$$(y-\beta) = \sqrt{\lambda^2-(x-\alpha)^2}$$

La courbe cherchée est donc un cercle :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \lambda^2$$

Nous avons trois conditions pour déterminer les trois constantes :

La courbe passe par le point $+a$ et $-a$. On en déduit : $\alpha = 0$. et :

$$\beta^2 = \lambda^2 - a^2$$

Considérons maintenant l'équation de condition. On a :

$$y' = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}$$

$$1+y'^2 = \frac{\lambda^2}{(y-\beta)^2}$$

L'équation devient donc :

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\lambda\, dx}{y-\beta} = \int_{-a}^{+a} \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{\lambda^2-x^2}} = 2\,l$$

$$2\lambda \operatorname{arc\,sin} \frac{a}{\lambda} = 2\,l$$

Cette équation transcendante achève de déterminer le problème.

33e Leçon.

Calcul des probabilités.

Le but du calcul des probabilités est de déterminer la chance des évènements incertains.

Soit une urne avec n numéros. Il y a des chances égales pour tous les numéros de sortir de l'urne. Si m numéros sont égaux, comme les chances de chacun d'eux sont toujours les mêmes, les chances que un numéro ayant cette valeur sorte sont multipliées par m. Il y aura $\frac{m}{n}$ chances pour que ce fait se produise.

Si on prend une urne avec $2n$ numéros, dont deux portent le même chiffre on admet comme axiome que les chances pour ce chiffre de sortir sont les mêmes que dans le 1^r cas. D'une façon générale, soient n évènements également possibles, dont m soient favorables, la probabilité pour qu'un évènement favorable se produise sera $\frac{m}{n}$, rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles.

Soient deux séries A et A_1 d'urnes, les premières en nombre n et contenant m boules dont m' blanches, les deuxièmes en nombre n_1 contenant m_1 boules dont m'_1 blanches. Je prends une de ces urnes au hasard et je tire une boule. Quelle est la probabilité pour que ce soit une boule blanche ?

Pour appliquer les principes précédents il faut que les évènements possibles soient tous également possibles. Or ici le nombre des boules d'une urne A est différent du nombre des boules d'une urne A_1 nous ne sommes donc pas dans le cas voulu.

Mais, si nous multiplions par m_1 le nombre des boules des urnes A par m celui des urnes A_1, la probabilité pour que ayant pris une urne A, on tire une boule blanche n'est pas changée, de même pour A_1, mais le nombre des boules d'une urne A est maintenant égal au nombre des boules d'une urne A_1. Nous avons donc à comparer des évènements qui, maintenant sont tous également possibles.

Par suite, la probabilité cherchée sera par définition :

$$P = \frac{m'nm_1 + m'_1 m n_1}{(n+n_1)\, m m_1}$$

On voit que $P = \frac{m'n m_1}{(n+n_1)m m_1} + \frac{m'_1 m n_1}{m m_1 (n+n_1)}$

On voit que le premier terme est la probabilité pour qu'on tire une boule blanche d'une urne A, le 2^e pour qu'on en tire une d'une urne A_1.

On en déduit que la probabilité totale est la somme des probabilités partielles, relatives à des causes s'excluant l'une l'autre.

Une cause est un fait qui précède l'évènement considéré et le rend possible.

D'autre part, la probabilité pour que l'évènement se produise et, de plus, soit produit par la cause A est ici :

$\frac{m'nm_1}{(n+n_1)mm_1} = \frac{m'}{m} \cdot \frac{n}{n+n_1}$ elle est donc égale à la probabilité

<u>pour que A se produise multipliée par la probabilité pour que A ayant lieu, l'évènement considéré en résulte.</u> C'est le <u>principe de la probabilité composée.</u>

Calculons la probabilité totale dans le cas où nous avons des causes ne s'excluant pas les unes les autres. Soient ρ, ν, π, etc ...... ces causes.

Soit P_ρ la probabilité pour que ρ ayant lieu, l'évènement E en résulte! — On a de même P_ν, ... etc. Soit $P_{\rho\nu}$ la probabilité pour que E se produise ρ, ν, ayant lieu à la fois. On a aussi : $P_{\rho\pi}$, $P_{\pi\nu}$, etc ..... On aura de même $P_{\rho\nu\pi}$ ...... $P_{\rho\nu\pi\varrho}$ etc ..... Cherchons la probabilité totale. Soit N le nombre total des combinaisons possibles. Comptons le nombre total de combinaisons favorables à l'évènement. — La cause ρ en donne $N p_\rho$. L'ensemble des causes en donne donc : $\Sigma N p_\rho$.

Si l'évènement peut arriver sous l'influence de 2 causes, nous l'avons compté 2 fois. Il faut donc de ce nombre retrancher le nombre $\Sigma N p_{\rho\nu}$.

Si l'évènement peut être produit par trois causes, nous l'avons compté trois fois, puis nous l'avons retranché trois fois. Nous ne l'avons donc pas compté.

Il faut au nombre précédent ajouter

$$\Sigma N p_{\rho\nu\varrho}$$

Le nombre total sera donc :

$$\Sigma N p_\rho - \Sigma N p_{\rho\nu} + \Sigma N p_{\rho\nu\varrho} \text{---------}$$

et la probabilité sera :

$$\Sigma p_\rho - \Sigma p_{\rho\nu} + \Sigma p_{\rho\nu\varrho} \text{--------}$$

Il faut démontrer ce résultat rigoureusement. Pour cela, établissons que l'évènement qui peut être produit par m causes a été compté une fois et une fois seulement. Reprenons le nombre :

$$\Sigma N p_\rho - \Sigma N p_{\rho\nu} + \Sigma N p_{\rho\nu\varrho} \text{-------}$$

Nous avons compté l'évènement un nombre de fois égal à :

$$m - \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdots\cdots\cdots$$
$$= 1 - (1-1)^m = 1.$$

Problème. – Soit n causes, dont les probabilités sont.

$$q_1\ q_2 \cdots\cdots q_n$$

Ces causes donnent à un évènement les probabilités respec-tivement égales à

$$p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$$

L'évènement a lieu. Quelle est la probabilité pour que cet évènement soit produit par la première cause ?

