La variété du groupe unitaire dual

Eftimie Grecu

Abstract

Dans cet article nous considérons le groupe unitaire dual en p variables $U(p)$ et nous montrons que cet groupe est isomorphe avec le groupe G des matrices réelles d'ordre $2p$ qui satisfont les relations (10). Le groupe G a $n = p^2$ paramètres réels et il est doué de sa métrique naturelle.

Nous considérons ensuite la variété du groupe G qui est un espace semi-riemannien V_n à n dimensions. Nous montrons que cet espace admet un groupe transitif d'automorphismes à $2n$ paramètres, isomorphe avec le produit direct $G \times G$. Le sous groupe de stabilite d'un point de V_n à n paramètres et coïncide avec le groupe adjoint du groupe G.

Mathematics Subject Classification: 20G20, 53B21
Key words: linear algebraic groups, isomorphism, semi–Riemannian manifolds

1

Soit $\mathbf{D}$ l'algèbre des nombres duals. C'est une algèbre de rang deux sur les corps des nombres réels, associative, avec l'élément unité, commutative, avec des diviseurs de zéro, dont les unités $e_1^2 = e_1,\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_2,\ e_2^2 = 0$.

Si nous notons $e_1 = 1,\ e_2 = \varepsilon$, alors il en résulte $\varepsilon^2 = 0$.

Un élément de l'algèbre $\mathbf{D}$ est de la forme $x = a+\varepsilon b$, où a, b sont des nombres réels, le conjugué de x étant, par définition l'élément $x = a - \varepsilon b$.

Si la semi-norme de x est définie par la relation $\|x\| = \sqrt{x\bar{x}}$, alors il est facile à voir que $\|\bar{x}\| =\mid a \mid$.

Si on prend maintenant un autre élément $x' = a' + \varepsilon b'$ de l'algèbre $\mathbf{D}$, où a', b' sont aussi des nombres réels, alors nous avons les formules $\overline{xx'} = \bar{x}\bar{x}', \quad \|xx'\| = \|x\|\|x'\|$.

On sait [6] que l'algèbre $\mathbf{D}$ est isomorphe avec l'algèbre $M_2(\mathbf{R})$ des matrices réeles d'ordre deux ayant la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

En effet, l'application $f : D \to M_2(R)$ définie ainsi

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.1, No.2, 1996, pp. 45-51

$$f(a+\varepsilon b)=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \tag{1}$$

est une isomorphisme de l'algèbre $M_2(\mathbf{R})$.

Il est facile de voir que nous avons la relation

$$f(\bar{x})=-I_2\widetilde{f(x)}I_2, \quad I_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

où $\widetilde{f(x)}$ est la transposé de la matrice $f(x)$.

2

Notons avec $U(p)$ le groupe unitaire dual en p variables. Il est formé par les matrices A d'ordre p, dont les éléments sont des nombres duals, qui satisfont la relation

$$AA^\star = E_p$$

où $A^\star$ est l'adjoint de la matrice A et E_p signifie la matrice unité d'ordre p. Les transformations linéaires

$$\xi'^h = a^h_k \xi^k \quad (h,k=1,...,p)$$

du groupe $U(p)$ laisse invariante la forme bilinéaire hermitique

$$<\xi_1,\xi_2>=\xi^1_1\bar{\xi}^1_2+...+\xi^p_1\bar{\xi}^p_2$$

où $\xi_1=(\xi^1_1,...,\xi^p_1), \quad \xi_2=(\xi^1_2,...,\xi^p_2)$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace vectoriel dual $\mathbf{D}^p$ où p dimensions.

