#A56 INTEGERS 9 (2009), 735-744

UNE FORME EFFECTIVE D'UN THÉORÈME DE BATEMAN SUR LA FONCTION PHI D'EULER

Abdallah Derbal
Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Vieux Kouba - Alger - Algérie, BP. 92
abderbal@yahoo.fr

Received: 4/26/09, Accepted: 10/13/09, Published: 12/23/09

Abstract

Let $\Phi(x)$ be the number of the integers n such that $\varphi(n) \leq x$, where φ denotes the Euler function. In this paper we give an explicit form of Bateman's theorem for the remainder term $\Phi(x) - Ax$ where $A = \zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6)$.

1. Introduction

L'étude du comportement asymptotique de la fonction $\Phi(x)$ permet de fournir une loi de répartition des valeurs de la fonction $\varphi(n)$. Il est bien connu que la fonction $\varphi(n)$ est de taille comparable à n et que le rapport $\frac{\varphi(n)}{n}$ possède une loi de répartition limite (1928 [8]). Cependant il est naturel de s'attendre que ce rapport se comporte de manière plus régulière en moyenne, autrement dit que la fonction $\Phi(x)$ soit asymptotiquement très proche d'une fonction linéaire de x. Ce problème fût abordé par Erdös et Turán en 1945. Ils ont montré ([5]) que $\Phi(x) \sim Ax$ $(x \to +\infty)$ pour une convenable constante positive A. Un argument abélien appliqué à la série de Dirichlet

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\varphi(n))^s} = \zeta(s)\, G(s) \quad (\Re(s) = \sigma > 1) \\ & \qquad \textit{où } G(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right) \quad (\Re(s) > 0) \\ \textit{et } \zeta(s) &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (\Re(s) > 1) \\ & \qquad (\textit{ici et dans la suite } p \textit{ désigne un nombre premier}) \end{aligned}$$

fournit alors la valeur $A = G(1) = \zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6) = 1.943596436\cdots$. En 1972, Bateman ([3]) a entrepris l'étude du reste résiduel $R(x) = \Phi(x) - Ax$. Il établit la majoration

$$G(\sigma + it) = O\left(\exp\left\{50\,|t|^{1-\sigma} \ln\ln|t|\right\}\right) \ \textit{pour } 1/3 \leq \sigma \leq 1 \ \textit{et } \ |t| \geq 8$$

et en déduit, à l'aide de la formule de Perron, l'estimation

$$R(x) = O\left(x \exp\left\{-c\sqrt{(\ln x)(\ln\ln x)}\right\}\right) \text{ pour tout } c < \sqrt{2}/2. \tag{1}$$

En 1990, Balazard et Smati [1] ont montré que l'on pouvait obtenir l'estimation de Bateman en employant une méthode élémentaire c'est à dire ne faisant pas intervenir la variable complexe. Cette méthode repose sur la décomposition canonique $n = ab$ où les facteurs de a sont tous $\leq y$ alors que ceux de b sont $> y$. En 1992, Smati [9] a exploré les possibilités offertes par cette méthode élémentaire et obtenait la première estimation effective de $R(x)$: pour $x \geq 3$

$$\begin{aligned}|R(x)| &\leq 1.4x(\ln x)(\ln\ln x)\\ &\quad\times \exp\left\{-\left(1 - \tfrac{\ln(\ln(\ln x)) + 4 - \ln 2}{\ln\ln x}\right)\sqrt{(1/2)(\ln x)(\ln\ln x)}\right\}.\end{aligned}$$

En 1998, Balazard et Tenenbaum ([2]) ont amélioré l'estimation (1) en démontrant que

$$R(x) = O\left(x \exp\left\{-c\left((\ln x)^{3/5}\right)/(\ln\ln x)^{1/5}\right\}\right) \text{ pour une constante } c > 0.$$

La méthode de Balazard-Tenenbaum est analytique, elle repose fondamentalement sur une amélioration de la majoration de Bateman de la fonction $G(s) := O(H(s))$ où $H(s) := \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}$. Cette majoration fait usage d'un théorème de Karastuba ([6]) sur l'estimation des sommes trigonométriques pour estimer la contribution des nombres premiers translatés $\sum \frac{1}{(p-1)^s}$ et la région sans zéros de la fonction zêta de Riemann de Vinogradov-Korobov. Il est intéressant d'expliciter les deux constantes du théorème de Balazard-tenenbaum dans le cas où on peut surmonter les difficultés liées à l'estimation des sommes d'exponentielles du type $\sum_{M<n\leq N}\left(\frac{kn-1}{jn-1}\right)^{i\tau}$ pour certaines valeurs relatives k, j, N et τ.

