ENCYCLOPÉDIE
MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

Par MM. D'ALEMBERT, *l'Abbé* BOSSUT, DE LA LANDE,
le Marquis de CONDORCET, CHARLES, &c.

TOME SECOND.

A PARIS,
Chez PANCKOUCKE, Libraire, Hôtel de Thou, rue des Poitevins;
A LIÈGE,
Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.

M. DCC. LXXXV.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

& qu'il entre dans le premier degré du bélier, qui est ordinairement vers le 20 de mars & finit quand le soleil sort du signe des gemeaux, c'est-à-dire, le 21 de juin où le soleil paroît décrire le tropique du cancer, pour s'approcher ensuite du pole méridional, ce qui fait le commencement de l'été.

Lorsque le printems commence, les jours sont égaux aux nuits, alors la hauteur méridienne du soleil tient le milieu entre la plus grande & la plus petite.

Quand nous avons le *printems*, les habitans des parties méridionales de l'autre hémisphére ont l'automne, & réciproquement; le premier jour de notre printems est pour eux le premier jour de l'automne; depuis le premier jour du *printems* jusqu'au premier jour de l'été, les jours vont en croissant, & sont plus grands que les nuits; & cette double propriété des jours caractérise aussi le *printems*. C'est dans cette saison que les arbres reverdissent, & que la terre échauffée par l'approche du soleil, recommence à produire des fleurs & des fruits. *Voy.* EQUINOXE, SOLSTICE, *&c.* (*O*).

PRISME, s. f. (*Géomét.*) est le nom qu'on donne *en Géométrie* à tout solide engendré par le mouvement d'une figure rectiligne comme *A B C*, *Pl. Géométr. fig.* 212, qui glisseroit en roulant toujours parallèle à elle-même, le long d'une ligne droite *A E*.

Si la figure décrivante est un triangle, le *prisme* s'appelle alors *prisme triangulaire*; si la figure est un quarré, le *prisme* s'appelle *prisme quadrangulaire*.

Par la génération du *prisme*, il est évident que ce solide a deux bases égales & parallèles; que son contour est composé d'autant de parallélogrammes qu'il y a de côtés dans la figure décrivante ou la base; qu'enfin toutes les sections du *prisme* parallèles à sa base, sont égales.

Tout *prisme* triangulaire peut se diviser en trois pyramides égales. *Voyez* PYRAMIDE.

Pour mesurer la surface & la solidité d'un *prisme*, il faut d'abord trouver l'aire de la base, par exemple *A B C*, & la multiplier par 2 (*Voyez* TRIANGLE) on cherchera ensuite les aires des plans ou parallélogrammes qui forment le contour de la surface, la somme de ces aires étant ajoutée à ce premier produit, donnera la surface cherchée. Enfin on multipliera la base *E A C* par la hauteur, le produit sera la solidité cherchée du *prisme A B C D E F*. Tous les *prismes* sont entr'eux, en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs : si donc les bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs : si les hauteurs sont égales, ils sont entr'eux comme leurs bases. Les *prismes* semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues, & aussi comme les cubes de leurs hauteurs. (*E*)

PRISME. Voyez *le Dictionnaire de Physique*.

PRISMOIDE, s. m. *terme de Géométrie*, qui signifie un solide terminé par différens plans, & dont les bases sont des parallélogrammes rectangles, parallèles & semblablement situés. *Voyez* PRISME.

PRIVATIF, adj. quantité *privative en terme d'algèbre*, est la même chose que quantité négative; on l'appelle ainsi pour l'opposer à la quantité positive ou affirmative. *Voyez* QUANTITÉ NÉGATIVE, *&c.*

Le mot *négatif* est aujourd'hui le seul usité.

Les quantités *privatives* se désignent par le signe de soustraction qui les précède. (*O*).

PRO

PROBABILITÉ, *Philosoph. Logiq. Math.* Toute proposition considérée en elle-même est vraie ou fausse; mais relativement à nous, elle peut être certaine; nous pouvons appercevoir plus ou moins les relations qui peuvent être entre deux idées, ou la convenance de l'une avec l'autre, fondée sur certaines conditions qui les lient, & qui, lorsqu'elles nous sont toutes connues, nous donnent la certitude de cette vérité, ou de cette proposition; mais si nous n'en connoissons qu'une partie, nous n'avons alors qu'une simple *probabilité*, qui a d'autant plus de vraisemblance, que nous sommes assurés d'un plus grand nombre de ces conditions. Ce sont elles qui forment les degrés de *probabilité*, dont une juste estime & une exacte mesure feroient le comble de la sagacité & de la prudence.

