Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 1(2007), pp. 47–58

Conjuntos $\mathbf{m_X}$-Cerrados Generalizados

m_X-Generalized Closed Sets

Margot Salas Brown (msalas@sucre.udo.edu.ve)
Carlos Carpintero (ccarpi@sucre.udo.edu.ve)
Ennis Rosas (erosas@sucre.udo.edu.ve)
Departamento de Matemática,
Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre,
Venezuela.

Resumen

Dado (X, m_X) un m-espacio, se introduce el concepto de conjunto m_X-g-cerrado como una generalización de las definiciones de varias clases de conjuntos cerrados generalizados. Se obtiene un nuevo axioma de separación, denominado $m_X - T_{1/2}$ y se caracterizan éstos. También se estudian las relaciones entre los m-espacio $m_X - T_{1/2}$ y los m-espacio $m_X - T_0$ y $m_X - T_1$.
Palabras Claves: m_X-estructura, conjunto cerrado generalizado, m-espacio $m_X - T_{\frac{1}{2}}$.

Abstract

Given (X, m_X) an m-space, we introduce the concept of m_X-g-closed set as a generalization of the definitions of several classes of generalized closed sets. Also we obtain and characterize a new separaton axiom called $m_X - T_{1/2}$. Also we study the relations between the m-space $m_X - T_{1/2}$ and the m-spaces $m_X - T_0$ and $m_X - T_1$.
Key words and phrases: m_X-structure, generalized closed set, m-space $m_X - T_{\frac{1}{2}}$.

1 Introducción

Los conjuntos cerrados, semi-cerrados, α-semi-cerrados y (α, β)-semi-cerrados han sido utilizados por varios autores para definir diferentes clases de conjuntos cerrados generalizados y con estos introducir nuevos axiomas de separación.

Recibido 2006/11/20. Revisado 2007/07/04. Aceptado 2007/07/06.
MSC (2000): 54A05, 54A10, 54010.

En 1963, Levine [5] introduce el concepto de conjuntos g-cerrados y en 1991 Ogata [7] define los espacios $T_{1/2}$, también introduce las nociones de conjuntos s-g-cerrados y espacios semi-$T_{1/2}$. En el 2000 Rosas, Carpintero, Vielma y Salas [12] estudian el concepto de conjuntos α-sg-cerrado y caracterizan los espacios α-semi-$T_{1/2}$. En el 2005 Rosas, Carpintero y Sanabria [11] definen los conjuntos (α, β)-sg-cerrados y estudian los espacios (α, β)-semi-$T_{1/2}$.

En este artículo utilizamos la noción de estructura minimal m_X sobre un conjunto no vacío X dada por $Maki$ [6] y definimos los conjuntos m_X-g-cerrados como una generalización de los conjuntos g-cerrados, sg-cerrado, α-g-cerrado, α-sg-cerrado y (α, β)-sg-cerrado. También se definen y se caracterizan los $m_X - T_{1/2}$ que genera
lizan, de forma natural, a los espacios $T_{1/2}$, $\alpha - T_{1/2}$, semi-$T_{1/2}$, α-semi-$T_{1/2}$ y (α, β)-semi-$T_{1/2}$.

2 Preliminares

Sea X un conjunto no vacío, se dice que $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador expansivo* sobre una familia Γ de subconjuntos de X si $U \subset \alpha(U)$ para todo $U \in \Gamma$. Si (X, τ) es un espacio topológico y α es un operador expansivo sobre la topología τ, entonces diremos que α es un *operador asociado* a la topología τ [3]. Además, si $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ siempre que $A \subset B$, entonces decimos que el operador α es monótono.

Si (X, τ) es un espacio topológico, α un operador expansivo sobre la topología τ y A es un subconjunto de X, entonces ese dice que A es α-abierto [1] si para cada $x \in A$ existe un abierto U de x tal que $\alpha(U) \subset A$. El complemento de un conjunto α-abierto se denomina α-cerrado, se define la α-clausura de un subconjunto A de X, abreviada por $\alpha - cl(A)$, como la intersección de todos conjuntos α-cerrados que contienen a A. Se prueba que la $\alpha - cl(A)$ es un conjunto α-cerrado. Un conjunto A es α-cerrado generalizado, abreviado por α-g-cerrado, si $\alpha - cl(A) \subset U$ siempre que $A \subset U$ y U es α-abierto. Todo conjunto α-cerrado es α-g-cerrado. Se definen los espacios $\alpha - T_{\frac{1}{2}}$ como aquellos espacios en los cuales los conjuntos α-g-cerrado y α-cerrado coinciden, de modo que X es $\alpha - T_{\frac{1}{2}}$ sí y solo si para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es α-cerrado o α-abierto. La colección de todos los subconjuntos α-abierto de X se denota por τ_α