Les coeficients a^h_k satisfont les relations d'orthogonalité

$$a^h_k\bar{a}^h_l=\delta_{kl} \quad (l=1,...,p) \tag{3}$$

Si nous notons

$$\xi^h=x^{2h-1}+\varepsilon x^{2h}, \quad a^h_k=\alpha^h_k+\varepsilon\beta^h_k \tag{4}$$

où $x^{2h-1},x^{2h},\alpha^h_k,\beta^h_k$ sont des nombres réels, alors il est facile de montrer que nous avons les formules

$$<\xi_1,\xi_2>=<x_1,x_2>-\varepsilon[x_1,x_2]$$

$$x'^{2h-1}=\alpha^h_k x^{2k-1}, \quad x'^{2h}=\beta^h_k x^{2k-1}+\alpha^h_k x^{2k} \tag{5}$$

où nous avons noté

$$<x_1,x_2>=x^1_1x^1_2+x^3_1x^3_2+...+x^{2p-1}_1x^{2p-1}_2$$

$$[x_1, x_2] = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^4 \\ x_2^3 & x_2^4 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_1^{2p-1} & x_1^{2p} \\ x_2^{2p-1} & x_2^{2p} \end{vmatrix}$$

Donc, $< x_1, x_2 >$ est une forme bilinéaire, symétrique, dégénérée et $[x_1, x_2]$ est une forme bilinéaire alternée.

Ici, $x_1 = (x_1^1, ..., x_1^{2p})$, $x_2 = (x_2^1, ..., x_2^{2p})$ sont deux vecteurs de l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^{2p}$ à $2p$ dimensions et $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ signifie un déterminant d'ordre deux.

Les formules (5) on peut écrire encore sons la forme

$$x'^i = b_j^i x^j \quad (i, j = 1, ..., 2p) \tag{6}$$

avec les conditions suivantes

$$b_{2k-1}^{2h-1} = b_{2k}^{2h} = \alpha_k^h, \quad b_{2k-1}^{2h} = \beta_k^h, \quad b_{2k}^{2h-1} = 0 \tag{7}$$

La matrice $B = [b_j^i]$ qui satisfait ces conditions a la forme

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \cdots & b_1^{2p-1} & b_1^{2p} \\ 0 & b_1^1 & \cdots & 0 & b_1^{2p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{2p-1}^1 & b_{2p-1}^2 & \cdots & b_{2p-1}^{2p-1} & b_{2p-1}^{2p} \\ 0 & b_{2p-1}^1 & \cdots & 0 & b_{2p-1}^{2p-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Elle vérifie la relation $BJ = JB$, où J est la matrice suivante d'ordre $2p$ ayant la forme

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous considérons les matrices (I et H sont d'ordre $2p$)

$$X = [x^1 x^2 ... x^{2p}], \quad I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors les relations (6) s'écrivent sous la forme matricielle ainsi

$$(6') \qquad X' = XB$$

Nous avons de même les relations

$$< x_1, x_2 >= X_1 H\tilde{X}_2, \quad [x_1, x_2] = X_1 I\tilde{X}_2$$

$$< x_1', x_2' >= X_1(BH\tilde{B})\tilde{X}_2, \quad [x_1', x_2'] = X_1(BI\tilde{B})\tilde{X}_2$$

d'où il en résulte que les formes bilinéaires $< x_1, x_2 >$ et $[x_1, x_2]$ sont invariantes par le groupe $(6')$ si et seulement si la matrice B satisfait les relations

$$(9) \qquad BI\tilde{B} = I, \quad BH\tilde{B} = H$$

En tenant compte que $I^2 = -E_{2p}, \quad HI = J$ alors il est facile à voir que les relations (9) sont équivalentes aux relations suivantes

$$(10) \qquad BI\tilde{B} = I, \quad BJ = JB$$

L'ensemble des matrices réeles d'ordre $2p$ qui satisfont les relations (10) constitue un groupe G, qui a n paramètres.

En effect, en tenant compte par les relations (4), (7) alors les relations (3) s'ecrivent sous la forme

$$(3') \qquad b^{2h-1}_{2k-1} b^{2h-1}_{2l-1} = \delta_{kl}, \quad b^{2h-1}_{2k-1} b^{2h}_{2l-1} - b^{2h-1}_{2l-1} b^{2h}_{2k-1} = 0$$

Observons maintenant que les premières relations $(3')$ sont en nombre de $p(p+1)/2$ et que les dernières relations $(3')$ sont en nombre de $p(p+1)/2$. Puisque en tout sont $2p^2$ quantités réelles non nulles b^i_j, il en résulte que la matrice B possede p^2 éléments indépendants. Donc , le groupe G a $n = p^2$ paramètres.