Les géomètres ont jugé que leur calcul pouvoit servir à évaluer ces degrés de *probabilité*, du moins jusqu'à un certain point, & ils ont eu recours à la logique, ou à l'art de raisonner, pour en découvrir les principes & en établir la théorie. Ils ont regardé la certitude comme un tout, & les *probabilités* comme les parties de ce tout. En conséquence le juste degré de *probabilité* d'une proposition leur a été exactement connu, lorsqu'ils ont pu dire & prouver que cette *probabilité* valoit un demi, un quart, ou un tiers de la certitude. Souvent ils se sont contentés de le supposer; leur calcul en lui-même n'en est pas moins juste, & ces expressions, qui peuvent paroître un peu bizarres, n'en sont pas moins significatives. Des exemples pris des jeux, des paris ou des assurances, les éclairciront. Supposons que l'on vienne me dire que j'ai eu à une loterie un lot de dix mille livres, je doute de la vérité de cette nouvelle. Quelqu'un, qui est présent, me demande quelle somme je voudrois donner pour qu'il me l'assurât. Je lui offre la moitié, ce qui veut dire que je ne regarde la probabilité de cette nouvelle, que comme une demi-certitude; mais si je n'avois offert que mille livres, c'eût été dire que j'avois neuf fois plus de raison de croire la vérité que de ne la pas croire. Ou ce seroit porter la probabilité

babilité à neuf degrés, de manière que la certitude en ayant dix, il n'en manqueroit qu'un pour ajouter une foi entière à la nouvelle.

Dans l'usage ordinaire, on appelle *probable* ce qui a plus d'une demi-certitude, *vraisemblable*, ce qui la surpasse considérablement, & *moralement certain*, ce qui touche à la certitude entière. Nous ne parlons ici que de la certitude morale, qui coïncide presque avec la certitude mathématique, quoiqu'elle ne soit pas susceptible des mêmes preuves. L'évidence morale n'est donc proprement qu'une probabilité si grande, qu'il est d'un homme sage de penser & d'agir, dans les cas où l'on a cette certitude, comme l'on devroit penser & agir, si l'on en avoit une mathématique. Il est d'une certitude morale qu'il y a une ville de Rome; le contraire n'implique pas contradiction : il n'est pas impossible que tous ceux qui me disent l'avoir vue, ne s'accordent pour tromper, que les livres qui en parlent ne soient faits exprès pour cela, que les monumens que l'on en a, ne soient supposés; cependant, si je refusois de me rendre à une évidence appuyée sur les preuves que j'ai de l'évidence de Rome, simplement parce qu'elles ne sont pas susceptibles de démonstration mathématique, on pourroit me traiter, avec raison, d'insensé, puisque la *probabilité* qu'il y a une ville de Rome, l'emporte si fort sur le soupçon qu'il peut n'y en point avoir, qu'à peine pourroit-on exprimer en nombre cette différence ou la valeur de cette *probabilité*. Cet exemple suffit pour faire connoître l'évidence morale & ses degrés qui sont autant de *probabilités*. Une demi-certitude forme l'*incertain* proprement dit, où l'esprit trouvant de part & d'autre des raisons égales, ne sait quel jugement porter, quel parti prendre. Dans cet état d'équilibre, la plus légère preuve nous détermine; souvent on en cherche où il n'y a ni raison ni sagesse à en chercher; & comme il est assez difficile en bien des cas, où les raisons opposées approchent à-peu-près de l'égalité, de déterminer quelles sont celles qui doivent l'emporter, les hommes les plus sages étendent le point de l'incertitude; ils ne le fixent pas seulement à cet état de l'ame, où elle est également entraînée de part & d'autre par le poids des raisons; mais ils le portent encore sur toute situation qui en approche assez pour qu'on ne puisse pas s'appercevoir de l'inégalité; il arrive de-là que le pays de l'incertitude est plus ou moins vaste, selon le défaut plus ou moins grand de lumières, de logique & de courage. Il est plus serré chez ceux qui sont les plus sages ou les moins sages; car la témérité le borne encore plus que la prudence, par la hardiesse de ses décisions. Au-dessous de cette demi-certitude ou de l'incertain, se trouvent le *soupçon* & le *doute*, qui se terminent à la certitude de la fausseté d'une proposition. Une chose est fausse d'une évidence morale, quand la probabilité de son existence est si fort inférieure à la *probabilité* contraire, qu'il y a dix mille, cent mille à parier contre un qu'elle n'est pas.

Voilà les degrés de *probabilité* entre les deux évidences opposées. Avant que d'en rechercher les sources, il ne sera pas inutile dans un article où l'on ne veut pas se contenter du simple calcul géométrique, d'établir quelques règles générales qui sont régulièrement observées par les personnes sages & prudentes.

1.° Il est contre la raison de chercher des *probabilités*, & de s'en contenter là où l'on peut parvenir à l'évidence. On se moqueroit d'un mathématicien, qui, pour prouver une proposition de géométrie, auroit recours à des opinions, à des vraisemblances, tandis qu'il pourroit apporter sa démonstration; ou d'un juge qui préféreroit de deviner, par la vie passée d'un criminel, s'il est coupable, plutôt que d'entendre sa confession, par laquelle il avoue son crime.