Un subconjunto A de X es α-semi-abierto [12] si existe un conjunto abierto $U \in \tau$ tal que $U \subset A \subset \alpha(U)$. El complemento de un conjunto α-semi-abierto se denomina α-semi-cerrado. Se define la α-semi-clausura de A, abreviado por $\alpha - scl(A)$, como la intersección de todos los conjuntos α-semi-cerrados que contienen a A; si α es un operador monótono entonces $\alpha - scl(A)$ es un conjunto α-semi cerrado. Se dice que A es un conjunto α-semi-cerrado generalizado, abreviado por α-sg-cerrado, si $\alpha - scl(A) \subset U$ siempre que $A \subset U$ y U es un conjunto α-semi-abierto. Si α es monótono, todo conjunto α-semi-cerrado es un conjunto α-sg-cerrado. Se dice que X es un espacio $\alpha - semiT_{\frac{1}{2}}$ si todo conjunto α-sg-cerrado es α-semi-cerrado, de modo que X es $\alpha - semiT_{\frac{1}{2}}$ sí y solo si para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es α-semi-cerrado o α-semi-abierto. La colección de todos los subconjuntos α-semi-abierto de X se denota por $\alpha - SO(X)$. Si β es otro operador asociado a τ, entonces un subconjunto A de X es (α, β)-semi-abierto [11] si para cada $x \in A$ existe un conjunto β-semi-abierto V tal que $x \in V$ y $\alpha(V) \subset A$. El complemento de un conjunto (α, β)-semi-abierto se denomina (α, β)-semi-cerrado. Se define la (α, β)-semi-clausura de A, abreviada por $(\alpha, \beta) - scl(A)$, como la intersección de todos los conjuntos (α, β)-semi-cerrados que contienen a A; se prueba que $(\alpha, \beta) - scl(A)$ es un conjunto (α, β)-semi-cerrado. Un subconjunto A de X es un conjunto (α, β)-semi-cerrado generalizado, abreviado (α, β)-sg-cerrado, si $(\alpha, \beta) - scl(A) \subset U$ siempre que $A \subset U$ y U es un conjunto (α, β)-semi-abierto. Todo conjunto (α, β)-semi-cerrado es un conjunto (α, β)-sg-cerrado. Se dice que X es un espacio $(\alpha, \beta) - semiT_{\frac{1}{2}}$ si todo conjunto (α, β)-sg-cerrado es (α, β)-semi-cerrado, de modo que X es $(\alpha, \beta) - semiT_{\frac{1}{2}}$ sí y solo si para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es (α, β)-semi-cerrado o (α, β)-semi-abierto. La colección de todos los subconjuntos (α, β)-semi-abierto de X se denota por $(\alpha, \beta) - SO(X)$

3 Estructuras Minimales

En esta sección se plantea el concepto de estructura minimal [6] y algunas de sus propiedades. También se define la noción de m-espacios$m_X - T_1$ y se caracterizan en funci'on de sus conjuntos unitarios.

Definición 3.1. [6] Una estructura minimal o una m_X-estructura sobre un conjunto no vacío X, es una familia m_X de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in m_X$ y $X \in m_X$.

El par (X, m_X) formado por un conjunto no vacío X y una m_X estructura sobre X, se denomina m-espacio. Cada elemento de m_X se denomina conjunto m_X-abierto y el complemento de un conjunto m_X-abierto se denomina conjunto m_X-cerrado. Si (X, τ) es un espacio topológico, α y β son operadores asociados a la topología entonces las colecciones τ, τ_α, $\alpha - SO(X)$ y $(\alpha, \beta) - SO(X)$ son m_X-estructuras.