Le but de notre article est d'étudier l'effectivité de la méthode analytique de Bateman. Nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème *Pour* $x \geq 240$, *on a*

$$|R(x)| < 58.61x \exp\left(-\left(\sqrt{2}/8\right)\sqrt{(\ln x)(\ln\ln x)}\right).$$

Nous partons de la formule [2, p. 242] valable pour tout $b > 1$

$$\int_1^x \Phi(u)\,du = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to+\infty}\int_{b-iT}^{b+iT} x^{1+s}\zeta(s)\,G(s)\,\frac{ds}{s(s+1)}. \tag{2}$$

En vertu du fait que

$$H(s) := x^{1+s}\frac{\zeta(s)\,G(s)}{s\,(s+1)} = O\left(\frac{1}{|t|^{(1-\theta)/2}}\right) \text{ ([3])}$$

dans le domaine

$$D_{T_0,\theta} = \left\{\sigma(t) = 1 - \theta\frac{\ln(\ln|t|)}{\ln|t|} \leq \sigma \leq b \;\; et \;\; |t| \geq T_0\right\} \qquad (T_0 \geq 8 \;\; et \;\; 0 < \theta < 1),$$

on déplace la ligne d'intégration de (2) au contour

$$C_{T_0,\theta} = \left\{1 - \theta\frac{\ln(\ln\max(|t|, T_0))}{\ln\max(|t|, T_0)} + it\right\}, \; (T_0 \geq 8 \;\; et \;\; 0 < \theta < 1).$$

Le théorème des résidus nous donne alors

$$\begin{aligned}
&\int_1^x \Phi(u)\,du - \frac{Ax^2}{2} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-T_0}^{T_0} H(\sigma_0 + it)\,dt - \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to+\infty}\int_{T_0}^{T} H(\sigma(t) + it)(\sigma'(t) + i)\,dt \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to+\infty}\int_{T_0}^{T} H(\sigma(t) - it)(\sigma'(t) - i)\,dt \quad \left(\sigma_0 = 1 - \theta\frac{\ln(\ln T_0)}{\ln T_0}\right)
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\left|\int_1^x \Phi(u)\,du - \frac{Ax^2}{2}\right| \\
&\quad \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-T_0}^{T_0} H(\sigma_0 + it)\,dt\right| + \frac{\sqrt{1 + (\sigma'(T_0))^2}}{\pi}\int_{T_0}^{+\infty} |H(\sigma(t) + it)|\,dt.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ensuite nous évaluons explicitement chacune des deux intégrales de (3) et nous obtenons le résultat suivant.

Proposition *Pour $x \geq 100$, $|t| \geq T_0 \geq 268$ et $0 < \theta < 1$, il existe une constante $\mu = \mu(T_0, \theta, b) > 0$ effectivement calculable telle que*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_1^x \Phi(u)\,du - \frac{Ax^2}{2}\right| \leq \mu x^2 \Delta(x, \theta) \\
&\qquad\qquad où \;\; \Delta(x, \theta) = \exp\left\{-\theta\sqrt{2(\ln x)(\ln(\ln x))}\right\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Enfin nous utitlisons la croissance de $\Phi(u)$ pour déduire de (4) l'estimation annoncée en prenant $T_0 = 10^4$, $\theta = 1/4$ et $b = 10$.

2. Lemmes Préparatifs

Le Lemme 1 est fondamental pour établir le résultat annoncé. D'après [3, page 343]

$$\inf_{t\geq 100}\left(\ln x\frac{\ln\ln t}{\ln t}+\ln t\right)\geq\sqrt{2\left(\ln x\right)\left(\ln\ln x\right)}\ \textit{pour}\ x\geq\exp\left(10^4\right).$$

On améliore ce résultat et on obtient des majorations fines de la fonction x^{1+s} sur les chemins d'intégration de (3).