2.° Il ne suffit pas d'examiner une ou deux des preuves qu'on peut mettre en avant, il faut peser à la balance de l'examen toutes celles qui peuvent venir à notre connoissance, & servir à découvrir la vérité. Si l'on demande quelle *probabilité* il y a qu'un homme âgé de 50 ans, meure dans l'année, il ne suffit pas de considérer qu'en général de cent personnes de 50 ans, il en meurt environ 3 ou 4 dans l'année, & de conclure qu'il y a 96 à parier contre 4, ou 24 contre un; il faut encore faire attention au tempérament de cet homme-là, à l'état actuel de sa santé, à son genre de vie, à sa profession, au pays qu'il habite; tout autant de circonstances qui influent sur la durée de sa vie.

3.° Ce n'est pas assez des preuves qui servent à établir une vérité, il faut encore examiner celles qui la combattent. Demande-t-on si une personne connue, & absente de sa patrie depuis 25 ans, dont l'on n'a aucune nouvelle, doit être regardée comme morte? D'un côté, l'on dit que, malgré toutes sortes de recherches, l'on n'en a rien appris; que comme voyageur elle a pu être exposée à mille dangers; qu'une maladie peut l'avoir enlevée dans un lieu où elle étoit inconnue; que si elle étoit en vie, elle n'auroit pas négligé de donner de donner de ses nouvelles, sur-tout devant présumer qu'elle auroit un héritage à recueillir, & autres raisons que l'on peut alléguer. Mais, à ces considérations, on en oppose d'autres qui ne doivent pas être négligées. On dit que celui dont il s'agit est un homme indolent, qui, en d'autres occasions, n'a point écrit, que peut-être ses lettres se sont perdues; qu'il peut être dans l'impossibilité d'écrire. Ce qui suffit pour faire voir qu'en toutes choses il faut peser les preuves, les *probabilités* de part & d'autre, les opposer les unes aux autres, parce qu'une proposition très-probable peut être fausse, & qu'en fait de *probabilité*, il n'y en a point de si forte, qu'elle ne puisse être combattue par une contraire encore plus forte. De-là l'opposition que l'on voit tous les jours entre les jugemens des hommes. De-là la plupart des disputes qui finiroient bientôt, si l'on vouloit ne pas regarder comme évident ce qui n'est que probable, écouter & peser les raisons que l'on oppose à notre avis.

4.° Est-il nécessaire d'avertir que dans nos jugemens, il est de la prudence de ne donner son acquiescement à aucune proposition qu'à raison de son degré de vraisemblance? Qui pourroit observer cette régle générale, auroit toute la justesse d'esprit, toute la prudence, toute la sagesse possible. Mais que nous en sommes bien éloignés! Les esprits les plus communs peuvent, avec de l'attention, discerner le vrai du faux; d'autres qui ont plus de pénétration, savent distinguer le probable de l'incertain ou du douteux; mais ce ne sont que les génies distingués par leur sagacité, qui peuvent assigner à chaque proposition son juste degré de vraisemblance; & y proportionner leur sentiment: ah, que ces génies sont rares!

5.° Bien plus, l'homme sage & prudent ne considérera pas seulement la probabilité du succès, il pesera encore la grandeur du bien ou du mal qu'on doit attendre en prenant un tel parti, ou en se déterminant pour le contraire, ou en restant dans l'inaction; il préférera même celui où il sait que l'apparence du succès est fort légère, lorsqu'il voit en même-tems que le risque qu'il court n'est rien ou fort peu de chose, & qu'au contraire, s'il réussit, il peut obtenir un bien très-considérable.

6.° Puisqu'il n'est pas possible de fixer, avec cette précision qui seroit à desirer, les degrés de *probabilité*, contentons-nous des à-peu-près qu'on peut obtenir. Quelquefois, par une délicatesse mal-entendue, l'on s'expose soi-même & la société, à des maux pires que ceux qu'on auroit pu éviter; c'est un art que de savoir s'éloigner de la perfection en certains articles, pour s'en approcher davantage en d'autres plus essentiels & plus intéressans.

7.° Enfin il semble inutile d'ajouter ici que dans l'incertitude on doit suspendre à se déterminer & agir jusqu'à ce qu'on ait plus de lumière; mais que si le cas est tel qu'il ne permette aucun délai, il faut s'arrêter à ce qui paroîtra le plus probable; & une fois le parti que nous aurons jugé le plus propre étant pris, il ne faut pas s'en repentir, lors même que l'évènement ne répondroit en rien à ce que nous avions lieu d'en attendre. Si, dans un incendie, on ne peut échapper qu'en sautant par la fenêtre, il faut se déterminer pour ce parti, tout mauvais qu'il est. L'incertitude seroit pire encore, & quelle qu'en soit l'issue, nous avons pris le parti le plus sage, il ne faut point y avoir de regret.

