

Problemas y Soluciones

Problems and solutions

Editor: Jos'e Heber Nieto

**Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia
Apartado Postal 526. Maracaibo 4001. Venezuela.
(E-mail: jhnieto@@luz.ve)**

Las soluciones y problemas propuestos (incluyendo sus soluciones, si se conocen) deben dirigirse al editor, por correo electrónico o bien mecanografiadas y por duplicado, a la dirección dada más arriba.

Solutions and proposed problems (including their solutions, if known) should be sent to the editor by e-mail or typewritten, by duplicate, to the address given above.

1 Problemas propuestos

7. *Propuesto por Dar'io Dur'an (dduran@@luz.ve)*

Sea ABC un triángulo con $AB = AC$ y sean M el punto medio de BC , P el pie de la perpendicular desde M hasta AC y N el punto medio de MP . Pruebe que $BP \perp AN$.

8. *Propuesto por el editor.*

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto con complemento numerable. Pruebe que si la restricción de f a X es inyectiva entonces f es inyectiva.

9. *Propuesto por Víctor Ramírez (vramirez@@hydra.ciens.luz.ve)*

Sea R un anillo cualquiera, I el conjunto de los $x \in R$ para los cuales existe algún $y \neq 0$ tal que $xy = 0$, y D el conjunto de los $y \in R$ para los cuales existe algún $x \neq 0$ tal que $xy = 0$. Pruebe que si R es infinito entonces o bien $I = D = (0)$ o bien $\text{card}(I) = \text{card}(D) = \text{card}(R)$.

10. *Propuesto por Ángel Oneto (aoneto@@luz.ve)*

Sea A un dominio de integridad. Si A no es un cuerpo entonces existe un A -módulo M con submódulos M_1 y M_2 tales que ambos son libres de torsión pero M no lo es, y $M = M_1 + M_2$.

2 Soluciones

2. *Propuesto en el v. 1, No. 1 (1993), p. 106.*

Sea $a > 2$ un número real y definamos una sucesión así: $x_0 = a$, $x_n = x_{n-1}^2 - 2$ para $n > 0$. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{x_n}$.

Solución por Oswaldo Larreal (olarreal@@hydra.ciens.luz.ve):

Pongamos $x_0 = z + z^{-1}$, siendo $z = (a + \sqrt{a^2 - 4})/2$. Entonces,

$$x_1 = (z + z^{-1})^2 - 2 = z^2 + z^{-2}, \quad x_2 = (z^2 + z^{-2})^2 - 2 = z^4 + z^{-4}$$

y por inducción se prueba en general que

$$x_n = z^{2^n} + z^{-2^n}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{x_n} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{1 + z^{-4^n}} = z = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} .$$