3

Dans ce qui suit nons voulons montrer que le gruope unitaire dual en p variables $U(p)$ est isomorphe avec le groupe G des matrices réelles d'ordre $2p$, qui satisfont les relations (10). Soit, en effect, $M_p(\mathbf{D})$ l'ensemble des matrices d'ordre p, dont les éléments sont des nombres duals et $M_{2p}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices B réelles $2p$ ayant la forme (8).

Si nous mettons

$$a_k^h = b_{2k-1}^{2h-1} + \varepsilon b_{2k-1}^{2h} = b_{2k}^{2h} + \varepsilon b_{2k-1}^{2h} \tag{11}$$

et nous tenons compte par les relations (1), (11) alors il est facile à voir que l'application $g : M_p(D) \to M_{2p}(R)$ donnée par

$$g(A) = \begin{bmatrix} f(a_1^1) & \dots & f(a_1^p) \\ \vdots & & \vdots \\ f(a_p^1) & \dots & f(a_p^p) \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^{2p-1} & b_1^{2p} \\ 0 & b_1^1 & \dots & 0 & b_1^{2p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2p-1}^1 & b_{2p-1}^2 & \dots & b_{2p-1}^{2p-1} & b_{2p-1}^{2p} \\ 0 & b_{2p-1}^1 & \dots & 0 & B_{2p-1}^{2p-1} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^p \\ \vdots & & \\ a_p^1 & \dots & a_p^p \end{bmatrix}, \quad f(a_k^h) = \begin{bmatrix} b_{2k-1}^{2h-1} & b_{2k-1}^{2h} \\ 0 & b_{2k-1}^{2h-1} \end{bmatrix}$$

définit un isomorphisme d'algèbre $M_p(\mathbf{D})$ sur l' algèbre $M_{2p}\mathbf{R})$. En tenant compte par la formule (2), il est facile de montrer que nous avons la relation

$$g(A^\star) = -I\widetilde{g(A)}I$$

d'où il en résulte que

$$g(AA^\star) = -BI\tilde{B}I$$

Donc nous avons $AA^\star = E_p$ si et seulement si $BI\tilde{B} = I$. Observons maintenant que si nous considérons la matrice

$$K = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon \end{bmatrix}$$

alors nous avons $g(K) = J$. Quel que soit $A \in M_p(\mathbf{D})$ nous avons $AK = KA$, d'où il en résulte que $g(A)g(K) = g(K)g(A)$, cést–à –dire $BJ = JB$ quel que soit $B \in M_{2p}(\mathbf{R})$.

Par consequent, l'image par l'isomorphisme g du groupe $U(p)$ coincide avec le groupe G, dons les groupes $U(p)$ et G sont isomorphes.

4

En ce qui suit nous allons définir un espace semi–riemannien V_n à $n = p^2$ dimensions. Pour cela nous considérons l'application $<,>$: $M_{2p}(\mathbf{R}) \times M_{2p}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ donnée par

$$< B, C >= -Sp(BI\tilde{C}I) \tag{12}$$

où $Sp(N)$ signifie la trace de la matrice N, c'est– à–dire la somme des éléments de la diagonale principale.

Nous avons la formule

$$< B, C >= 2\left(b_1^1c_1^1 + ... + b_1^{2p-1}c_1^{2p-1} + ... + b_{2p-1}^1c_{2p-1}^1 + ... + b_{2p-1}^{2p-1}c_{2p-1}^{2p-1}\right) =$$

$$= 2\sum_{h,k=1}^{p} b_{2k-1}^{2h-1}c_{2k-1}^{2h-1}$$

donc la formule (12) définit une structure de semi–produit scalaire (forme bilinéaire, symétrique, dégénérée) dans $M_{2p}(\mathbf{R})$. Il en résulte que $< B, B >$ est une forme quadratique semi–définite positive