L'évènement ayant lieu, on n'a à tenir compte que des cas favorables. La probabilité cherchée sera le rapport du nombre total des cas favorables.

Ce nombre total est :

$$N(p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots\cdots + p_n q_n)$$

Si N est le nombre total des cas possibles. Le nombre des cas favorables produits par la première cause est $N p_1 q_1$.

La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{p_1 q_1}{\Sigma p q}.$$

Problème. – Soient des causes dont les probabilités sont.

$$q_1 \quad q_2 \cdots\cdots q_n.$$

et deux évènements qui peuvent être produits par ces causes : l'évènement E avec les probabilités :

$$p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$$

et l'évènement E' avec les probabilités

$$p'_1\ p'_2 \cdots\cdots p'_n$$

L'évènement E a lieu. Quelle est la probabilité pour que l'évènement E' ait lieu en même temps ?

Cette probabilité, d'après le théorème des probabilités composées, est la somme des probabilités dues à chaque cause. Or chacune de ces probabilités est le produit de deux probabilités : propabilité pour que l'évènement E qui a lieu, soit le résultat de la cause considérée ; probabilité pour que l'évènement E' ait lieu, sous l'influence de cette cause.

La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{p_1 q_1}{\Sigma p q} p'_1 + \frac{p_2 q_2}{\Sigma p q} p'_2 + \dots\dots\dots$$

Problème des épreuves répétées. — Soient deux évènements contradictoires dont les probabilités sont respectivement p et q. On a :

$$p + q = 1.$$

Supposons que l'on fasse m épreuves. Quelle est la probabilité pour que l'évènement E' (dont la probabilité est q) arrive α fois, et l'évènement E $(m-\alpha)$ fois ? —

Supposons que nous nous donnions l'ordre dans lequel nous voulons que se produisent ces divers évènements. Supposons que nous voulions que le premier évènement soit E' il y a pour cela une probabilité q ; il y aura une probabilité qp pour que après E' on ait E. Si nous nous donnons l'ordre E' E E' E' E E' .... la probabilité sera : $q\,p\,q\,q\,p\,q \dots$ $\dots = p^{m-\alpha} q^{\alpha}$.

Mais nous nous proposons seulement de calculer la probabilité pour qu'il y ait α évènements E', et $(m-\alpha)$ évènements E quelque soit l'ordre. Or il y a $\frac{m!}{\alpha!\,\overline{m-\alpha}!}$ permutations différentes des quantités $q\,p\,q$.

Par conséquent la probabilité que nous cherchons sera égale à la probabilité $p^{m-\alpha} q^{\alpha}$ d'une permutation, multipliée par le nombre de ces permutations. On aura donc

$$T_\alpha = \frac{m!}{\alpha!\,\overline{m-\alpha}!} p^{m-\alpha} q^{\alpha}$$

Cette probabilité est le terme d'ordre α du développement de $(p+q)^m$.

Ceci se généralise. Si l'on a trois évènements contradictoires, dont les probabilités sont respectivement égales à p. q. r la probabilité pour que, sur m épreuves, l'un sorte α fois, le second β fois, et le troisième $(m-\alpha-\beta)$ fois, sera :

$$\frac{1.2\ldots\ldots m}{\alpha!\,\beta!\,\overline{m-\alpha-\beta}!}\,p^{m-\alpha-\beta}q^{\alpha}r^{\beta}$$

Revenons au premier cas. Cherchons à déterminer α de façon que la probabilité considérée soit maximum. On a :

$$T_\alpha = \frac{m!}{m!\,\overline{m-\alpha}!}\,p^{m-\alpha}q^{\alpha}$$

$$T_{\alpha-1} = \frac{1.2\ldots\ldots m}{\overline{m-\alpha+1}!}\,p^{m-\alpha+1}q^{\alpha-1}$$

et :

$$\frac{T_\alpha}{T_{\alpha-1}} = \frac{m-\alpha+1}{\alpha}\,\frac{q}{p}$$

Ce rapport sera plus grand que 1. si on a :

$$(m-\alpha+1)\,q-\alpha(1-q) > 0$$

$$\alpha < mq+q$$

De même la condition $\frac{T_\alpha}{T_{\alpha+1}} > 1$ donnera

$$\alpha > mq+q-1 .$$ On a donc : $\alpha = mq+\tau$

τ étant plus petit que 1, puisque α sera un nombre entier compris entre $mq+q$ et $mq+q-1$. Pour cette valeur de α la probabilité est maximum.

34^e Leçon.

Nous avons trouvé la probabilité $T_\alpha = \dfrac{m!}{(m-\alpha)!\,\alpha!} p^{m-\alpha} q^\alpha$ pour que sur m épreuves il se produise α fois l'événement A dont la probabilité est q, $m-\alpha$ fois l'événement B dont la probabilité est p, quand on a : $p+q=1$.

La valeur de α pour laquelle T_α est maximum est $n = mq + r$.

On a $m - n = mp - r$. On voit que si m devient très grand le rapport $\dfrac{n}{m-n} = \dfrac{q}{p}$.