Definición 3.2 ([6]). Sean (X, m_X) un m-espacio y A un subconjunto de X, se define la m_X clausura de A, abreviada $m_X - cl(A)$, como la intersección de todos los conjuntos m_X-cerrados que contienen a A, es decir

$$m_X - cl(A) = \bigcap\{F : F \supseteq A, X \setminus F \in m_X\}$$

Observe que si $X \setminus A \in m_X$, entonces $m_X - cl(A) = A$, es decir, si A es m_X-cerrado, entonces $m_X - cl(A) = A$; además $A \subset m_X - cl(A)$. Otras propiedades de $m_X - cl(A)$, se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 ([6]). *Sea (X, m_X) un m-espacio, A y B subconjuntos de X. Las siguientes se satisfacen.*

1. $m_X - cl(\emptyset) = \emptyset$.
2. $m_X - cl(X) = X$.
3. *Si* $A \subset B$, *entonces* $m_X - cl(A) \subset m_X - cl(B)$.
4. $m_X - cl(A \cup B) \supseteq m_X - cl(A) \cup m_X - cl(B)$.
5. $m_X - cl\,(m_X - cl(A)) = m_X - cl(A)$.

Teorema 3.2 ([8]). *Sea (X, m_X) un m-espacio, A un subconjunto de X y $x \in X$, entonces $x \in m_X - cl(A)$ si y sólo si $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in m_X$ tal que $x \in U$.*

Definición 3.3 ([6]). Si m_X es una estructura minimal sobre X tal que la unión de elementos de m_X es un elemento de m_X, entonces diremos que m_X satisface la condición (B) de Maki.

Observe que si m_X satisface la condición (B) de Maki, entonces la intersección de conjuntos m_X-cerrados es un conjunto m_X-cerrado y por tanto, si $A \subset X$, entonces $m_X - cl(A)$ es un conjunto m_X-cerrado.

Teorema 3.3. *[6] Sea (X, m_X) un m-espacio y A un subconjunto de X. Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces, A es m_X-cerrado sí y sólo si $m_X - cl(A) = A$.*

En el teorema anterior, si la condición (B) de Maki es removida, es posible tener un m-espacio (X, m_X) y un subconjunto A de X para el cual $m_X - cl(A) = A$ y A no sea un conjunto m_X-cerrado, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Considere $X = \{a, b, c, d\}$ con la siguiente m_X estructura,

$$m_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}.$$

Sea $A = \{c, d\}$. Observe que $m_X - cl(A) = A$ y A no es un conjunto m_X-cerrado.

Definición 3.4 ([10])**.** Sea (X, m_X) un m-espacio, se dice que X es $m_X - T_0$ si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe $U \in m_X$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $x \notin U$ y $y \in U$.

Definición 3.5 ([9])**.** Se (X, m_X) un m-espacio, se dice que X es $m_X - T_2$ si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos disjuntos $U, V \in m_X$ que contienen a x e y respectivamente.

Definición 3.6. Sea (X, m_X) un m-espacio, se dice que X es $m_X - T_1$ si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen conjuntos $U, V \in m_X$ que contienen a x e y respectivamente y satisfacen que $y \notin U$ y $x \notin V$.

Observe que

$$m_X - T_2 \Rightarrow m_X - T_1 \Rightarrow m_X - T_0.$$

Los siguientes ejemplos muestran que existen m-espacios que son $m_X - T_0$ pero no $m_X - T_1$, y $m_X - T_1$ que no son $m_X - T_2$

Ejemplo 2. Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la estructura minimal

$$m_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \{x\} : x \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}$ es $m_{\mathbb{R}} - T_1$, pues dado $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, podemos encontrar $m_{\mathbb{R}}$-abiertos $U = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ y $V = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ que contienen a x e y respectivamente y $x \notin V$, $y \notin U$.

Supongamos que $\mathbb{R}$ es $m_{\mathbb{R}} - T_2$, es decir, para $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$ existen conjuntos $U, V \in m_{\mathbb{R}}$ disjuntos tales que $x \in U$ e $y \in V$. Entonces $U = \mathbb{R} \setminus \{a_1\}$ y $V = \mathbb{R} \setminus \{a_2\}$ con $a_1 \neq x$ y $a_2 \neq y$. Esto significa que $U \cap V = \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ lo que implica que $\mathbb{R}$ no es $m_{\mathbb{R}} - T_2$.