Le semi–produit scalaire (12) est invariant par rapport aux transformations (translations à gauche et à droite des groupe G)

$$T : G \to G, \quad T(B) = PBQ; \quad P, Q \in G \tag{13}$$

En effet, si nous tenons compte par la formule $Sp(LN) = Sp(NL)$, nous pouvons écrire

$$< T(B), T(C) >= -Sp[T(B)I\widetilde{T(C)}I] = -Sp(PBQI\tilde{Q}\tilde{C}\tilde{P}I) =$$

$$= -Sp(BI\tilde{C}\tilde{P}IP) = -Sp(BI\tilde{C}I) =< B, C > .$$

La semi–norme et la semi–distance dans l'espace semi–euclidien $M_{2p}(\mathbf{R})$ sont définis respectivement par les formules

$$\|B\| = \sqrt{< B, B >}, \quad d(B, C) = \|B - C\|.$$

La métrique de l'espace semi–euclidien $M_{2p}(\mathbf{R})$ est définie par la formule

$$ds^2 = -Sp(dBId\tilde{B}) \tag{14}$$

où dB est la différentielle de la matrice B.

On sait [8] qu'on appelle la métrique naturelle du groupe G la métrique induite par (14) sur la variété (10) du groupe G.

Dans l'espace semi–euclidiene $M_{2p}(\mathbf{R})$ les équations (10) définissent une variété algébrique réelle qui est un espace semi–riemannien V_n à $n = p^2$ dimensions, dont la métrique coïncide avec la métrique naturelle du groupe G, c'est–à–dire la métrique de cet espace s'obtient en remplacant dans (14) le quantités b_j^i par $2p^2$ fonctions de p^2 coordonnées de V_n.

Les transformations (13) sont des isométries de l'espace $M_{2p}(\mathbf{R})$, qui laissent invariant le sous–espace G.

En effet, de (13) il en résulte que nous avons $B = \mathbf{Q}$ si et seulement si $T(B) = \mathbf{Q}$, donc ces transformations conservent le point $B = \mathbf{Q}$. Nous avons puis les relations

$$T(B)I\widetilde{T(B)} = I, \quad T(B)J = JT(B)$$

donc les transformations (13) laissent invariant le sous–espace G définit par les équations (10).

Il est facile à voir que les transformations (13) constituent un groupe transitif d'automorphismes à $2n$ paramétres de l'espace V_n, isomorphe avec le produit direct $G \times G$.

Le point $B = E_{2p}$ appartient à l'espace V_n et les transformations (13) conservent ce point si et seulement si nous avons $Q = P^{-1}$, d'où il en résulte que le sous–groupe de stabilite du point E_{2p} a p^2 paramètres et est formé par les transformations

$$T_p(B) = PBP^{-1}; \quad P \in G$$

qui constituent le groupe adjoint du groupe G. Ce groupe n'est pas isomorphe avec le groupe G puisque le centre du groupe G n'est pas trivial.

Nous pouvons énoncer le suivant résultat: L'espace semi–riemannien V_n admet un groupe transitif d'automorphismes à $2n$ paramètres, isomorphe avec le produit direct $G \times G$. Le sous–groupe de stabilité du point E_{2p} a $n = p^2$ paramètres et coïncide avec le groupe adjoint du groupe G.

Bibliographie

[1] E.Cartan, *Nombres complexes*, Encycl. Sci. Math., t 1, 1908, p.329–468.

[2] I.Creangă, C.Haimovici, *Algebră liniară*, Editura de stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962, p.234

[3] J.Dieudonné, *Groupes classique*, Paris, 1947.

[4] E.Grecu, *Espaces symétriques des groupes semi–orthogonaux*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., t.27, 2(1982), p.147–158.

[5] E.U.Iasinskaia, *Poluneevklidovî i poluevklidovî prostranstva*, D.A.N., SSSR, 137, 6(1961), p.1327–1330.

[6] B.A.Rozenfeld, *Neevklidovî gheometrii*, Gos. Izd, Moscou, 1955.

[7] B.A.Rozenfeld, L.M.Karpova, *Simetriceskie polurimanovî prostranstva*, Izvestia vîssih ucebnîh Zavedenii, Matematica, 1(38), 1964, p.100–116.

[8] C.Teleman, *Sur une classe d'espaces riemanniens symétriques*, Revue de Math. Pures et Appl., t. II, 1957, p.445–470.

[9] G.Vrănceanu, *Lecons de géométrie différentielle*, Edit. Acad. Bucarest, 1964.

University Politehnica of Bucharest
Department of Mathematics I
Splaiul Independentei 313
77206 Bucharest, Romania