Cherchons d'une façon générale la valeur approchée de $T_{n+\lambda}$. λ croissant au delà de toute limite, ainsi que m, mais en restant d'ordre inférieur à celui de $m^{\frac{2}{3}}$.

On a :

$$(1) \qquad T_{n+\lambda} = \frac{m!}{(n+\lambda)!\,(m-n-\lambda)!} p^{m-n-\lambda} q^{n+\lambda}$$

on a aussi : $m! = \Gamma(m+1)$

$$(n+\lambda)! = \Gamma(n+\lambda+1)$$

$$(m-n-\lambda)! = \Gamma(m-n-\lambda+1)$$

Prenons les logarithmes dans l'expression (1)

$$(2) \quad \log T_{n+\lambda} = \log\Gamma(m+1) - \log\Gamma(n+\lambda+1) - \log\Gamma(m-n-\lambda+1) + (m-n-\lambda)\log p + (mq+r+\lambda)\log q.$$

Remplaçons $\log\Gamma(m+1)$, $\log\Gamma(n+\lambda+1)$, $\log\Gamma(m-n-\lambda+1)$ par leurs valeurs approchées — on en tire en remarquant que

$$m - n - \lambda = mp - r - \lambda$$

et

$$n + \lambda = mq + r + \lambda.$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \log T_{n+\lambda} = {} & (m+\tfrac{1}{2})\log m - m + \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\ & - (mq+r+\lambda+\tfrac{1}{2})\log(mq+r+\lambda) + mq+r+\lambda - \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\ & - (mp-r-\lambda+\tfrac{1}{2})\log(mp-r-\lambda) + mp-r-\lambda - \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\ & + (mp-r-\lambda)\log p + (mq+r+\lambda)\log q. \end{aligned}$$

Or : $\log(mq+r+\lambda) = \log m + \log q + \log\left(1+\dfrac{r+\lambda}{mq}\right)$

$\log(mp-r-\lambda) = \log m + \log p + \log\left(1-\dfrac{r+\lambda}{mp}\right)$.

Développons il vient :

$$\log(mq+r+\lambda) = \log m + \log q + \frac{r+\lambda}{mq} - \frac{(r+\lambda)^2}{2m^2q^2} + \frac{(r+\lambda)^3}{3m^3q^3} - - - - -$$

$$\log(mp-r-\lambda) = \log m + \log p - \frac{r+\lambda}{mp} - \frac{(r+\lambda)^2}{2m^2p^2} - \frac{(r+\lambda)^3}{3m^3p^3} - - - - -$$

Substituons dans l'expression (3) il vient :

$$\begin{aligned}\log T_{n+\lambda} = {} & \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\log m - m + \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\ & -\left(mq+r+\lambda+\tfrac{1}{2}\right)\left(\log m + \log q + \frac{r+\lambda}{mq} - \frac{(r+\lambda)^2}{2m^2q^2} + \frac{(r+\lambda)^3}{3m^3q^3} + - - -\right) \\ & -\left(mp-r-\lambda+\tfrac{1}{2}\right)\left(\log m + \log p - \frac{r+\lambda}{mp} - \frac{(r+\lambda)^2}{2m^2p^2} - \frac{(r+\lambda)^3}{3m^3p^3} - - - -\right) \\ & + mq + r + \lambda - \tfrac{1}{2}\log 2\pi + mp - r - \lambda - \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\ & + (mp-r-\lambda)\log p + (mq+r+\lambda)\log q .\end{aligned}$$

ce qui donne en faisant les réductions et négligeant les termes qui tendent vers zéro quand m et λ deviennent infinis sous la condition que λ soit d'ordre inférieur à $m^{\frac{2}{3}}$.

$$(4) \qquad \log T_{n+\lambda} = -\frac{1}{2}\log m - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{\lambda^2}{2mpq}$$

On en déduit :

$$(5) \qquad T_{n+\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2mpq}}$$

On voit que si m est très grand cette probabilité tend vers zéro quel que soit λ. Même pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire pour la valeur n la plus probable, la probabilité est infiniment petite.

Théorème de Bernouilli.

Exprimons la valeur (P) de la probabilité par une intégrale définie.

Posons $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{\frac{-x^2}{2mpq}}$

$$\int_\lambda^{\lambda+1} \varphi(x)\,dx = \int_\lambda^{\lambda+1} \varphi(\lambda)\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(\lambda)}\,dx = M\,\varphi(\lambda)$$

M étant une valeur intermédiaire entre le maximum et le minimum de $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(\lambda)}$

Donc $$M = \frac{\varphi(\lambda+\theta)}{\varphi(\lambda)} = e^{\frac{-2\lambda\theta-\theta^2}{2mpq}}$$

θ étant compris entre 0 et 1. Donc au degré d'approximation adopté on a :

$$\varphi(\lambda) = T_{n+\lambda} = \int_\lambda^{\lambda+1} \varphi(x)\,dx$$

$$(6) \qquad T_{n+\lambda} = \int_\lambda^{\lambda+1} \frac{1}{\sqrt{2mpq}}\, e^{-\frac{x^2}{2mpq}}\,dx$$

Cherchons maintenant la probabilité pour que le nombre des évènements A sur m épreuves soit compris entre $n-\lambda$ et $n+\lambda$. Cette probabilité est évidemment égale à :

$$T_{n-\lambda} + T_{n-\lambda+1} + - - - - - + T_{n+\lambda-1}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\int_{-\lambda}^{-\lambda+1} \varphi(n)\,dx + \int_{-\lambda+1}^{-\lambda+2} + - - - - - = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \varphi(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^\lambda \varphi(x)\,dx$$

ou en posant $$\frac{x}{\sqrt{2mpq}} = t.$$

la probabilité cherchée sera :

$$P_\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}} e^{-t^2}\,dt$$ toujours avec la même approximation que λ est d'ordre plus petit que $m^{\frac{2}{3}}$.