Ejemplo 3. Consideremos $\mathbb{R}$ con la siguiente $m_{\mathbb{R}}$ estructura

$$m_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}$ es $m_{\mathbb{R}} - T_0$ pues para $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, $U = [y, \infty)$ es $m_{\mathbb{R}}$-abierto y $x \notin U$ e $y \in U$.

$\mathbb{R}$ no es $m_{\mathbb{R}} - T_1$ pues cualquier $m_{\mathbb{R}}$-abierto U que contenga a x es de la forma $U = [a, \infty)$ con $a \leq x$ y por tanto $y \in U$.

Los teoremas que se enuncian a continuación caracterizan las nociones de $m_X - T_0$ y $m_X - T_1$.

Teorema 3.4. *Sea (X, m_X) un m-espacio, X es $m_X - T_0$ si y sólo si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ se cumple que $m_X - cl\,(\{x\}) \neq m_X - cl\,(\{y\})$.*

Demostración. Supongamos que X es $m_X - T_0$ y sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, entonces existe $U \in m_X$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que existe $U \in m_X$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Entonces si $m_X - cl\,(\{x\}) = m_X - cl\,(\{y\})$, se tiene $x \in m_X - cl\,(\{y\})$ y por tanto, $U \cap \{y\} \neq \emptyset$, en contradicción que $y \notin U$. Así se debe tener $m_X - cl\,(\{x\}) \neq m_X - cl\,(\{y\})$.

Recíprocamente, sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y supongamos que $m_X - cl\,(\{x\}) \neq m_X - cl\,(\{y\})$, entonces existe $z \in X$ tal que $z \in m_X - cl\,(\{x\})$ y $z \notin m_X - cl\,(\{y\})$ o viceversa.

Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $z \in m_X - cl\,(\{x\})$ y $z \notin m_X - cl\,(\{y\})$, entonces existe $V \in m_X$ tal que $z \in V$ y $V \cap \{y\} = \emptyset$ y $V \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir $y \notin V$ y $x \in V$, es decir, X es $m_X - T_0$. $\square$

Teorema 3.5. *Sea (X, m_X) un m-espacio. Si para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es m_X-cerrado, entonces X es $m_X - T_1$. El recíproco es cierto si m_X satisface la condición (B) de Maki.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, entonces $\{x\}$ y $\{y\}$ son conjuntos m_X-cerrados y por lo tanto $X \setminus \{y\}$ y $X \setminus \{x\}$ son conjuntos m_X-abiertos que contienen a x e y respectivamente y se cumple que $y \notin X \setminus \{y\}$ y $x \notin X \setminus \{x\}$, de donde se concluye que X es $m_X - T_1$.

Recíprocamente, supongamos que X es $m_X - T_1$ y que m_X satisface la condición (B) de Maki. Sea $x \in X$, entonces para cada $y \in X$ con $x \neq y$ existen conjuntos $U, V \in m_X$ que contienen a x e y respectivamente y satisfacen que $x \notin V$ y $y \notin U$, es decir, $\{x\} \cap V = \emptyset$. Por lo que $y \notin m_X - cl(\{x\})$. Por lo tanto, $m_X - cl(\{x\}) = \{x\}$ y como m_X satisface la condición (B) de Maki, entonces $\{x\}$ es m_X-cerrado. $\square$

Observe que la condición (B) de Maki es suficiente para caracterizar los m-espacios que son $m_X - T_1$. El siguiente ejemplo nos muestra que el recíproco del teorema anterior, en general no es cierto si no se le exige la condición (B) de Maki a la m_X estructura.

Ejemplo 4. Consideremos $\mathbb{R}$ con la siguiente $m_{\mathbb{R}}$ estructura

$$m_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}$ es $m_{\mathbb{R}} - T_1$ pues para $x \neq y$, $\{x\}$, $\{y\}$ son $m_{\mathbb{R}}$-abiertos que no contienen a y y x respectivamente. Sin embargo $\{x\}$ no es $m_{\mathbb{R}}$-cerrado para ningún $x \in \mathbb{R}$.

4 Conjuntos m_X-g-Cerrados y $m_X - T_{\frac{1}{2}}$

En esta sección, utilizando la noción de m_X estructura, se generalizan los conceptos de conjunto g-cerrado [5], α-g-cerrado [12],α-sg-cerrado [12], (α, β)-sg-cerrado [11] y de espacios $T_{\frac{1}{2}}$ [5], $\alpha - T_{\frac{1}{2}}$ [12], $\alpha - semi - T_{\frac{1}{2}}$ [12], y $(\alpha, \beta) - semi - T_{\frac{1}{2}}$ [11].