Lemme 1 Pour $t\geq 20$ *et* $x\geq 100$, *on a*

$$\frac{\ln\left(\ln t\right)}{\ln t}\ln x+\ln t>\sqrt{2\left(\ln x\right)\left(\ln\left(\ln x\right)\right)}.$$

Démonstration. On pose $f_x(t)=\left(\left(\ln\left(\ln t\right)\right)/\ln t\right)\ln x+\ln t$, la fonction $f_x(t)$ atteint son minimum en $t=t(x)$ qui vérifie $\ln x=\left(\ln^2 t\right)/\left(\ln(\ln t)-1\right)$ et en lequel, on a

$$\frac{f_x(t)}{\sqrt{2\left(\ln x\right)\left(\ln\left(\ln x\right)\right)}}=\frac{1+\frac{\ln(\ln t)}{\ln(\ln t)-1}}{2\sqrt{\frac{\ln(\ln t)}{\ln(\ln t)-1}}\times\left(1-\frac{\ln(\ln(\ln t)-1)}{\ln(\ln t)}\right)}>1\ \textit{pour}\ t\geq 1700.$$

Pour $20\leq t\leq 1700$, on vérifie l'inégalité par calcul direct sur ordinateur. □

Lemme 2. Soit $\sigma(t)=1-\theta\frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$ *avec* $|t|\geq T_0\geq 20$ *et* $0<\theta<1$. *Pour* $x\geq 100$, *on a*

$$x^{1+\sigma(t)+it}\leq x^2\left(\Delta\left(x,\theta\right)\right)|t|^{\theta}.$$

Démonstration. On écrit

$$\left|x^{1+\sigma(t)+it}\right|=x^2e^{-(\ln x)\left(\theta\frac{\ln(\ln|t|)}{\ln|t|}\right)}=x^2e^{-\theta\left(\ln x\frac{\ln(\ln|t|)}{\ln|t|}+\ln|t|\right)}|t|^{\theta}$$

et on applique le Lemme 1. □

Lemme 3. *Il existe des constantes positives* C_1, C_2, C_3, C_4 *et* C_5 *dépendantes de* T_0, θ *et* b *telles que l'on ait, pour* $|t|\geq T_0\geq 268$

$$\begin{aligned}
|\zeta(\sigma\left(t\right)+it)| &\leq C_1\left(\ln|t|\right)^{1+\theta},\\
|G(\sigma\left(t\right)+it)| &\leq C_2\exp\left\{\left(\frac{2T_0}{T_0-1}\ln\left(\ln|t|\right)-C_3\right)\left(\ln|t|\right)^{\theta}\right\},\\
|\zeta(\sigma\pm iT_0)| &\leq C_4\\
|G(\sigma\pm iT_0)| &\leq C_5\ \left(\sigma_0\leq\sigma\leq b\right),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1+\frac{1}{\ln(T_0-1)}\left(\gamma+\frac{1}{(T_0-1)}+\frac{1}{T_0}+\frac{\sqrt{1+T_0^2}}{2\sigma_0(T_0-1)}\right)\\
&\quad (\gamma = 0.577215663 \text{ est la constante d'Euler}),\\
C_2 &= \exp\left(\sum_{p\le T_0}\ln\left(1+\frac{1}{(p-1)^{\sigma_0}}+\frac{1}{p^{\sigma_0}}\right)+\frac{2.2111}{\sigma_0}\left(\frac{T_0}{T_0-1}\right)^2\frac{\sqrt{1+T_0^2}}{T_0(\ln T_0)^{1-\theta}}\right),\\
C_3 &= \frac{2T_0}{T_0-1}\left(\sum_{p\le T_0}\frac{1}{p}-0.262-\frac{1}{2\ln^2 T_0}\right),\\
C_4 &= \sum_{n=1}^{T_0}\frac{1}{n^{\sigma_0}}+\frac{3}{2T_0^{\sigma_0}}+\sqrt{T_0^2+b^2}\times\frac{1}{2\sigma_0 T_0^{\sigma_0}},\\
C_5 &= \exp\left(\sum_{p\le T_0}\ln\left(1+\frac{1}{(p-1)^{\sigma_0}}+\frac{1}{p^{\sigma_0}}\right)+\frac{2.2111}{\sigma_0}\left(\frac{T_0}{T_0-1}\right)^2\frac{\sqrt{b^2+T_0^2}}{T_0(\ln T_0)^{1-\theta}}\right).
\end{aligned}$$