Etudions cette expression.

On voit que l'on a une probabilité tendant vers zéro pour que le nombre des évènements A soit compris entre $n-\lambda$ et $n+\lambda$, λ étant d'ordre $< \sqrt{m}$. On a une probabilité finie pour que ce nombre soit compris entre $n-\lambda$ et $n+\lambda$, λ étant d'un ordre égal à celui de $\sqrt{m}$, et une probabilité tendant vers 1. pour qu'il soit compris entre $n-\lambda$ et $n+\lambda$, λ étant d'un ordre supérieur à celui de $\sqrt{m}$.

D'ailleurs, il est évident que, si $n-\lambda$ et $n+\lambda$ sont les limites les plus étroites entre lesquelles on puisse comprendre ce nombre K, la différence $K-n$ ou $K-mq$ est de même ordre que λ.

D'autre part, nous avons supposé que λ restait toujours d'ordre inférieur à celui de $m^{\frac{2}{3}}$. Donc les 2 limites $n-\lambda$ et $n+\lambda$ ou $mq+r-\lambda$ et $mq+r+\lambda$ divisés par m donnent toujours pour quotient q.

On arrive à la conclusion suivante :

Lorsqu'on fait un nombre m très grand d'épreuves, l'événement A dont la probabilité est q se produira un nombre de fois K tel que le rapport $\frac{K}{m}$ pour m infini tendra vers q, mais il n'y a qu'une probabilité infiniment petite pour que la différence $K-mq$ soit d'ordre d'infinitude inférieur à celui de $\sqrt{m}$.

<u>Problème</u>. Soient des lettres $a, b, c, \ldots$ en nombre n. Considérons une permutation quelconque de ces lettres ou les dérange. Quelle est la probabilité pour que l'une de ces lettres n'ait pas changé de place ?

Le fait qu'une lettre n'a pas changé de place peut provenir de plusieurs causes. Il se peut qu'une lettre, ou deux, ou trois, etc.... n'aient pas bougé, la lettre qui n'aura pas changé est d'ailleurs une quelconque des n lettres données. Appliquons le théorème des probabilités provenant de causes ne s'excluant pas. Si l'on désigne par P_a la probabilité pour que a n'ait pas changé, par P_{ab}, P_{abc}, ... les probabilités pour que a et b, a, b, et c, etc.... n'aient pas changé de place on a :

$$P_a = \frac{1.2.\ldots(n-1)}{1.2.\ldots n} = \frac{1}{n}$$

$$P_{ab} = \frac{1.2.\ldots(n-2)}{1.2.\ldots n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P_{abc} = \frac{1.2.\ldots(n-3)}{1.2.\ldots n} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

— — — — — — — — — — — —

la probabilité cherchée est :

Problème de [illegible] de Galilée

$$P = \sum P_a - \sum P_{ab} + \sum P_{abc} - \cdots\cdots$$

$$P = 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots\cdots$$

— — — — — — — — — — — — — — —

Problème des dés. — Soient n dés. Chaque dé a m faces sur lesquelles sont inscrits les m premiers nombres. On les jette en l'air. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros donnés par les dés soit égale à un nombre A ?

Il peut se produire m^n combinaisons. C_A sont favorables. La probabilité cherchée est égale à $\frac{C_A}{m^n}$. Donc tout revient à déterminer C_A.

A cet effet cherchons la fonction génératrice de ce nombre. C'est par définition une fonction de la forme $\varphi(0) + x\varphi(1) + x^2\varphi(2) + \ldots\ldots$ telle que le coefficient $\varphi(A)$ de son terme en x^A soit C_A, que $\varphi(A+\lambda)$ soit $C_{A+\lambda}$, etc.... Si nous avions cette fonction, il suffirait de la développer suivant les puissances croissantes de x. Le coefficient de la puissance en x^A sera C_A.

Or, considérons la fonction :

$F(x) = (x + x^2 + \cdots\cdots + x^m)^n$ ce sera la fonction génératrice cherchée. En effet :

$$F(x) = \sum x^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ étant tous compris entre 1 et m. On aura en groupant les termes ayant même exposant :

$$F(x) = \sum M_A\, x^A.$$

M_A sera le nombre C_A cherché. En effet : M_A est égal au nombre de décompositions du nombre A en somme de n nombres compris entre 1 et m. C'est donc bien le nombre cherché.

Il s'agit donc de trouver le terme en x^A du développement de $F(x)$.

$$F(x) = x^n\left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n = x^n\left(1 - nx^m + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{2m} - \cdots\right)(1 + nx + \cdots)$$

Le coefficient du terme en x^{A-n} dans le produit des 2 parenthèses sera C_A.

35e Leçon.

Problème. – Deux joueurs jouent à 1 franc la partie. L'un a m francs, l'autre en a m'. La probabilité de gagner est : pour le premier, p ; pour le second, q ; et on a évidemment $p+q=1$. Quelle est la probabilité pour que le premier gagne ?.

Remarquons que $(m+m')$ reste constant. Représentons la probabilité du premier joueur par $\varphi(m)$.

De deux choses l'une : ou bien le premier joueur gagnera la première partie, et ruinera ensuite son adversaire. La probabilité de cet événement est $p\varphi(m+1)$ Car après la première partie il n'aura plus m francs, mais $(m+1)$. Ou bien il va perdre la 1re partie, et n'en ruinera pas moins l'autre ensuite. La probabilité de cet événement est $q\varphi(m-1)$. Et d'après le théorème des probabilités composées, on a :

$$\varphi(m) = p\varphi(m+1) + q\varphi(m-1)$$

De plus, si le premier joueur arrive à avoir $(m+m')$ francs, il aura gagné.