Après ces règles générales dont il sera aisé de faire l'application, venons aux sources de *probabilité*. Nous les réduisons à deux espèces; l'une renferme les *probabilités* tirées de la considération de la nature même, & du nombre des causes ou des raisons qui peuvent influer sur la vérité de la proposition dont il s'agit; l'autre n'est fondée que sur l'expérience du passé, qui peut nous faire tirer avec confiance des conjectures pour l'avenir, lors du moins que nous sommes assurés que les mêmes causes qui ont produit le passé existent encore, & sont prêtes à produire l'avenir.

Un exemple fera mieux connoître la nature & la différence de ces deux sources de *probabilité*. Je suppose que l'on sache que l'on a mis dans une urne trente mille billets, parmi lesquels il y en a dix mille noirs & vingt mille blancs, & qu'on demande quelle est la *probabilité* qu'en en tirant un au hasard, il sortira blanc: Je dis que par la seule considération de la nature des choses, & en comparant le nombre des causes qui peuvent faire sortir un billet blanc avec le nombre de celles qui en peuvent faire sortir un noir, par cela seul il est deux fois plus probable qu'il sortira un billet blanc qu'un noir: de sorte que comme le billet qui va sortir, est nécessairement ou blanc ou noir, si l'on partage cette certitude en trois degrés ou parties égales, on dira qu'il y a deux degrés de *probabilité* de tirer un billet blanc, & un degré pour le billet noir, ou que la *probabilité* d'un billet blanc est $\frac{2}{3}$ de la certitude, & celle du billet noir $\frac{1}{3}$ de cette certitude.

Mais, supposez que je ne voie dans l'urne qu'un grand nombre de billets, sans savoir la proportion qu'il y a des blancs aux noirs, ou même sans savoir s'il n'y en a point d'une troisième couleur, en ce cas, comment déterminer la *probabilité* d'en tirer un blanc? Je dis que ce sera en faisant des essais, c'est-à-dire, en tirant un billet pour voir ce qu'il sera, puis le remettant dans l'urne, en tirant un second que je remets aussi, puis un troisième, un quatrième, & ainsi de suite autant que je voudrois. Il est clair que le premier billet tiré étant venu blanc, ne donne qu'une *probabilité* très-légère que le nombre des blancs surpasse celui des noirs; un second tiré blanc augmenteroit cette *probabilité*; un troisième la fortifieroit. Enfin, si j'en tirois de suite un grand nombre de blancs, je serai en droit de conclure qu'ils sont tous blancs, & cela avec d'autant plus de vraisemblance, que j'aurois plus de billets. Mais si, sur les trois premiers billets, j'en tire deux blancs & un noir, je puis dire qu'il y a quelque *probabilité* bien légère, qu'il y a deux fois plus de blancs que de noirs. Si, sur dix billets, il en sort quatre blancs & six noirs, la *probabilité* augmente, & elle augmentera à mesure que le nombre des essais ou des expériences me confirmera toujours la même proportion des blancs aux noirs. Si j'avois fait trois mille essais, & que j'eusse deux mille billets blancs contre mille noirs, il s'en faudroit peu que la *probabilité* de tirer un blanc ne fût double de celle de tirer un noir.

Cette manière de déterminer probablement le rapport des causes qui font naître un évènement à celles qui le font manquer, ou plus généralement la proportion des raisons ou conditions qui établissent la vérité d'une proposition avec celles qui donnent le contraire, s'applique à tout ce qui peut arriver ou ne pas arriver, à tout ce qui peut être ou ne pas être. Quand je vois sur des regiſtres mortuaires, que pendant vingt, cinquante années, du nombre des enfans qui naissent, il en meurt un tiers avant l'âge de six ans, je conclurai d'un enfant nouvellement né, que la *probabilité* qu'il parviendra au moins à l'âge de six ans, est les $\frac{2}{3}$ de la certitude. Si je vois que de deux joueurs qui jouent à billes égales, le premier gagne toujours deux parties, tandis que l'autre n'en gagne qu'une, je conclurai avec beaucoup de *probabilité* qu'il est deux fois plus fort que son antagoniste; si je remarque que quelqu'un de cent fois qu'il m'a parlé, m'a menti en dix occasions, la *probabilité* de son témoignage ne sera dans mon esprit que les $\frac{9}{10}$ de la certitude ou même moins.

L'attention donnée au passé, la fidélité de la mémoire à retenir ce qui est arrivé & l'exactitude des regiſtres à conserver les évènemens, font ce qu'on appelle dans le monde l'*expérience*. Un homme qui a de l'expérience, est celui qui ayant beaucoup vu & beaucoup réfléchi, peut vous dire à-peu-près (car ici il n'est pas question d'une précision mathématique) quelle *probabilité* il y a que tel évènement étant arrivé, tel autre le suivra; ainsi, toutes choses d'ailleurs égales, plus on a fait d'épreuves ou d'expériences, & plus on s'assure du rapport précis du nombre des causes favorables au nombre des causes contraires.