Definición 4.1. Sea (X, m_X) un m-espacio, A un subconjunto de X, se dice que A es un conjunto m_X-cerrado generalizado, abreviado m_X-g-cerrado, si $m_X - cl(A) \subset U$ siempre que $A \subset U$ y $U \in m_X$.

Si (X, τ) es un espacio topológico y α y β son operadores asociados a la topología, entonces esta definición coincide con los conceptos de conjuntos g-cerrados [5], α-g-cerrado[12], (α, β)-sg-cerrado[11], cuando la m_X estructura es la colección τ,τ_α, $(\alpha, \beta) - SO(X)$ respectivamente. Además si m_X satisface la condición (B) de Maki, entonces este concepto coincide con la noción de conjunto α-sg-cerrado [12], cuando la m_X estructura es la colección $\alpha - SO(X)$.

Teorema 4.1. *Sea (X, m_X) un m-espacio, todo conjunto m_X-cerrado es m_X-g-cerrado.*

Los siguientes ejemplos nos muestran la existencia de conjuntos en un m-espacios que son m_X-g-cerrado que no son m_X-cerrado.

Ejemplo 5. Consideremos $\mathbb{R}$ con la siguiente $m_{\mathbb{R}}$ estructura

$$m_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}.$$

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es $m_{\mathbb{R}}$-g-cerrado pues el único $m_{\mathbb{R}}$-abierto que lo contiene es $\mathbb{R}$; pero no es $m_{\mathbb{R}}$-cerrado.

Ejemplo 6. Consideremos $\mathbb{R}$ con la siguiente $m_{\mathbb{R}}$ estructura

$$m_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}.$$

el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es un conjunto $m_{\mathbb{R}}$-g-cerrado pues el único $m_{\mathbb{R}}$-abierto que lo contiene es $\mathbb{R}$; pero no es $m_{\mathbb{R}}$-cerrado.

Definición 4.2. Sea (X, m_X) un m-espacio, se dice que X es $m_X - T\frac{1}{2}$, si todo conjunto m_X-g-cerrado es m_X-cerrado.

Es de observar que la condición (B) de Maki no necesariamente la satisfacen los m-espacios que son $m_X - T_0$ o $m_X - T_1$ o $m_X - T_2$, sin embargo existe una estrecha relación entre los m-espacios que son $m_X - T\frac{1}{2}$ y los m-espacios que satisfacen la condición (B) de Maki, como se observa en el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Sea (X, m_X) un m-espacio, si X es $m_X - T\frac{1}{2}$ entonces m_X satisface la condición (B) de Maki.*

Demostración. Supongamos que m_X no satisface la condición (B) de Maki, entonces existe una colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos m_X abiertos tal que $\cup_{\alpha \in J} U_\alpha \notin m_X$, luego $F = X \setminus \cup_{\alpha \in J} U_\alpha$ no es un conjunto m_X cerrado. Veamos que F es un conjunto m_X-g-cerrado.

En efecto, sea $V \in m_X$ tal que $F \subset V$, entonces

$$\begin{aligned} m_X - cl(F) &= m_X - cl(X \setminus \cup_{\alpha \in J} U_\alpha) \\ &= m_X - cl(\cap_{\alpha \in J}(X \setminus U_\alpha)) \\ &\subseteq \cap_{\alpha \in J} m_X - cl(X \setminus U_\alpha) \\ &= \cap_{\alpha \in J}(X \setminus U_\alpha) \\ &= X \setminus \cup_{\alpha \in J} U_\alpha = F \subset V \end{aligned}$$

De modo que F es un conjunto m_X-g-cerrado que no es m_X-cerrado y por tanto X no es $m_X - T\frac{1}{2}$. □

Teorema 4.3. *Sea (X, m_X) un m espacio y A un subconjunto de X. Si A es m_X-g-cerrado entonces $m_X - cl(A) \setminus A$ no contiene subconjuntos m_X-cerrados no vacíos. El recíproco es cierto si m_X satisface la condición (B) de Maki.*

