Divulgaciones Matemáticas Vol. 9 No. 2(2001), pp. 197–205

Una Aplicación del Cálculo Matricial a un Problema de Ingeniería

An Application of Matrix Calculus to an Engineering Problem

P. R. Almeida Benítez
Dpto. de Matemáticas
Univ. de Las Palmas de Gran Canaria
Las Palmas de Gran Canaria. España.

I. Márquez Rodríguez
Departamento de Análisis Matemático
Univ. de La Laguna, La Laguna, Tenerife, España.

J. R. Franco Brañas
Departamento de Análisis Matemático
Univ. de La Laguna, La Laguna, Tenerife, España.

Resumen

En este artículo consideramos un ejemplo del mundo real que puede ser utilizado en los últimos cursos de la Escuela Secundaria. La generalización del problema (nivel universitario) nos lleva a algunos tópicos interesantes: ecuaciones en diferencias, diagonalización de matrices, potencia de una matriz, cadenas de Markov, etc...
Palabras y frases clave: Autovalores, diagonalización, ecuaciones en diferencias.

Abstract

In this paper we give a real world example that can be used in the last courses of the Secondary School. The generalization of the problem (university level) leads us to some interesting topics: difference equations, diagonalization of matrices, power of a matrix, Markov chains, etc...
Key words and phrases: Proper values, diagonalization, difference equations.

Recibido 2000/12/10. Aceptado 2001/09/17.
MSC (2000): Primary 15A18; Secondary 97D40.

1 Introducción

La Matemática Discreta es una rama de las Matemáticas que se ha desarrollado intensamente en los últimos años, básicamente por sus aplicaciones en computación y otras ciencias.

Desde el punto de vista de la Educación, la Matemática Discreta puede ayudar a obtener conocimientos básicos para resolución de problemas, reconocimiento de estructuras, generalizaciones, simulación matemática, etc. Por todo ello, la introducción a la Matemática Discreta pertenece al curriculum de la Escuela Secundaria (standard 12, grados 9-12).

En Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, (NCTM 1989, p. 176), el apartado "Discrete Mathematics" nos indica:

"En los grados 9-12, el curriculum de Matemáticas debe incluir tópicos de Matemática Discreta de modo que los estudiantes puedan:

- Representar situaciones usando estructuras discretas tales como grafos finitos, matrices, sucesiones y relaciones recurrentes;
- Representar y analizar grafos finitos usando matrices.
- Desarrollar y analizar algoritmos (...)"

"Además, los estudiantes podrán:

- Representar y resolver problemas usando programación lineal y ecuaciones en diferencias.
- Investigar situaciones problemáticas que puedan ser verificadas mediante computador y aplicación de algoritmos."

Desde el punto de vista de la educación, este estudio matemático debe perseguir los siguientes objetivos:

- "Promover la construcción de conexiones matemáticas.
- Proveer un escenario para resolver problemas aplicados al mundo real.
- Aprovechar para el mundo tecnológico.
- Fomentar el pensamiento crítico y el razonamiento matemático."

(Kenney, M.J. and Hirscht, C. R., 1991).

Como dijimos al comienzo, en este artículo presentamos un ejemplo que puede ser utilizado en los últimos cursos de la escuela secundaria. La generalización del problema (nivel universitario) nos lleva a algunos tópicos interesantes, tales como ecuaciones en diferencias, diagonalización de matrices, potencia de una matriz, cadenas de Markov, etc.

2 Rehabilitación de una estructura de hormigón

Consideremos la siguiente situación:

Una estructura de hormigón está deteriorada en un 25%, debido un proceso de corrosión. Se envuelve la estructura en una malla de titanio a la que se aplica un microvoltaje que invierte el proceso químico de corrosión, logrando que mensualmente se recupere el 40% de la zona deteriorada, aunque se sigue deteriorando mensualmente un 20% de la zona sana. ¿Cuál será la situación a los 3 meses?. ¿Y a los 10 meses?. ¿Y al cabo de mucho tiempo?

Si consideramos tantos por uno, al cabo de un mes se ha recuperado $0.25 \times 0.4 = 0.1$ de la zona deteriorada, pero la zona sana se ha reducido a $0.75 \times 0.8 = 0.6$. En total, la zona sana al cabo de un mes será: $0.1 + 0.6 = 0.7$. Si procedemos del mismo modo con la zona deteriorada, resulta: $0.25 \times 0.6 + 0.75 \times 0.2 = 0.15 + 0.15 = 0.3$. Podemos intentar resolver el problema construyendo una tabla:

Meses	Deteriorado	Sano
0	0.25	0.75
1	$0.25 \times 0.6 = 0.15$ $0.75 \times 0.2 = 0.15$ $0.15 + 0.15 = 0.3$	$0.25 \times 0.4 = 0.1$ $0.75 \times 0.8 = 0.6$ $0.1 + 0.6 = 0.7$
2	$0.3 \times 0.6 = 0.18$ $0.75 \times 0.2 = 0.14$ $0.18 + 0.14 = 0.32$	$0.3 \times 0.4 = 0.12$ $0.7 \times 0.8 = 0.56$ $0.12 + 0.56 = 0.68$
3	$0.32 \times 0.6 = 0.192$ $0.68 \times 0.2 = 0.136$ $0.192 + 0.136 = 0.328$	$0.32 \times 0.4 = 0.128$ $0.68 \times 0.8 = 0.544$ $0.128 + 0.544 = 0.672$

Vemos que al cabo de tres meses las partes deteriorada y sana de la estructura son 0.328 y 0.672. Pero este procedimiento es muy lento y prácticamente inviable para periodos de tiempo más largos. Es preciso utilizar otro método más práctico.