Donc : $$\varphi(m+m') = 1$$

S'il perd, et s'il n'a plus rien, il a perdu

$$\varphi(0) = 0.$$

Ces trois équations déterminent la fonction φ. La première de ces équations, qu'on peut écrire :

$$p\varphi(m+2) - \varphi(m+1) + q\varphi(m) = 0$$

rentre dans la catégorie des <u>Équations aux différences.</u>

D'une façon générale, cherchons à satisfaire à l'équation :

$$A\varphi(m+K) + A_1\varphi(m+K-1) + \dots\dots + A_K\varphi(m) = 0$$

Posons : $$\varphi(m) = \alpha^m$$

L'équation se réduira à la suivante :

$$\varphi(m)\left[A\alpha^K + A_1\alpha^{K-1} + \dots\dots\dots + A_K\right] = 0$$

et si on résout l'équation caractéristique

$$A\alpha^K + A_1\alpha^{K-1} + \dots\dots\dots + A_K = 0$$

On obtiendra K valeurs : $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots \alpha_K$
qui seront des solutions singulières de l'équation aux différences, et on aura une solution générale en posant :

$$\varphi(m) = C_1 \alpha_1^m + C_2 \alpha_2^m + \ldots\ldots + C_K d_K^m$$

$C_1 C_2 \ldots\ldots C_K$ étant des constantes arbitraires.

Dans le cas où l'équation en α aurait des racines égales, la forme de la solution particulière se modifie. Soit en effet $\alpha_1 = \alpha_2$. Considérons les coefficients de l'équation en α comme subissant des variations continues, de façon que deux racines : α_1 et $\alpha_1 + h$ tendent vers la même limite. Avant que cette limite soit atteinte, on aura deux solutions particulières de l'équation :

$$\alpha_1^m \quad \text{et} \quad (\alpha_1 + h)^m$$

La seconde peut s'écrire :

$$\alpha_1^m + m h \alpha_1^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 \alpha_1^{m-2} + \ldots\ldots\ldots$$

La solution générale deviendra :

$$c_1 \alpha_1^m + c_2(\alpha_1^m + m h \alpha_1^{m-1} + \ldots\ldots) + \ldots + c_K \alpha_K^m$$

On peut maintenant faire tendre h vers 0, et en posant $c_1 + c_2 = D_1$ $\quad C_2 h = D_2$, on aura, dans le cas des racines égales

$$\varphi(m) = D_1 \alpha_1^m + m D_2 \alpha_1^{m-1} + C_3 \alpha_3^m + \ldots\ldots$$

S'il y avait trois racines égales, on aurait

$$\varphi(m) = D_1 \alpha_1^m + D_2 m \alpha_1^{m-1} + D_3 \frac{m(m-1)}{1.2} \alpha_1^{m-2} + \ldots\ldots + C_K \alpha_K^m$$

Les conditions du problème servent à déterminer les constantes arbitraires. $C_1 C_2 \ldots\ldots C_K$.

Dans l'exemple actuel, l'équation en α est de la forme :

$$p\alpha^2 - \alpha + q = 0$$

Elle admet pour racines :

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}.$$

1er Cas. - $p \neq \frac{1}{2}$. Alors la solution du problème est :

$$\varphi(m) = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^m$$

Mais les conditions du problème donnent :

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{m+m'} = 1$$

On a donc: $$C_1 = -C_2 = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+m'}}$$

et la solution est:
$$\varphi(m) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^m}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+m'}}$$

<u>2e Cas.</u> - $p = q = \frac{1}{2}$. - Alors les deux solutions sont égales à 1.
On a:
$$\varphi(m) = C_1 + C_2\, m.$$
avec les conditions:
$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{1}{m+m'}$$
De sorte qu'on a:
$$\varphi(m) = \frac{m}{m+m'}$$

Supposons que la fortune de l'un des joueurs soit infinie; m', par exemple, si q est inférieur à p, la probabilité a une valeur finie
$$1-\left(\frac{q}{p}\right)^m$$

Dans les deux autres cas, elle est nulle. - Donc, si un joueur a un partenaire infiniment plus riche, mais aussi moins habile que lui, il a des chances de gagner. A chances égales, et à plus forte raison si son partenaire est plus fort que lui, il est sûr de perdre. Ceci prouve en particulier que si un joueur s'obstine à jouer toujours, comme l'ensemble de ses partenaires forme un adversaire dont la fortune est infinie et que les chances sont égales, il est sûr de perdre. Ce résultat avait vivement frappé Ampère qui était un très honnête homme, et qui fut très heureux de voir que les mathématiques donnaient ici un conseil moral.

Problème de M. André.

Soient 2 candidats A et B se présentant à une élection. Le candidat A est élu par m voix contre m' obtenues par B. Quelle est la probabilité pour que, pendant tout le cours du dépouillement du scrutin A ait toujours la majorité ?

Pour résoudre le problème, cherchons le nombre des cas possibles où la majorité pour A disparait momentanément.

Il peut arriver tout d'abord que en dépouillant le scrutin, on tire d'abord un vote favorable à B ; à ce moment A n'aura pas la majorité. Cette circonstance a évidemment pour probabilité

$$\frac{m'}{m+m'}$$

Supposons au contraire que le premier vote soit pour A, puis que l'on ait ensuite des votes, les uns pour A, les autres pour B, A a d'abord la majorité, puis cette majorité se réduit à une voix, pour les n premiers votes, le vote suivant est favorable à B, donc la majorité pour A se trouve détruite. Représentons par

(1) A, ...| B, ...

une combinaison de ce genre, nous avons isolé à gauche du tiret les n premiers votes qui donnent à A une majorité de 1 voix seulement. Je dis que le nombre de ces combinaisons est égal au nombre des combinaisons commençant par un vote B.