Demostración. Supongamos que A es un conjunto m_X-g-cerrado y sea K un subconjunto m_X-cerrado de $m_X - cl(A) \setminus A$, entonces $X \setminus K$ es un conjunto m_X-abierto que contiene a A y por tanto $m_X - cl(A) \subset X \setminus K$, de modo que $K \subset (X \setminus m_X - cl(A)) \cap (m_X - cl(A))$, de donde se concluye que $K = \emptyset$

Recíprocamente, supongamos que $m_X - cl(A) \setminus A$ no contiene subconjuntos m_X-cerrados no vacíos y que m_X satisface la condición (B) de Maki. Sea $U \in m_X$ tal que $A \subset U$, entonces $m_X - cl(A) \cap (X \setminus U)$ es un conjunto m_X-cerrado y

$$m_X - cl(A) \cap (X \setminus U) \subset m_X - cl(A) \cap (X \setminus A) = m_X - cl(A) \setminus A$$

por tanto $m_X - cl(A) \cap (X \setminus U) = \emptyset$, es decir $m_X - cl(A) \subset U$ de donde se concluye que A es m_X-g-cerrado. □

El siguiente teorema caracteriza los m-espacios $m_X - T\frac{1}{2}$.

Teorema 4.4. *Sea (X, m_X) un m-espacio, X es $m_X - T\frac{1}{2}$ sí y sólo si las siguientes se satisfacen:*

1. *Para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es m_X-abierto o m_X-cerrado.*

2. *La m_X estructura satisface la condición (B) de Maki.*

Demostración. Sea $x \in X$ y supongamos que $\{x\}$ no es m_X-cerrado, entonces $X \setminus \{x\}$ no es m_X-abierto, de modo que el único m_X-abierto que contiene a $X \setminus \{x\}$ es X, por lo que $X \setminus \{x\}$ es trivialmente $m_X - g$-cerrado, por hipótesis X es $m_X - T_{1/2}$, entonces $X \setminus \{x\}$ es m_X-cerrado y por tanto $\{x\}$ es m_X-abierto. Por Teorema 4.2 se concluye que m_X satisface la condición (B) de Maki.

Recíprocamente, sea A un conjunto m_X-g-cerrado y $x \in m_X - cl(A)$, entonces por hipótesis puede ocurrir

1. $\{x\}$ sea m_X-abierto, entonces $\{x\} \cap A \neq \emptyset$ y por tanto $x \in A$; es decir, $m_X - cl(A) \subset A$.

2. $\{x\}$ se m_X-cerrado, como A es m_X-g-cerrado, entonces $m_X - cl(A) \setminus A$ no contiene conjuntos m_X-cerrados no vacíos, entonces $x \in A$; es decir, $m_X - cl(A) \subset A$.

En cualquier caso $m_X - cl(A) = A$; como m_X satisface la condición (B) de Maki, entonces A es m_X-cerrado. □

Existen m-espacios en los cuales los conjuntos unitarios son m_X-abiertos o m_X-cerrados y sin embargo el m-espacios X no es $m_X - T\frac{1}{2}$, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7. Considere $X = \{a, b, c, d\}$ con la siguiente m_X estructura,

$$m_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que los conjuntos unitarios son m_X-abiertos o m_X cerrados y sin embargo X no es $m_X - T\frac{1}{2}$. En efecto, $\{c, d\}$ es un conjunto m_X-g-cerrado pues el único m_X-abierto que lo contiene es X, y $\{c, d\}$ no es un conjunto m_X-cerrado.

Los siguientes teoremas muestran la relación existente entre los m-espacios $m_X - T_0$, $m_X - T_1$ y $m_X - T\frac{1}{2}$.

Teorema 4.5. *Sea (X, m_X) un m-espacio, si X es $m_X - T_{1/2}$ entonces X es $m_X - T_0$.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces $\{x\}$ es m_X-abierto o m_X-cerrado.

Si $\{x\}$ es m_X-abierto entonces para $V = \{x\}$ se tiene que $x \in V$ y $y \notin V$.

Si $\{x\}$ es m_X-cerrado, entonces $V = X \setminus \{x\}$ es m_X-abierto y $x \notin V$ y $y \in V$. Por tanto X es $m_X - T_0$. □

A continuación se exhibe un m-espacio que es $m_X - T_0$ pero que no es $m_X - T\frac{1}{2}$.