On pourroit demander si cette *probabilité* augmentant à l'infini par une suite d'expériences répétées, peut devenir à la fin une certitude morale; ou si ces accroissemens sont tellement limités, que diminuant graduellement, ils ne fassent qu'une *probabilité* finie. Car on sait qu'il y a des augmentations qui, quoique perpétuelles, ne font pourtant à l'infini qu'une somme finie; par exemple, si la premiere expérience donnoit une *probabilité* qui ne fût que $\frac{1}{3}$ de la certitude, & la seconde une *probabilité* qui ne fût que le tiers de ce tiers, & la troisième une *probabilité* qui ne fût que le tiers de la seconde, & la quatrième une *probabilité* qui ne fût que le tiers de la troisième, & ainsi à l'infini. Il seroit aisé, par le calcul, de voir que toutes ces *probabilités* ensemble ne donnent qu'une demi-certitude; de sorte qu'on auroit beau faire une infinité d'expériences, on ne viendroit jamais à une *probabilité* qui se confondît avec la certitude morale; ce qui feroit conclure que l'expérience est inutile, & que le passé ne prouve rien pour l'avenir.

M. Bernoulli, le géomètre, qui entendoit le mieux ces sortes de calculs, s'est proposé l'objection & en donne la réponse. On la trouvera dans son livre *de arte conjectandi*, *p.* 4, dans toute son étendue; problême, suivant lui, aussi difficile que la quadrature du cercle. Il y fait voir que la *probabilité*, qui naissoit de l'expérience répétée, alloit toujours en croissant, & croissoit tellement, qu'elle s'approchoit indéfiniment de la certitude. Son calcul nous apprend à déterminer (question proposée d'une manière fixe) combien de fois il faudroit réitérer l'expérience pour parvenir à un degré assigné de *probabilité*. Ainsi, dans le cas d'une urne pleine d'un grand nombre de boules blanches & noires, on veut s'assurer par l'expérience du rapport des blanches aux noires; M. Bernoulli trouve que pour qu'il soit mille fois plus probable qu'il y en a deux noires sur trois blanches, que non pas toute autre supposition, il faut avoir tiré de l'urne 25550 boules, & que, pour que cela fût deux mille fois plus probable, il falloit avoir fait 31258 épreuves; enfin, pour que cela devînt sept mille fois plus probable, il falloit 36960 tirages. La difficulté & la longueur du calcul ne permettent pas de le rapporter ici en entier, on peut le voir dans l'ouvrage cité.

Par-là il est démontré que l'expérience du passé est un principe de *probabilité* pour l'avenir; que nous avons lieu d'attendre avec raison des évènemens conformes à ceux que nous avons vu arriver fréquemment, & plus nous avons lieu de les attendre de nouveau. Ce principe reçu, on sent de quelle utilité seroient dans les questions de physique, de politique, & dans ce qui regarde la vie commune, des tables exactes qui fixeroient sur une longue suite d'évènemens la proportion de ceux qui arrivent d'une certaine façon à ceux qui arrivent autrement. Les usages qu'on a tiré des regiſtres baptistaires & mortuaires sont si grands, que cela devroit engager non-seulement à les perfectionner, en marquant, par exemple, l'âge, la condition, le tempérament, le genre de mort, *&c.* mais aussi à en faire de plusieurs autres évènemens, que l'on dit très-mal-à-propos être l'effet du hasard; c'est ainsi que l'on pourroit former des tables qui marqueroient combien d'incendies arrivent dans un certain tems, combien de maladies épidémiques se font sentir en certains espaces de tems, combien de navires, *&c.* ce qui deviendroit très-commode pour résoudre une infinité de questions utiles, & donneroit aux jeunes gens attentifs toute l'expérience des vieillards.

Il est bien entendu que l'on ne donnera pas dans l'abus, qui n'est que trop ordinaire, de la preuve de l'expérience, que l'on n'établira pas sur un petit nombre de faits une grande *probabi-*

lité; que l'on n'ira pas juſqu'à oppoſer ou à préférer même une foible *probabilité* à une certitude contraire, que l'on ne donnera pas dans la foibleſſe de ces joueurs, qui ne prennent que les cartes qui ont gagné ou celles qui ont perdu, quoiqu'il ſoit évident, par la nature des jeux de haſard, que les coups précédens n'influent point ſur les ſuivans. Superſtition cependant bien plus pardonnable que tant d'autres qui, ſur l'expérience la plus légère, ou ſur le raiſonnement le moins conſéquent, ne s'introduiſent que trop dans le courant de la vie.

A ces deux principes généraux de *probabilité*, nous pouvons en joindre de plus particuliers, tels que *l'égale poſſibilité de pluſieurs évènemens, la connoiſſance des cauſes, le témoignage, l'analogie & les hypothèſes*.