En effet prenons la partie à gauche du tiret et supposons que les voix qu'elle contient ont été dépouillées à la fin et non au début, nous aurons une combinaison commençant par un B

(2) B.......... | A ....

Considérons à part le groupe de voix à droite du tiret : si on les appelait en sens inverse, elles ne donneraient la majorité d'une voix à A qu'à la fin ; car si cette majorité était atteinte auparavant, les voix restantes ne donneraient plus de majorité. Donc dans la combinaison (1) la majorité se perdrait plus tôt qu'on ne l'a supposé.

On reviendra donc de la combinaison (2) à la combinaison (1) et cela sans ambiguïté, en comptant les voix à partir de la droite jusqu'au moment où A gagne la majorité et transportant ces voix sur la gauche.

Or cette opération peut se faire sur toute combinaison qui débute par un B, car A ayant la majorité dans l'ensemble du scrutin doit nécessairement la gagner à un certain moment lorsqu'on commence le dépouillement par la droite.

Conclusion : le nombre des combinaisons (1) est précisément égal à celui des combinaisons qui débutent par B. La probabilité que A perde sa majorité sera donc $2 . \frac{m'}{m+m'}$.

Il y aura donc une probabilité $1 - \frac{2m'}{m+m'} = \frac{m-m'}{m+m'}$ pour que A conserve la majorité pendant tout le temps du dépouillement.

Autre problème. On entre dans la salle du scrutin pendant le dépouillement. On ignore la répartition des suffrages. On sait seulement qu'il y a n votants et qu'au moment où on arrive A a λ voix, B en a μ. Quelle est la probabilité pour que A l'emporte ?

C'est un problème de probabilités composées. Soit P_α la probabilité pour que sur les n suffrages il y en ait α pour A et $n - \alpha$ pour B. Soit $p_{\alpha\lambda\mu}$ la probabilité pour que s'il y a sur l'ensemble α suffrages pour A, il y en ait λ pour A et μ pour B sur les votes déjà dépouillés quand on entrera dans la salle. La probabilité pour que 1° A ait α suffrages sur l'ensemble, 2° qu'il y en ait λ pour A, B pour μ sur ceux dépouillés sera :

$$P_\alpha \times p_{\alpha\lambda\mu}$$

La probabilité pour que, A ayant λ suffrages, et B, μ suffrages sur ceux dépouillés, cette circonstance se produise en même temps que A aura α suffrages sur l'ensemble sera :

$$\frac{P_\alpha \, p_{\alpha\lambda\mu}}{\sum_0^n P_\alpha \, p_{\alpha\lambda\mu}}$$

fraction dans le dénominateur de laquelle nous donnerons à α toutes les valeurs de 0 à n.

La probabilité pour que A ait la majorité sera la somme des probabilités pour les différentes valeurs de α plus grandes que $\frac{n}{2}$.

Donc la probabilité cherchée sera :

$$P = \frac{\sum_{\frac{n}{2}}^n P_\alpha \, p_{\alpha\lambda\mu}}{\sum_0^n P_\alpha \, p_{\alpha\lambda\mu}}$$

Les probabilités $p_{\alpha\lambda\mu}$ sont faciles à déterminer. En effet, supposons que sur n voix il y en ait α pour A. On tire $\lambda + \mu$ bulletins il doit y en avoir λ pour A, μ pour B. Fixons nous un ordre dans lequel nous tirerons ces billetins ; par exemple, les λ premiers seront des A, les μ autres des B. Il y aura pour que ce fait se produise une probabilité

$$\frac{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-1}{n-1} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{\alpha-\lambda+1}{n-\lambda+1} \cdot \frac{n-\alpha}{n-\lambda} \cdot \ldots\ldots \frac{n-\alpha-\mu+1}{n-\lambda-\mu+1}$$

La probabilité $p_{\alpha\lambda\mu}$ sera égale à cette probabilité multipliée par le nombre des permutations de $\mu+\lambda$ lettres dont μ égales à B, λ égales à A.

Il y en a : $\dfrac{(\mu+\lambda)!}{\mu!\,\lambda!}$

$$p_{\alpha\lambda\mu} = \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-1}{n-1} \cdot \ldots\ldots \frac{n-\alpha-\mu+1}{n-\lambda-\mu+1} \, \frac{(\mu+\lambda)!}{\mu!\,\lambda!}$$

Nous avons donc les $p_{\alpha\lambda\mu}$. Quant aux P_α il faudrait pour les avoir compléter l'énoncé du problème ; par exemple, supposer qu'il n'y a pas de valeurs de α plus probables les unes que les autres. On a donc : $P_\alpha = \dfrac{1}{n+1}$. On peut supposer encore que chaque électeur tire son vote à pile ou face. Donc les probabilités pour chacun des 2 candidats sont égales à $\frac{1}{2}$. On en déduit :

$$P_\alpha = \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$ d'après la théorie des épreuves répétées.

Cette hypothèse gratuite comme l'autre est plus vraisemblable car il est difficile de supposer par exemple qu'un des candidats aura toutes les voix ou n'en aura pas du tout. Les P_α sont donc inégales.

Problème du chevalier de Méré.

Problème des partis

2 joueurs jouent. Le premier a m points à faire, le 2e m' pour gagner. Le premier a à chaque partie une probabilité p de marquer le point, le 2e une probabilité q. Ils sont forcés d'interrompre la partie. On demande de partager équitablement l'enjeu entre eux deux.