Ejemplo 8. Consideremos $\mathbb{R}$ con la siguiente $m_{\mathbb{R}}$ estructura

$$m_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}$ es $m_{\mathbb{R}} - T_0$; sin embargo no es $m_{\mathbb{R}} - T_{1/2}$.

Teorema 4.6. *Sea (X, m_X) un m-espacio, si m_X satisface la condición (B) de Maki y X es $m_X - T_1$, entonces X es $m_X - T_{1/2}$.*

Demostración. Si X es $m_X - T_1$ y satisface la condición (B) de Maki, entonces para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ son m_X-cerrados y por tanto X es $m_X - T_{1/2}$. □

El siguiente ejemplo nos muestra un m-espacio que es $m_X - T_{1/2}$ pero que no es $m_X - T_1$.

Ejemplo 9. Consideremos $\mathbb{R}$ con la siguiente $m_{\mathbb{R}}$ estructura

$$m_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{a\}\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \{x\} : x \neq a\},$$

donde a es un número real fijo. $m_{\mathbb{R}}$ satisface la condición (B) de Maki y los unitarios son conjuntos $m_{\mathbb{R}}$-abiertos o $m_{\mathbb{R}}$-cerrado. Por tanto $\mathbb{R}$ es $m_{\mathbb{R}} - T_{1/2}$; pero no es $m_{\mathbb{R}} - T_1$ porque $\{a\}$ no es $m_{\mathbb{R}}$-cerrado.

Es de observar que existen m-espacios que son $m - T_1$ pero que no son $m - T_{1/2}$. Para ello es suficiente encontrar un m-espacio que sea $m - T_1$ pero que no satisfaga la condición (B) de Maki

Ejemplo 10. Consideremos $\mathbb{R}$ con la siguiente $m_{\mathbb{R}}$ estructura

$$m_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}$ es $m_{\mathbb{R}} - T_1$; pero no es $m_{\mathbb{R}} - T_{1/2}$. En efecto, $\mathbb{Q}$ es $m_{\mathbb{R}}$-g-cerrado pues el único $m_{\mathbb{R}}$-abierto que lo contiene es $\mathbb{R}$; pero no es $m_{\mathbb{R}}$-cerrado.

Referencias

[1] Carpintero, C. Rosas, E. y Vielma, J. (1998) *Operadores asociados a una topología sobre un conjunto X y nociones conexas*. Divulgaciones Matemáticas, **6**, N 2, 139- 148.

[2] Carpintero, C. Rosas, E. y Vielma, J. (2003) *Espacios α-sg-Ti para i:1,2,3*. Divulgaciones Matemáticas, **11**, N 2.

[3] Kasahara, S. (1979) *Operator-Compact spaces*. Mathematic Japonica. **2**, 97- 105.

[4] Levine, N. (1970) *Generalized closed sets in topology*. Rend. Circ. Mat. Palermo(2), **19**, 89- 96.

[5] Levine, N. (1963) *Semi open sets and continuily in topological spaces*. Amer. Math. Monthly. **70**, 36-41

[6] Maki, H. (1996) *On generalizing semi-open and preopen sets*. in:Report for Meeting on Toological Spaces and its Applications. Yatsushiro College of Technoloy. pp. 13-18.

[7] Ogata, H. (1991) *Operation on topological spaces and associated topology*.Mah. Japonica. **36**, N-1, 175-184.

[8] Popa, V. and Noiri, T. (2001) *On the definitions of some generalized forms of continuity under minimal conditions*. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser Math. **22**, 9-18.

[9] Popa, V. and Noiri, T. (2000),*On almost m-continous functions*. Math. Notae. **40**. 75-94.

[10] Popa, V. and Noiri, T. (2005), *A unified theory for strong θ-continuity for functions*. Acta Math. Hungar. **40**. 167-186.

[11] Rosas, E. Carpintero, C. y Sanabria, J. (2005). *(α, β)-semi open sets and some new generalizad separation axioms*. Scientiae Mathematicae Japonicae. **62**, N 2.

[12] Rosas, E. Vielma, J. Carpintero, C. y Salas, M. (2000) *Espacios α-semi-Ti para i= 0,1/2, 1, 2*. Pro-Mathematica. N 27, 37- 48.

[13] Rosas, E. Vielma, J. Carpintero, C. y Salas, M. (2005) *(α, β)-sg-Ti spaces for i: 1,2,3,4*. Saber. **17**, N 1.