Pour $t\in\mathbb{R}$, *on a*

$$|\zeta(b+it)|\le\zeta(b) \;\; et \;\; |G(b+it)|\le|v(b)|=\prod_p\left(1+(p-1)^{-b}+p^{-b}\right).$$

Démonstration. Pour majorer la fonction $\zeta(s)$, on utilise la formule habituelle

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(s-1)N^{s-1}}-\frac{1}{N^s}-s\int_N^{+\infty}\frac{u-E(u)-1/2}{u^{1+s}}du \tag{5}$$

où $N\ge1$ et $E(u)$ est la partie entière de u, $(|u-E(u)-1/2|\le1/2)$. Il en vient

$$|\zeta(s)|=N^{\theta\frac{\ln\ln|t|}{\ln|t|}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\frac{N^{\theta\frac{\ln\ln|t|}{\ln|t|}}}{|t|}+\frac{N^{\theta\frac{\ln\ln|t|}{\ln|t|}}}{2N}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{2}\frac{N^{\theta\frac{\ln\ln|t|}{\ln|t|}}}{N\sigma(t)}. \tag{6}$$

Pour obtenir C_1, on pose $N=E(t)$ dans (6), on utilise la formule

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}<\ln N+\gamma+\frac{1}{2N} \;\; ([10, p.\ 6],)$$

et les inégalités

$$N\le|t|,\;\; N^{\theta\frac{\ln\ln|t|}{\ln|t|}}\le|t|^{\theta\frac{\ln\ln|t|}{\ln|t|}}=(\ln|t|)^{\theta} \;\; et \;\; N>|t|-1\ge T_0-1.$$

Pour obtenir C_4, on pose $N=T_0$ dans (5).

Pour majorer la fonction $G(s)$, on écrit $|G(\sigma(t)+it)| \leq \exp(S_1 + S_2(t) + S_3(t))$ où

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{p\leq T_0} \ln\left(1+\frac{1}{(p-1)^{\sigma_0}}+\frac{1}{p^{\sigma_0}}\right),\\
S_2(t) &= \sum_{T_0<p\leq |t|}\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|,\\
S_3(t) &= \sum_{p>|t|}\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|.
\end{aligned}$$

La somme S_1, on la calcule directement par ordinateur pour des valeurs effectives de T_0.

Pour majorer la somme $S_2(t)$, on utilise l'inégalité

$$\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right| \leq \frac{2}{(p-1)^{\sigma(t)}} = 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\sigma(t)}\frac{1}{p^{\sigma(t)}} < \frac{2p}{p-1}\frac{1}{p^{\sigma(t)}}$$

qui implique

$$\begin{aligned}
S_2(t) \leq \frac{2T_0}{T_0-1}\sum_{T_0<p\leq|t|}\frac{1}{p^{\sigma(t)}} &= \frac{2T_0}{T_0-1}\,|t|^{\theta\frac{\ln\ln|t|}{\ln|t|}}\sum_{T_0<p\leq|t|}\frac{1}{p}\\
&= \frac{2T_0}{T_0-1}\,(\ln|t|)^{\theta}\sum_{T_0<p\leq|t|}\frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Alors, l'inégalité

$$\sum_{p\leq|t|}\frac{1}{p} < \ln\ln|t| + 0.262 + \frac{1}{\ln^2|t|} \quad \text{([7] \textit{pages} 70 \textit{et} 64)}$$

nous permet d'obtenir

$$S_2(t) \leq \frac{2T_0}{T_0-1}\,(\ln|t|)^{\theta}\ln\ln|t| - C_3\,(\ln|t|)^{\theta}.$$

Pour évaluer $S_3(t)$, on utilise l'inégalité

$$\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right| \leq \frac{|s|}{(p-1)^{\sigma(t)+1}} < \sqrt{1+t^2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^2\frac{1}{p^{\sigma(t)+1}}$$

qui donne

$$S_3(t) \leq \sqrt{1+t^2}\left(\frac{|t|}{|t|-1}\right)^2\sum_{p>|t|}\frac{1}{p^{\sigma(t)+1}}.$$

La formule sommatoire d'Abel ([4] page 11) implique

$$\begin{aligned}\sum_{p>|t|}\frac{1}{p^{\sigma(t)+1}} &< (\sigma(t)+1)\int_{|t|}^{+\infty}\frac{\pi(u)}{u^{2+\sigma(t)}}du \\ &< 2\int_{|t|}^{+\infty}\frac{\pi(u)}{u^{2+\sigma(t)}}du \ \textit{où}\ \pi(u)=\sum_{p\le u}1.\end{aligned}$$