1.° Quand nous ſommes aſſurés qu'une certaine choſe ne peut arriver qu'en un certain nombre déterminé de manières, & que nous ſavons ou ſuppoſons que toutes ces manières ont une égale poſſibilité, nous pouvons dire avec aſſurance que la *probabilité*, qu'elle arrivera d'une telle façon, vaut tant, ou eſt égale à autant de parties de la certitude. Je ſais, par exemple, qu'en jettant un dez au haſard, j'amène ſûrement ou 1 point, ou le 2, le 3, ou le 4, ou le 5, ou le 6. Suppoſons d'ailleurs le dez parfaitement juſte, la poſſibilité eſt la même pour tous les points. Il y a donc ſix *probabilités* égales, qui toutes enſemble font la certitude; ainſi, chacune eſt une ſixième partie de cette certitude. Ce principe, tout ſimple qu'il paroît, eſt infiniment fécond; c'eſt ſur lui que ſont formés tous les calculs que l'on a faits & que l'on peut faire ſur les jeux de haſard, ſur les loteries, ſur les aſſurances, & en général ſur toutes les *probabilités* ſuſceptibles de calcul. Il ne s'agit que d'une grande patience & d'un détail de combinaiſons, pour démêler le nombre des évènemens favorables, & le nombre des contraires. C'eſt ſur ce principe, joint à l'expérience, que l'on détermine les *probabilités* de la vie humaine, ou du tems qu'une perſonne d'un certain âge peut probablement ſe flatter de vivre, ce qui fait le fondement du calcul des valeurs des rentes viagères, des tontines. Voyez *les eſſais ſur les* probabilités *de la vie humaine*, & les *ouvrages cités à la fin de cet article*. Il s'étend au calcul des rentes miſes ſur deux ou trois payables au dernier vivant; ſur les jouiſſances, les penſions alimentaires, ſur les contrats d'aſſurance, les paris, *&c.*

J'ai dit que ce principe s'employoit quand nous ſuppoſions les divers cas également poſſibles. Et en effet, ce n'eſt que par ſuppoſition relative à nos connoiſſances bornées, que nous diſons, par exemple, que tous les points d'un dez peuvent également venir, ce n'eſt pas que quand ils roulent dans le cornet, celui qui doit ſe préſenter, n'ait déjà la diſpoſition qui, combinée avec celle du cornet, du tapis, ou de la force & de la manière avec laquelle on jette le dez, le doit faire sûrement arriver; mais tout cela nous étant entièrement inconnu, nous n'avons pas de raiſon de préférer un point à un autre, nous les ſuppoſons donc tous également faciles à arriver. Cependant il peut y avoir ſouvent de l'erreur dans cette ſuppoſition. Si l'on vouloit chercher la *probabilité* d'amener 8 points avec deux dez, ce ſeroit faire un groſſier ſophiſme, que de raiſonner ainſi: avec deux dez, je peux amener ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9, ou 10, ou 11, ou 12 points; donc la *probabilité* d'amener 8, ſera un $\frac{1}{11}$ de la certitude; car ce ſeroit ſuppoſer que ces 11 points ſont également faciles à amener, ce qui n'eſt pas vrai. Les calculs les plus ſimples du jeu de tric-trac nous apprennent que ſur 36 coups également poſſibles avec deux dez, cinq nous donne le point de 8; la *probabilité* ſera donc de cinq ſur 36, ou $\frac{5}{36}$ de la certitude, & non pas $\frac{1}{11}$.

Ce ſophiſme s'évite aiſément dans les calculs des jeux, où il eſt facile de déterminer l'égale ou inégale poſſibilité d'événemens; mais il eſt plus caché & n'eſt que trop commun dans les cas plus compoſés. Ainſi, bien des gens ſe plaignent d'être fort malheureux, parce qu'ils n'ont pu obtenir certain bonheur qui eſt tombé en partage à d'autres; ils ſuppoſent qu'il étoit également poſſible, également convenable, que ce bien leur arrivât, ſans vouloir conſidérer qu'ils n'étoient pas dans une poſition auſſi avantageuſe, qu'ils n'avoient pour eux qu'une manière favorable, tandis que les autres en avoient pluſieurs; de ſorte que ç'auroit été un grand bonheur que cette ſeule manière eût lieu, ſans dire que les événemens que nous attribuons au haſard, ſont dirigés par une providence infiniment ſage; qui a tout calculé, & qui, par des raiſons à nous inconnues, diſpoſe des choſes d'une manière bien plus convenable que n'eſt l'arrangement que nos foibles lumières ou nos paſſions voudroient y mettre.

A la ſuite de la *probabilité* ſimple vient une *probabilité* compoſée, qui dépend encore du même principe. C'eſt la *probabilité* d'un événement qui ne peut arriver qu'au cas qu'un autre événement, lui-même ſimplement probable, arrive. Un exemple va l'expliquer. Je ſuppoſe que dans un jeu de quadrille de 40 cartes, l'on me demande de tirer un cœur, la *probabilité* de réuſſir eſt $\frac{1}{4}$ de la certitude, puiſqu'il y a 4 couleurs & 10 cartes de chaque couleur également poſſibles. Mais ſi l'on me dit enſuite qne je gagnerai ſi j'amène le roi de cœur, alors la *probabilité* devient compoſée; car, 1.° il faut tirer un cœur, & la *probabilité* eſt $\frac{1}{4}$: 2.° ſuppoſé que j'ai tiré un cœur, la *probabilité* ſera $\frac{1}{10}$, puiſqu'il y a 9 autres cœurs que je peux auſſi bien tirer que le roi. Cette *probabilité* entre ſur la premiere, n'eſt que la dixième d'un quart, ou le $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{40}$ de la certitude. Et il est clair, que puisque sur 40 cartes je dois tirer précisément le roi de cœur, je n'ai de favorable qu'un cas sur 40 également possibles, ou un contre 39.