3 Diagonalización de una matriz

Vamos a recordar dos definiciones y tres interesantes teoremas.

Definition 1. El número λ_i es un autovalor de la matriz A si y sólo si

$$det(A - \lambda_i I) = 0$$

siendo I la matriz unidad. A cada valor de λ_i le corresponde un autovector v_i:

$$(A - \lambda_i I)\ v_i = 0.$$

Ejemplo.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$$

Para el cálculo del autovector v_1, correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$, resolvemos:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El primer autovector es cualquier múltiplo de

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Procediendo del mismo modo, obtenemos

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1. Si la matriz A, cuadrada de orden n, tiene n autovectores linealmente independientes, entonces la matriz $D = P^{-1}AP$ es diagonal, siendo las columnas de la matriz P los autovectores de A. Las entradas diagonales de D son precisamente los autovalores de A:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo.- Consideremos la matriz del ejemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = D$$

Teorema 2. Si los autovalores de A son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces los autovalores de A^k son $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$, y los autovectores de A son también autovectores de A^k. La matriz P, que diagonaliza A, también diagonaliza A^k:

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\ldots(P^{-1}AP) = D^k$$

ya que cada P^{-1} cancela una P.

Ejemplo.- Consideremos la matriz de los ejemplos anteriores

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces, tomando $k = 2$:

$$P^{-1}A^2P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ -14 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} = D^2$$

Teorema 3. Si A es diagonalizable, $A = PDP^{-1}$, entonces

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$$

Ejemplo.- Consideremos de nuevo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tomando $k = 2$:

$$PD^2P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ -14 & 22 \end{pmatrix} = A^2$$

4 Cálculos matriciales

Volvemos al problema anterior y generalizamos:

Sea d_k = tanto por uno deteriorado en el mes k.

Sea s_k = tanto por uno sano en el mes k.

La situación sugiere una ecuación en diferencias:

$$d_{k+1} = 0.6 \times d_k + 0.2 \times s_k$$

$$s_{k+1} = 0.4 \times d_k + 0.8 \times s_k$$

que matricialmente será:

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot v_k$$

donde

$$v_k = \begin{pmatrix} d_k \\ s_k \end{pmatrix}$$

Puesto que conocemos la condición inicial

$$v_0 = \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

tenemos que $v_1 = A \cdot v_0 \Rightarrow v_2 = A \cdot v_1 = A \cdot A \cdot v_0 = A^2 v_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow v_k = A^k v_0$. Por tanto, el problema queda reducido a:

$$\begin{pmatrix} d_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

es la llamada *matriz de transición* y cumple que la suma de los elementos de cada columna es igual a la unidad y son todos ellos no negativos.

Es preciso calcular A^k. Vamos a hallar sus autovalores:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1.4\,\lambda + 0.4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.4$$

Y sus autovectores:

$$\lambda_1 = 1 : \ (A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.4 & -0.2 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El primer autovector es cualquier múltiplo de:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$\lambda_1 = 0.4 : \ (A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El segundo autovector es cualquier múltiplo de:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizamos A:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$v_k = A^k v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix} =$$

$$= 1^k \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - (0.25)(0.4)^k \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $k = 3$ y $k = 10$:

Meses	Deteriorado	Sano
3	0.328	0.672
10	0.3333246	0.6666754

Según vemos en la fórmula anterior, la variación de v_k está gobernada por los factores λ_i^k y la estabilidad del proceso depende de los autovalores λ_i. Si todos los autovalores $|\lambda_i| < 1$, la ecuación en diferencias $v_{k+1} = A \cdot v_k$ es *estable*. Si $|\lambda_i| > 1$ para algún i, dicha ecuación es *inestable*. Si para algún i, $|\lambda_i| = 1$, se dice que la ecuación es *neutralmente estable*. En nuestro caso,

$\lambda_1^k = 1^k = 1$, y la variación de v_k depende únicamente de $\lambda_2^k = 0.4^k$, siendo *neutralmente estable*.

Cuando $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - (0.25)(0.4)^k \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

ya que 0.4^k tiende a cero, por ser $0.4 < 1$, y dicho límite coincide con el autovector

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$.

5 Comentarios

Como se puede apreciar, las partes deteriorada y sana se estabilizan en el tiempo, en $1/3$ y $2/3$ de la estructura, independientemente de la situación inicial de deterioro de dicha estructura. Hemos supuesto inicialmente un deterioro de un 25%, pero si hubiesemos considerado, por ejemplo, un deterioro inicial de un 40% o 60%, al cabo de mucho tiempo la situación de las partes deteriorada y sana de la estructura se estabilizarían igualmente en $1/3$ y $2/3$.

Por otra parte, el anterior problema es un ejemplo de los llamados *procesos de Markov*, ya que las entradas de la matriz de transición

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

son todas positivas, la suma de cada columna es igual a la unidad, $\lambda_1 = 1$ y el otro autovalor satisface $|\lambda_2| \leq 1$. La solución final coincide con el autovector

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$.

Referencias

[1] Barbolla, R., .Sanz, P. *Algebra Lineal y Teoría de Matrices*, Prentice Hall, Madrid, 1998.

[2] Díaz-Hernando, J. E. *Matrices, Diagonalización, Formas Canónicas*, Tebar Flores, Madrid, 1991.

[3] Hohn, F. E. *Elementary Matrix Algebra*, MacMillan Company, New York, 1964.

[4] Jennings, A., McKeown, J. J. *Matrix Computation*, Wiley & Sons, Chichester (UK), 1992.

[5] Strang, G. *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, San Diego (USA), 1988.