Alors, l'inégalité

$$\pi(u)<\frac{1.10555u}{\ln u}\ \text{pour}\ u\ge 30\ \ ([10]\ \text{page 11})$$

nous donne

$$\sum_{p>|t|}\frac{1}{p^{\sigma(t)+1}}<\frac{2.2111}{\sigma(t)|t|(\ln|t|)^{1-\theta}}<\frac{2.2111}{\sigma_0 T_0(\ln T_0)^{1-\theta}}$$

par suite

$$\exp(S_1+S_3(t))<C_2.$$

Pour majorer $G(\sigma\pm iT_0)$, on écrit $G(\sigma\pm iT_0)\le\exp(S_1+S_4)$ où

$$S_4=\sum_{p>T_0}\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|$$

qu'on la majore de la même façon que $S_3(t)$ en remplaçant $\sqrt{1+t^2}$ par $\sqrt{b^2+t^2}$ car $\sigma_0\le\sigma\le b$. □

Lemme 4 *Pour $x\ge 100$ et $|t|\ge T_0\ge 268$, on a*

$$\begin{aligned}\left|\int_{-T_0}^{T_0}H(\sigma_0+it)dt\right| &\le C_6T_0^{\theta}x^2\Delta(x,\theta) \\ \textit{et}\quad |H(\sigma(t)+it)| &\le \frac{C_1C_2\exp\{g(t,\theta)\}}{|t|^{2-\theta}}x^2\Delta(x,\theta)\end{aligned}$$

où $C_6=\pi A+\frac{2C_4C_5(b-\sigma_0)}{T_0^2}+\zeta(b)v(b)\int_{-T_0}^{T_0}\left(\left(t^2+b^2\right)\left(t^2+(b+1)^2\right)\right)^{-1/2}dt$ *et* $g(t,\theta)=\frac{2T_0}{T_0-1}(\ln|t|)^{\theta}\ln\ln|t|+(1+\theta)\ln\ln|t|-C_3(\ln|t|)^{\theta}$.

Démonstration. On a

$$\left|\int_{-T_0}^{T_0}H(\sigma_0+it)dt\right|=x^2x^{-\theta\frac{\ln(\ln T_0)}{\ln T_0}}\left|\int_{-T_0}^{T_0}x^{it}K(s)\,dt\right|\ \textit{où}\ K(s)=\frac{\zeta(s)G(s)}{s(s+1)}.$$

On a

$$x^2 x^{-\theta\frac{\ln(\ln T_0)}{\ln T_0}} = x^2 \exp\left(-\theta\left(\frac{\ln(\ln T_0)}{\ln T_0}\ln x + \ln T_0\right) + \theta \ln T_0\right).$$

D'après le Lemme 1,

$$-\theta\left(\frac{\ln(\ln T_0)}{\ln T_0}\ln x + \ln T_0\right) < -\theta\sqrt{2(\ln x)(\ln(\ln x))}$$

par suite

$$x^2 x^{-\theta\frac{\ln(\ln T_0)}{\ln T_0}} < T_0^{\theta} x^2 \Delta(x,\theta).$$

Sachant que le résidu de $x^{it}K(s)$ en $s=1$ vaut $\frac{A}{2}$, on écrit

$$\begin{aligned}\int_{-T_0}^{T_0} x^{it} K(s)\,dt &= -\int_{\sigma_0}^{b} x^{iT_0} K(\sigma + iT_0)\,d\sigma + i\int_{-T_0}^{T_0} x^{it} K(b+it)\,dt \\ &\quad + \int_{\sigma_0}^{b} x^{iT_0} K(\sigma - iT_0)\,d\sigma + i\pi A.\end{aligned}$$

Il en vient

$$\begin{aligned}\left|\int_{-T_0}^{T_0} x^{it} K(s)\,dt\right| &\leq \pi A + \int_{\sigma_0}^{b} |K(\sigma + iT_0)|\,d\sigma + \int_{\sigma_0}^{b} |K(\sigma - iT_0)|\,d\sigma \\ &\quad + \int_{-T_0}^{T_0} |K(b+it)|\,dt.\end{aligned}$$

Ensuite on applique le Lemme 3.