Cette *probabilité* composée s'estime donc en prenant de la première une partie, telle qu'on la prendroit de la certitude entiere, si cette *probabilité* étoit une certitude. Un ami est parti pour les Indes, sur une flotte de douze vaisseaux, j'apprends qu'il en a péri trois, & que le tiers de l'équipage des vaisseaux sauvés est mort dans le voyage; la *probabilité* que mon ami est sur un des vaisseaux arrivés à bon port, est $\frac{9}{12}$, & celle qu'il n'est pas du tiers mort en route, est $\frac{2}{3}$. La *probabilité* composée qu'il est encore en vie, sera donc les $\frac{2}{3}$ de $\frac{9}{12}$ ou $\frac{6}{12}$ ou une demi-certitude. Il est donc pour moi entre la vie & la mort.

On peut appliquer ce calcul à toutes sortes de preuves ou de raisonnemens, réduits pour plus de clarté à la forme prescrite par l'art de raisonner : si l'une des prémices est certaine & l'autre probable, la conclusion aura le même degré de *probabilité* que cette prémice; mais si l'une & l'autre sont simplement probables, la conclusion n'aura qu'une *probabilité* de *probabilité*, qui se mesure en prenant de la *probabilité* de la majeure, une partie telle que l'exprime la fraction, qui mesure la *probabilité* de la mineure. Dans ces derniers exemples les $\frac{9}{12}$ de $\frac{2}{3}$, qui est la *probabilité* de la majeure, & la valeur de la conclusion sera $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$.

D'où il paroît que la *probabilité* de la *probabilité* ne fait qu'une *probabilité* bien légere. Que sera-ce donc d'une *probabilité* du troisième ou quatrième degré? ou que penser de ces raisonnemens si fréquens, dont la conclusion n'est fondée que sur plusieurs propositions probables qui doivent être toutes vraies pour que la conclusion le soit aussi? mais s'il suffisoit qu'une seule d'entr'elles eût lieu pour vérifier la conclusion, ce seroit tout le contraire; plus on entasseroit de *probabilités*, plus la chose deviendroit probable. Si, par exemple, quelqu'un me disoit, je vous donne un louis si vous amenez avec deux dez 8 points, la *probabilité* d'amener 8 est $\frac{5}{36}$; s'il ajoutoit, je vous le donne encore si vous amenez 6 : alors comme pour gagner, il suffit d'amener l'un ou l'autre, ma *probabilité* seroit $\frac{5}{36}$ & $\frac{5}{36}$, c'est-à-dire, $\frac{10}{36}$, ce qui augmente mon espérance de gagner.

Voilà les événemens sur lesquels on peut déterminer toutes les questions, & les exemples dépendans de ce premier principe de *probabilité*.

2.° Passons au second, qui est la connoissance des causes & des signes, qu'on peut regarder comme des causes ou des effets occasionnels. Nous n'en dirons qu'un mot particulier aux *probabilités*, renvoyant pour le reste à l'*article* CAUSE. Il y a des causes dont l'existence est certaine, mais dont l'effet n'est que douteux ou probable; il y en a d'autres dont l'effet est certain, mais dont l'existence est douteuse; il peut y en avoir enfin, dont l'existence & l'effet n'ont qu'une simple *probabilité*. Cette distinction est nécessaire : un exemple l'expliquera. Un ami n'a point répondu à ma lettre; j'en cherche la cause, il s'en présente trois : il est paresseux, peut-être est-il mort, ou ses affaires l'ont empêché de me répondre. Il est paresseux, première cause dont l'existence est certaine : je sais qu'il écrit très-difficilement; mais l'effet de cette cause est incertain, car un paresseux se détermine quelquefois à écrire. Il est mort, seconde cause très-incertaine, mais dont l'effet seroit bien certain. Il a des affaires, troisième cause incertaine en elle-même : je soupçonne seulement qu'il a beaucoup d'affaires, & dont l'existence même supposée, l'effet seroit encore incertain, puisqu'on peut avoir des affaires & trouver cependant le temps d'écrire.

La même chose doit s'appliquer aux signes; leur existence peut être douteuse, leur signification incertaine : & l'existence & la signification peuvent n'avoir que la vraisemblance. Le baromètre descend, c'est un signe de pluie dont l'existence est certaine, mais dont la signification est douteuse : le baromètre descend souvent sans pluie.