Les parts doivent être proportionnelles respectivement aux chances de gagner des 2 joueurs.

Soit P_α la probabilité qu'a le premier de gagner en α parties.

α devra être $\geqslant$ m puisque le joueur a m points à marquer et $< m + m'$. En effet, s'il lui fallait $m + m'$ parties pour gagner, cela revient à dire que sur ces $m + m'$ parties il en aurait gagné m dont la dernière, donc sur les $m + m' - 1$ premières il n'en aurait gagné que $m - 1$, donc le 2e aurait marqué m' points, c'est-à-dire gagné. Donc α devra être $\geqslant m$ et et $< m + m'$.

$\sum_m^{m+m'-1} P_\alpha$ sera la probabilité totale qu'a le premier joueur de gagner. Mais P_α c'est la probabilité pour que sur α parties il y en ait m à l'avantage du premier joueur. Donc $P_\alpha = \dfrac{\alpha!}{m!(\alpha-m)!} p^m q^{\alpha-m}$ la probabilité totale relative au premier joueur sera donc :

$$\sum_m^{m+m'-1} \frac{\alpha!}{m!(\alpha-m)!} p^m q^{\alpha-m}$$

et le rapport suivant lequel il faudra partager l'enjeu sera :

$$\frac{\sum_m^{m+m'-1} \dfrac{\alpha!}{m!(\alpha-m)!} p^m q^{\alpha-m}}{\sum_{m'}^{m+m'-1} \dfrac{\alpha!}{m'!(\alpha-m')!} q^{m'} p^{\alpha-m'}}$$

Problème de la poule.

Soient 3 joueurs A, B, C. Les deux premiers jouent ensemble. le perdant est remplacé par C et ainsi de suite... La partie finit quand un joueur a gagné 2 parties de suite. Quelle est la probabilité de finir le jeu, qu'a chacun des joueurs, en supposant que à chaque reprise, chaque joueur a une chance $\frac{1}{2}$ de gagner cette reprise.

Considérons le début de la partie. Personne n'a encore joué. Soit x la probabilité qu'a A ou B de gagner, y celle de C.

A un autre moment du jeu, la situation est différente. Soit z la probabilité de gagner du joueur qui ne joue pas. Parmi les 2 qui jouent, il y en a un qui a déjà gagné une partie. Soit u sa probabilité, v celle du 2e.

Au début, A joue avec B. A a une probabilité x de gagner égale à la probabilité de gagner après avoir gagné la première partie, plus la probabilité de gagner après avoir perdu la première partie. — La première de ces probabilités est $\frac{1}{2}u$, la 2e $\frac{1}{2}z$. On a donc

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}z.$$

C a une probabilité y. Or C ne joue pas la 1re partie, donc il entre dans le jeu à la 2e partie. Sa probabilité est donc v on a par suite :

$$(2) \qquad y = v$$

Au moment de cette 2e partie, A, en admettant qu'il ait déjà gagné une partie a une chance u de gagner cette chance u est égale à la probabilité de finir en gagnant cette 2e partie, plus la probabilité de finir après avoir perdu cette partie. Donc :

$$(3) \qquad u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$$

C n'a qu'une chance de gagner qui est de gagner cette partie, sans quoi, A finirait. Or sa probabilité est v. cette probabilité est donc égale à la probabilité de gagner après avoir gagné cette partie

$$(4) \qquad v = \frac{1}{2}u.$$

La probabilité de B est à ce moment z ; la partie ne continuera que si C gagne évènement qui a une chance $\frac{1}{2}$ auquel cas B rentrera dans la partie avec une probabilité v. Donc :

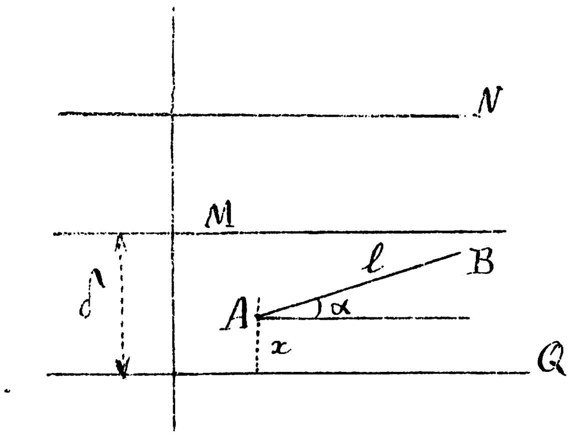
$(5) \qquad z = \frac{1}{2}v.$ On a donc 5 équations linéaires entre 5 inconnues, et x et y seront déterminées.

Problème de l'aiguille.

Un terrain est divisé par des parallèles distantes de δ. On y jette une aiguille de longueur l. Quelle est la probabilité pour que cette aiguille coupe une des parallèles ?

Soit AB une position de l'aiguille.

Cherchons la condition pour que AB coupe une des parallèles MN. Définissons la position de l'aiguille par la la distance x de son extrémité inférieure A à la parallèle



PQ à la distance δ de MN et par son angle α avec la direction des parallèles.

Pour que l'aiguille ne coupe pas la parallèle il faudrait avoir : $x + l \sin \alpha < \delta$ nous admettons que si nous divisons l'intervalle des 2 parallèles par des parallèles infiniment voisines, la probabilité pour que A tombe entre 2 de ces parallèles x et $x + dx$ est même pour tous ces intervalles infiniment étroits et égale par conséquent à $\frac{dx}{\delta}$.

