Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 1(2007), pp. 71–76

Continuidad y Teorema de Heine-Cantor

Continuity and Theorem of Heine-Cantor

Reinaldo Antonio Cadenas Aldana (rcadena@ula.ve)
Facultad de Humanidades y Educación,
Universidad de los Andes, Núcleo la Liria,
Avenida las Américas, Mérida, Venezuela.

Resumen

En este trabajo presentamos dos pruebas del Teorema de Heine-Cantor (sobre un conjunto compacto de la recta) fundamentadas en los resultados dados por R. F. Snipes en [3], en los cuales considera algunos tipos de sucesiones para caracterizar la continuidad y la continuidad uniforme de una función sobre espacios métricos.
Palabras y frases claves: Sucesiones de Cauchy, sucesiones paralelas, sucesiones equivalentes, continuidad, continuidad uniforme, teorema de Heine-Cantor.

Abstract

In this work we present two proofs of the Theorem of Heine-Cantor (on a compact set of the real line) based on the results given by R. F. Snipes in [3], where some types of sequences are considered in order to characterize the continuity and the uniform continuity of a function over a metric space.
Key words and phrases: Cauchy Sequences, equivalent sequences, parallel sequences, sequences, continuity, uniform continuity , theorem of Heine-Cantor.

1 Introducción

Usualmente encontramos resultados que caracterizan la continuidad usando sucesiones (hablando de funciones secuencialmente continuas y funciones que

Recibido 2007/01/15. Revisado 2007/07/13. Aceptado 2007/09/25.
MSC (2000): Primary 01A60; Secondary 46B03, 40H05.

preservan sucesiones convergentes) como por ejemplo lo hace Lima en [2] o Snipes en [3]. Con la clasificación que hace F Snipes en [3] de las sucesiones se caracteriza la continuidad de una función (sobre dominios cerrados) considerando tres tipos de sucesiones: sucesiones convergentes, sucesiones de Cauchy y sucesiones equivalentes.

Presentaremos un resultado dado por Snipes en [3] que caracteriza la continuidad uniforme en base a tres tipos de sucesiones: sucesiones convergentes, sucesiones de Cauchy y sucesiones paralelas.

Por último damos dos pruebas rápidas y elegantes del Teorema de Heine-Cantor (las nociones de continuidad y continuidad uniforme sobre un conjunto compacto de la recta son equivalentes) utilizando el comportamiento de las sucesiones de Cauchy y de las sucesiones equivalentes bajo funciones continuas en dominios cerrados y acotados; con estos enfoques la demostración difiere de la prueba clásica donde se utiliza el teorema de Lebesgue sobre cubrimientos abiertos (ver Apostol [1]).

2 Sucesiones y Continuidad

A continuación daremos una clasificación sobre sucesiones que Snipes presenta en [3].

En todo el desarrollo asumiremos que $\mathbb{R}$; el conjunto de los números reales, está dotado de la métrica usual, y que los conjuntos mencionados son subconjuntos de $\mathbb{R}$, así, como los elementos señalados son números reales.

Definición 1. Una sucesión (x_n) se llama de **Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \ n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Dos sucesiones (x_n) y (y_n) se llaman **paralelas** y se escribe $(x_n) \parallel (y_n)$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_n| < \epsilon.$$

Dos sucesiones (x_n) y (y_n) se llaman **equivalentes** y se escribe $(x_n) \approx (y_n)$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \ n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_m| < \epsilon.$$

Es un hecho conocido que las funciones continuas no transforman sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, basta considerar la función

$f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Cuando imponemos la condición de que el dominio A de la función sea un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, entonces si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en A, f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, como lo veremos en el siguiente lema.

Lema: 1. *Sean A un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *f es continua en A.*
2. *f preserva sucesiones de Cauchy.*
3. *f preserva sucesiones equivalentes.*
4. *f preserva sucesiones convergentes.*
5. *f es secuencialmente continua en A.*

Prueba: $2 \Rightarrow 3$ y $4 \Rightarrow 5$ se deducen inmediatamente de la definición 1 y de las hipótesis. $5 \Rightarrow 1$, es un caracterización clásica de la continuidad de f. El hecho de que A es cerrado y $\mathbb{R}$ completo aseguran que $1 \Rightarrow 2$.

Por otro, lado sea $(x_n) \subset A$ convergente en A, entonces (x_n) es de Cauchy, y así, $(x_n) \approx (x_n)$. Luego, por 3, $(f(x_n)) \approx (f(x_n))$, y por lo tanto, $(f(x_n))$ es de Cauchy, en consecuencia por ser $\mathbb{R}$ completo $(f(x_n))$ es convergente y así, $3 \Rightarrow 4$. ■

Nótese que la condición de que A sea un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ sólo fue utilizada para probar que $1 \Rightarrow 2$.

