $\tilde{u}$, c'est aussi un voisinage de $\tilde{x}$. Posons $Y = \{z \in C_-(y) / \mathcal{C}_-(\tilde{y})$ est un voisinage de $\tilde{u}\}$ et $Z = \{C_-(z) \cap Y / z \in Y\}$; l'ensemble Z est une base de filtre dont tous les éléments appartiennent à $[x, y]$, elle converge d'après X_α vers un élément $t \in E$. Elle converge également vers $\tilde{u}$, la séparation de la topologie à droite assure que $\tilde{u} = t \in E$.

Théorème 3. *Avec les hypothèses et notations précédentes, si pour tout $x \in E$, l'ensemble $\Theta \cap \mathcal{C}_-(\tilde{x})$ est contenu dans une union dénombrables de cônes $\mathcal{C}_-(\tilde{v}_n)$ avec $\tilde{v}_n \in \Theta$, alors μ est dénombrablement additive.*

Preuve
Supposons que le cône $C_-(x; P)$ est union dénombrable d'une suite de cônes $C_-(x_n; P_n)$ deux à deux disjoints. Posons $N = \mathcal{C}_-(\tilde{x}; \tilde{P}) \setminus \bigcup_n \mathcal{C}_-(\tilde{x}_n; \tilde{P}_n)$. On a les unions disjointes $C_-(x; P) \cup (\Theta \cap \mathcal{C}_-(\tilde{x}; \tilde{P})) = \mathcal{C}_-(\tilde{x}; \tilde{P})$ et $C_-(x_n, P_n) \cup (\Theta \cap \mathcal{C}_-(\tilde{x}_n; \tilde{P}_n)) = \mathcal{C}_-(\tilde{x}_n; \tilde{P}_n)$ pour tout n. Ainsi

$$N = \Big(C_-(x; P) \setminus \bigcup_n C_-(x_n; P_n)\Big) \cup \Big(\Theta \cap \Big(\mathcal{C}_-(\tilde{x}; \tilde{P}) \setminus \bigcup_n \mathcal{C}_-(\tilde{x}_n; \tilde{P}_n)\Big)\Big) = \Theta \cap \Big(\mathcal{C}_-(\tilde{x}; \tilde{P}) \setminus \bigcup_n \mathcal{C}_-(\tilde{x}_n; \tilde{P}_n)\Big)$$

donc $N \subset \Theta \cap \mathcal{C}_-(\tilde{x})$. Pour montrer que $\tilde{\mu}(N) = 0$, il suffit de remarquer que la condition $\lim_\Phi f = 0$ implique $\tilde{f}(\tilde{u}) = 0$ pour tout $\tilde{u} \in \Theta$.

Remarque 6. Lorsque $E = \mathbf{R}^n$, $\tilde{E}$ s'identifie avec $[-\infty, +\infty[^n$ et l'ensemble Θ est composé des éléments $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \tilde{E}$ dont au moins une des composante est égale à $-\infty$. On voit que Θ est la réunion de la famille de cônes $\mathcal{C}_-(u)$ lorsque u décrit l'ensemble dénombrable $\Theta \cap \Big(\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}\Big)^n$. Ainsi E satisfait les hypothèses du théorème 3.

Références

[1] G.Choquet, Capacities, Ann. Inst. Fourier, (1947), 60,111.

[2] J.P. Grenier, Fonctions totalement croissantes, une correction, Proc. Am. Math. Soc, 123, n^{o}8, (August 1995), 2507, 2510.

[3] J.P. Grenier, Fonction de répartition sur un ensemble ordonné, Séminaire d'Analyse (1989-1990), Université Blaise Pascal, Clermont II.

[4] J.P. Grenier, Fonctions totalement croissantes, compléments, Séminaire d'Analyse 6 (1990-1991), Université Blaise Pascal, Clermont II.

[5] A.Revuz, Fonctions totalement croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés, Ann. Inst. Fourier, 6, (1955,1956), 187-269.

[6] A.Robinson, Nonstandard analysis, North Holland, (Amsterdam, 1966).

GRENIER Jean-Pierre,
Professeur en Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles,
276, rue des glycines, 45160 Olivet, France.
email : Jean.Pierre.Grenier@univ-orleans.fr