Pour les directions, nous admettrons aussi que toutes sont également vraisemblables. Donc, la probabilité pour que l'aiguille soit à l'intérieur d'un secteur d'ouverture $d\alpha$ décrit de A comme centre sera $\frac{d\alpha}{2\pi}$. Donc la probabilité pour que A soit entre x et $x+dx$ et que l'aiguille ait une inclinaison intermédiaire entre α et $\alpha + d\alpha$ est:

$$\frac{dx\, d\alpha}{2\pi\delta}$$

La probabilité pour que l'aiguille ne coupe pas la parallèle MN sera la somme des probabilités partielles. Elle sera exprimé par l'intégrale double $\iint \frac{dx\, d\alpha}{2\pi\delta}$ où nous prendrons

$$x > 0 \qquad \alpha > 0$$
$$x < \delta - l \sin \alpha \qquad \alpha < \pi$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\delta - l\sin\alpha} \frac{dx\, da}{2\pi\delta} = \int_0^{\pi} \frac{(\delta - l \sin \alpha)\, d\alpha}{\pi\delta}$$

$$= \left[\frac{\delta\alpha + l \cos \alpha}{\pi\delta} \right]_0^{\pi} = 1 - \frac{l}{\pi\delta}$$

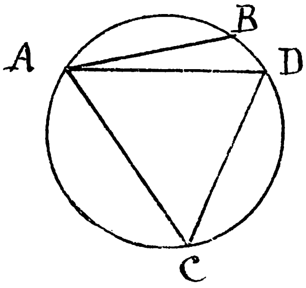
La probabilité pour que l'aiguille coupe la parallèle sera donc $\frac{l}{\pi\delta}$.

Dernier problème. — Ce problème va être traité de 3 façons différentes elles donneront toutes les trois un résultat différent, quoique toutes trois également justes. Cet exemple montre donc quelle importance il y a à ce que les conditions du problème soient nettement précisées puisqu'en interprétant le même énoncé de 3 façons différentes on a 3 résultats contradictoires.

On donne un cercle, on trace au hasard une corde AB. quelle est la probabilité que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit.

1ère Méthode

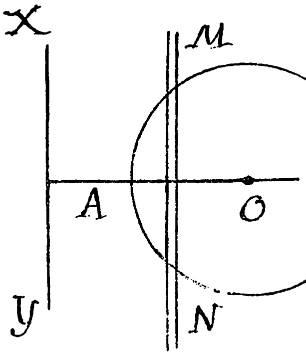
Si nous divisons le cercle en parties égales, la chance qu'à l'une des extrémités de la corde de tomber sur une de ces parties est toujours la même. Donc sans retirer de sa généralité au problème, nous pouvons fixer l'une des extrémités A.



Mais si nous construisons alors le triangle équilatéral inscrit dont un sommet est en A ses sommets D, C, partagent la circonférence en 3 arcs égaux AD, DC, CA, sur l'un desquels la 2e extrémité de la corde a des chances égales de tomber. Elle ne sera plus grande que le côté du triangle équilatéral que si B est sur l'arc DC. Donc on en déduit une probabilité $P_1 = \frac{1}{3}$

2e Méthode

Définissons la corde par sa distance au centre et sa direction. La direction étant arbitraire, donnons nous en une mais nous connaissons alors la perpendiculaire abaissée du centre sur cette direction – La corde doit seulement répondre à la condition que sa distance au centre soit $< R$. Donc il y a autant de chances pour que cette distance soit $> \frac{R}{2}$ que pour qu'elle soit $< \frac{R}{2}$. Mais si elle est plus petite que $\frac{R}{2}$ la corde est plus grande que le côté du triangle équilatéral. On en déduit que la probabilité $P_2 = \frac{1}{2}$.



3e Méthode.

La corde est déterminée si on a son milieu qui peut être en un point quelconque de l'intérieur du cercle.

Pour que la corde soit > que le côté du triangle équilatéral il faudra que le milieu soit à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ dont la surface est le quart de la surface totale du cercle, d'où la probabilité

$$P_3 = \frac{1}{4}.$$

Toutes ces solutions sont bonnes mais l'énoncé est vague. Interprété de 3 façons différentes il a donné 3 combinaisons différentes. Cet exemple montre donc bien l'importance qu'il y a à ce que l'énoncé soit précisé nettement.

Fin.

École Polytechnique.

1re Division.

1888 - 89.

1ère Conférence d'Analyse.

M. Poincaré, Répétiteur.

Points critiques de la fonction Γ.

Pour déterminer les points critiques de la fonction Γ, il faut d'abord définir cette fonction pour des valeurs quelconques de la variable z.

L'intégrale :
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$
définira la fonction toutes les fois qu'elle sera finie. Or on peut l'écrire en désignant par ω un nombre quelconque :
$$\int_0^\omega x^{z-1} e^{-x} dx + \int_\omega^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

La seconde intégrale est toujours finie ; la première a son module plus petit que :
$$\int_0^\omega \text{mod } x^{z-1} dx$$
car e^{-x} est plus petit que 1. Si nous posons :
$$z = \alpha + i\beta.$$
il vient :
$$x^{z-1} = x^{\alpha-1} e^{i\beta \log x} \quad \text{d'où} \quad \text{mod } x^{z-1} = x^{\alpha-1}$$
et
$$\int_0^\omega x^{\alpha-1} dx = \frac{\omega^\alpha}{\alpha}$$ si α est positif et l'infini si α est négatif.

L'intégrale Γ est donc finie toutes les fois que la partie réelle de z sera positive. Si la partie réelle de z était négative, la fonction Γ serait définie par l'égalité :
$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$
et en effet si la partie réelle de z est négative, celle de $1-z$ est positive. De cette définition, on déduit aisément que la formule
$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$