3 Caracterizaciones de la continuidad uniforme por sucesiones

Definición 2. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. f se llama **uniformemente continua** (UC) en A, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta{=}\delta(\epsilon) > 0$ tal que si para todo $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

La demostración del siguiente teorema es la misma dada por Snipes[3] (pág 411) para espacios métricos.

Teorema: 1 (Caracterización de la Continuidad Uniforme por sucesiones). *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es UC en A.*

2. *f preserva sucesiones paralelas (es decir, si $(x_n), (y_n)$ son sucesiones paralelas en A, entonces $(f(x_n)), (f(y_n))$ son sucesiones paralelas en $\mathbb{R}$).*

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ tiene la propiedad de transformar sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, pero no es UC en $\mathbb{R}$. Ahora, cuando A es un conjunto acotado obtenemos que si una $f : A \to \mathbb{R}$ es una función que transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, entonces f es UC en A, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema: 2. *Sean A un conjunto acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *f es UC en A.*

2. *f preserva sucesiones paralelas.*

3. *f preserva sucesiones equivalentes.*

4. *f preserva sucesiones de Cauchy.*

Prueba: Por el teorema 1, $1 \Leftrightarrow 2$, la equivalencia $3 \Leftrightarrow 4$ se sigue de la definición 1. Luego, basta probar que $1 \Leftrightarrow 4$.

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en A. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, como f es UC en A existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in A$,

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{1}$$

Por otro lado, como (x_n) es de Cauchy en A, para el δ hallado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \delta. \tag{2}$$

Luego, de (1) y (2) se sigue que

$$m, n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$$

siempre que $m, n > n_0$. Así, $(f(x_n))$ es de Cauchy. Por lo tanto, $1 \Rightarrow 4$.

Para probar que $4 \Rightarrow 1$, supongamos que f no es UC, entonces existen $\epsilon > 0$ y sucesiones $(x_n), (y_n) \subset A$ tales que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon. \tag{3}$$

Ahora, como $(x_n) \subset A$ y A está acotado, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) y $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x_{n_k}) \to a. \tag{4}$$

En consecuencia, como $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ y por (4) se sigue

$$(y_{n_k}) \to a. \tag{5}$$

Luego, por (4) y (5) la sucesión $(x_{n_1}, y_{n_2}, x_{n_2}, y_{n_2}, \dots) \to a$; y así, es de Cauchy, entonces por la hipótesis $(f(x_{n_1}), f(y_{n_1}), f(x_{n_2}), f(y_{n_2}) \dots)$ es de Cauchy en contradicción con (3). Por lo tanto, f es UC en A. ∎

4 El Teorema de Heine-Cantor

Teorema: 3 (Teorema de Heine-Cantor)**.** *Sea A un conjunto compacto. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es UC en A.*

Prueba: 1. Como A es un conjunto compacto entonces A es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. En consecuencia, por ser A un conjunto cerrado y f es continua, se sigue del lema 1 que f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Además, A es acotado y por teorema 1 se concluye que f es UC en A. ∎

Prueba: 2. Si f no fuera UC en A, entonces por el teorema 1 existirían sucesiones (x_n) y (y_n) en A tales que $(x_n) \parallel (y_n)$ pero

$$(f(x_n)) \textit{ no es paralela con } (f(y_n)). \tag{6}$$

Ahora, como $(x_n) \subset A$ y A es compacto, existen (x_{n_k}) subsucesión de (x_n) y $a \in A$ tales que

$$(x_{n_k}) \to a. \tag{7}$$

Por otro lado, $(x_n) \parallel (y_n)$ implica que

$$(|x_{n_k} - y_{n_k}|) \to 0. \tag{8}$$

En consecuencia, por (7) y (8) se sigue que

$$(y_{n_k}) \to a. \tag{9}$$

Así, por (7), (9) y la continuidad de f en A, se sigue que

$$(f(x_{n_k})) \to f(a) \quad y \quad (f(y_{n_k})) \to f(a). \tag{10}$$

Por lo tanto, de (10) obtenemos que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$, pero esto contradice (6) y así, f es UC en A. ∎

NOTA. Por todo lo expuesto anteriormente podemos concluir que cuando el dominio de una función es un conjunto compacto de la recta, entonces las nociones transformar sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, continuidad uniforme y continuidad son equivalentes.

Referencias

[1] Apostol, T., *Análisis Matemático*, Segunda edición, Editorial Reverté, España, 1977.

[2] Lima, E., *Curso de Análise*, Libros Técnicos y Científicos, Brasil, 1976.

[3] Snipes, R., *Functions that Preserve Cauchy Sequences*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XXV (1977), 409–422.