La majoration de $|H(\sigma(t)+it)|$ s'obtient par application directe des Lemmes 2 et 3. □

Démonstration de la proposition C'est une application directe de la formule (3) et le Lemme 4. La constante μ est donnée par

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\left(C_6 T_0^{\theta} + 2C_1C_2\sqrt{1+\left(\theta\frac{(\ln(\ln T_0))-1}{T_0\ln^2 T_0}\right)^2}\int_{T_0}^{+\infty}\frac{\exp\{g(t,\theta)\}}{|t|^{2-\theta}}dt\right).$$ □

3. Démonstration du Théorème.

On pose $\delta(x,\theta) = \sqrt{\Delta(x,\theta)}$ et $h = h(x) = x\delta(x,\theta)$. La fonction $x - h(x)$ est strictement croissante. Soit $x_0 \geq 100$ tel que $x_0 - h(x_0) \geq 100$. On a alors $x \geq$

$x_0 \Longrightarrow x \geq x - h(x) \geq x_0 - h(x_0) \geq 100$. D'autre part la croissance de la fonction $\Phi(u)$ implique

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \Phi(u)\,du \leq \Phi(x) \leq \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} \Phi(u)\,du.$$

Alors l'inégalité (4) nous donne

$$|\Phi(x) - Ax| \leq \lambda x^2 \delta(x,\theta) \;\; où \;\lambda = \frac{A}{2} + \mu\left(1 + (1+\delta(x_0,\theta))^2\right).$$

Pour $T_0 = 10^4$, $\theta = 1/4$ et $b = 10$ (les constantes sont arrondies par éxcès à la douzième décimale)

$$C_1 = 1.120467544453,\; C_2 = e^{6.213768612451},\; C_3 = 4.698616556123,$$

$$C_4 = 13.813276339151,\; C_5 = e^{6.213768832789},\; C_6 = 6.707060532416,$$

$$\zeta(b) = \zeta(10) = 1.000994575128,\; v(b) = v(10) = 2.002966683712$$

$$\textstyle\int_{10^4}^{+\infty} \exp(g(t,1/4))\left(|t|^{-2+\frac{1}{4}}\right) dt = 0.032366391608,$$

$$\mu = 16.441607242965,\; x_0 = 240,$$

$$\delta(x,1/4) = \exp\left(-\sqrt{2}/8\sqrt{(\ln x)(\ln\ln x)}\right),\; \lambda = 58.607657155557.$$

Les calculs sont conduits par Maple et Fortran. □

Reconnaissance Je remercie, pour son accueil, le département DMI de l'institut XLIM de l'université de Limoges où j'ai effectué une partie de mes recherches.

J'ai apprécié les critiques constructives du referee, je l'en remercie.

Bibliographie

[1] Balazard, M. and Smati, H., Elementary proof of a theorem of Bateman, in: B. Berndt, H. Diamond, H. Halberstam and A. Hildebrand (eds.) Analytic Number Theory (Urbana, 1998), Prog. Math. **85**, 41-46 (Birkhäuser).

[2] M. Balazard et G. Tenenbaum, Sur la Répartition des Valeurs de la Fonction d'Euler, Compositio Mathematica **110** (1998), 239 − 250.

[3] P. Bateman, The Distribution of Values of the Euler Function, Acta Arith. **21** (1972) , 329 − 345.

[4] W. J. Ellison et M. Mendès-France, "Les Nombres Premiers," Hermann Paris, 1975, Actualités scientifiques et industrielles n°1366.

[5] P. Erdös, Some Remarks on Euler's φ function and some other related problems, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945) , 540 − 544.

[6] Karatsuba, A.A., Estimates for trigonometric sums by Vinogradov's method and some applications, Proc. Steklov Inst. Math. **112** (1971), 251-265.

[7] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers, Illinois J.. Math. **6** (1962), 64-94.

[8] Schoenberg, I.J., Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1, Math. Z. **28** (1928), 171-200.

[9] A. Smati, Evaluation effective du nombre d'entiers n tels que $\varphi(n) \leq x$, Acta Arith. **61** (1992), 143-159.

[10] G. Tenenbaum, Introduction à la Théorie Analytique et Probabiliste des nombres, Unité associée au CNRS URA 750 Analyse Globale.