Nombres de Catalan généralisés

Christian Radoux

Abstract

In this paper, we consider a generalization of Catalan numbers in order to give an elementary proof of the following theorem : the Hankel matrix, of any order, built on Catalan numbers has determinant 1. We give also its inverse.

Résumé

Rappelons que le $n$ième **nombre de Catalan** C_n est donné par la formule

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \quad .$$

Ce nombre a de très nombreuses interprétations combinatoires. Par exemple, depuis Euler, on sait qu'il n'est autre que le nombre de décompositions en triangles d'un polygone convexe de $(n+2)$ côtés par des diagonales ne se coupant pas dans ce polygone. C'est aussi le nombre de séquences formées de n nombres 1 et de n nombres -1, à sommes partielles toutes positives ou nulles.

Dans [1], j'en démontrais une nouvelle propriété, par une technique algébrico-analytique remontant à Sylvester : quel que soit n, le déterminant de Hankel de dimension n formé sur les nombres de Catalan vaut 1. Cet article en donne maintenant une preuve directe et élémentaire. Il calcule aussi l'inverse de cette matrice.

Received by the editors August 1995 — In revised form : December 1995.
Communicated by Y. Félix.

1 Théorème

Soit H_n la **matrice de Hankel** construite sur la suite de Catalan :

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & \cdots & C_n \\ 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & \cdots & C_{n+1} \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 & \cdots & C_{n+2} \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 & \cdots & C_{n+3} \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 & \cdots & C_{n+4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_n & C_{n+1} & C_{n+2} & C_{n+3} & C_{n+4} & \cdots & C_{2n} \end{bmatrix}$$

Quel que soit n, dét$(H_n) = 1$.

Démonstration

A. Le coefficient de x^{i+j+1} dans $(1-x)^2(1+x)^{2i+2j}$ vaut

$$\binom{2i+2j}{i+j+1} - 2\binom{2i+2j}{i+j} + \binom{2i+2j}{i+j-1} = -2C_{i+j} \quad .$$

B. D'autre part, le coefficient de x^a dans $(1-x)(1+x)^{2i}$ vaut

$$\binom{2i}{a} - \binom{2i}{a-1} = \binom{2i}{a}\frac{2i-2a+1}{2i-a+1} \quad .$$

C. Ainsi, en identifiant le terme x^{i+j+1} dans l'identité triviale

$$(1-x)^2(1+x)^{2i+2j} = \left[(1-x)(1+x)^{2i}\right] \cdot \left[(1-x)(1+x)^{2j}\right] \quad ,$$

puis en exploitant l'antisymétrie des coefficients de ces polynômes, on a

$$-C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k+1}\frac{2i-2(i+k+1)+1}{2i-(i+k+1)+1}\binom{2j}{j-k}\frac{2j-2(j-k)+1}{2j-(j-k)+1}$$

(où $\binom{a}{b} = 0$ lorsque $b < 0$ ou $b > a$).

$$\begin{aligned} C_{i+j} &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k+1}\frac{2k+1}{i-k}\binom{2j}{j-k}\frac{2k+1}{j+k+1} \\ C_{i+j} &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k}\frac{2k+1}{i+k+1}\binom{2j}{j+k}\frac{2k+1}{j+k+1} \quad , \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} T_{i,k}T_{j,k} \quad ,$$

moyennant

$$T_{i,k} = \frac{\binom{2i}{i+k}(2k+1)}{i+k+1} \quad .$$

Appelons T_n la matrice triangulaire inférieure formée par ces coefficients $T_{i,k}$:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
5 & 9 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
14 & 28 & 20 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
42 & 90 & 75 & 35 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
132 & 297 & 275 & 154 & 54 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
429 & 1001 & 1001 & 637 & 273 & 77 & 13 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1430 & 3432 & 3640 & 2548 & 1260 & 440 & 104 & 15 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
4862 & 11934 & 13260 & 9996 & 5508 & 2244 & 663 & 135 & 17 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
T_{n,0} & T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & T_{n,4} & T_{n,5} & T_{n,6} & T_{n,7} & T_{n,8} & T_{n,9} & \cdots & T_{n,n}
\end{bmatrix}$$

Notre dernier résultat peut s'écrire maintenant

$$T_n U_n = H_n \quad ,$$

U_n désignant la transposée de T_n.
Puisque tous les éléments diagonaux de T_n valent 1, on obtient

$$\text{dét}(H_n) = \text{dét}(T_n) \cdot \text{dét}(U_n) = 1 \cdot 1 = 1 \quad ,$$

comme annoncé.

2 Inversion de H_n

Posons

$$\alpha_{n,i,j} = \left(H_n^{-1}\right)_{i,j} \quad .$$

D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n} T_{n,k} \sin(2k+1)\alpha = 2^{2n} \sin\alpha \cos^{2n}\alpha \quad .$$

D'autre part, par récurrence,

$$\sin(2n+1)\alpha = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n+k}{n-k} 2^{2k} \sin\alpha \cos^{2k}\alpha \quad .$$

On voit donc que T_n^{-1}, matrice triangulaire inférieure inverse de celle des $T_{n,k}$ est formée des $(-1)^{n+k}\binom{n+k}{n-k}$.
Il en résulte

$$\alpha_{n,i,j} = (-1)^{i+j} \sum_{k=\max(i,j)}^{n} \binom{k+i}{k-i} \binom{k+j}{k-j} \quad ,$$

ainsi que l'identité

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+i} \binom{k+i}{k-i} T_{j,k} = \delta_{i,j} \quad .$$

Références

[1] Christian Radoux, *Calcul effectif de certains déterminants de Hankel*, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, XXXI, 1 (série B), 49-55, 1979.

Université de Mons-Hainaut
Faculté des Sciences
15, Avenue Maistriau
B-7000 Mons (Belgique)