De cette distinction il suit que la conclusion tirée d'une cause ou d'un signe dont l'existence est certaine, a le même degré de *probabilité* qui se trouve dans l'effet de cette cause, ou dans la signification de ce signe. Nous n'avons qu'à réduire l'exemple du baromètre à cette forme. Si le baromètre descend, nous aurons de la pluie; cela n'est que probable; mais le baromètre descend, cela est certain : donc nous aurons de la pluie; conclusion probable, dont l'expérience donne la valeur. De même si l'existence de la cause ou du signe est douteuse, mais que son effet ou la signification ne le soit pas, la conclusion aura le même degré de *probabilité* que l'existence de la cause ou du signe. Que mon ami soit mort, cela est douteux; la conclusion que j'en tirerai qu'il ne peut m'écrire, sera également douteuse.

Mais quand l'existence & l'effet de la cause sont probables, ou s'il s'agit de signes, quand l'existence & la signification du signe ne sont que probables, alors la conclusion n'a qu'une *probabilité* composée. Supposons que la *probabilité* que mon ami a des affaires soit les $\frac{3}{4}$ de la certitude, & que celle que ses affaires, s'il en a, l'empêchent de m'écrire soit les $\frac{2}{3}$ de cette certitude, alors la *probabilité* qu'il ne m'écrira pas, sera composée de deux autres, ce qui sera une demi-certitude.

3.° Nous avons indiqué le témoignage comme une troisième source de *probabilité*; & il tient de si près au sujet dont nous donnons les principes, que l'on ne peut se dispenser de rapporter ici ce qu'il y a à en dire relativement aux *probabilités* & à la certitude morale. Nous ne pouvons pas tout voir par nous-mêmes : il y a une infinité de choses, souvent les plus intéressantes, sur lesquelles il faut se rapporter au témoignage d'autrui. Il est donc important de déterminer, si ce n'est pas au juste, du moins d'une manière qui en approche, le degré d'assentiment que nous pouvons donner à ce témoignage, & quelle en est pour nous la *probabilité*.

Quand on nous fait un récit, ou qu'on avance une proposition du nombre de celles qui se prouvent par témoins, l'on doit d'abord examiner la nature même de la chose, & ensuite peser l'autorité des témoins. Si, de part & d'autre, on trouve qu'il ne manque aucune des conditions requises pour la vérité de la proposition, on ne peut pas lui refuser son acquiescement; s'il est évident qu'il manque une ou plusieurs de ces conditions, on ne doit pas balancer à la rejetter; enfin, si l'on voit clairement l'existence de quelques-unes de ces conditions, & que l'on reste incertain sur les autres, la proposition sera probable, d'autant plus probable, qu'un grand nombre de ces conditions aura lieu.

1.° Quant à la nature de la chose, la seule condition requise, c'est qu'elle soit possible, c'est-à-dire, qu'il n'y ait rien dans sa nature qui l'empêche d'exister, & rien par conséquent qui doive m'empêcher de la croire dès qu'elle sera suffisamment prouvée par une preuve extérieure : telle qu'est celle du témoignage. Au contraire, si la chose est impossible, si elle a en elle-même une répugnance invincible à exister, à quelque degré de vraisemblance que puissent monter d'ailleurs les preuves du témoignage, ou d'autres raisons extrinseques de son existence, je ne pourrois le croire. Quelqu'un prétendroit-il avancer une contradiction, une impossibilité absolue, y joindroit-il toutes sortes de preuves, il ne viendra jamais à bout de me persuader ce qui est métaphysiquement impossible. Un cercle quarré ne peut être ni entendu ni reçu. S'agit-il d'une impossibilité physique? nous serons un peu moins difficiles; nous savons que Dieu a établi lui-même les loix de la nature, qu'il est constant dans l'observation de ces loix; ainsi, l'esprit répugne à croire qu'elles puissent être violées. Cependant nous savons aussi que celui qui les a établies a le pouvoir de les suspendre; qu'elles ne sont pas d'une nécessité absolue, mais seulement de convenance. Ainsi, nous ne devons pas absolument refuser notre confiance aux témoins ou aux preuves extérieures du contraire; mais il faut que ces preuves soient bien évidentes, en grand nombre & revêtues de tous les caracteres nécessaires, pour y donner notre acquiescement. Est-il question d'une impossibilité morale ou d'une opposition aux qualités morales des êtres intelligens? Quoique bien moins délicats sur les preuves ou les témoins qui veulent nous la persuader, cependant il faut que nous y voyons cette vraisemblance qui se trouve dans les caracteres même, & dans les effets qui en résultent; il faut que les actions suivent naturellement des principes qui les produisent ordinairement : c'est ainsi qu'il semble impossible qu'un homme sage, d'un caractere grave & modeste, se porte sans raison, sans motif à commettre une indécence en public. Au contraire, un fait moralement possible ordinaire, conforme au cours réglé de la nature, se persuade aisément; il porte déja en lui-même plusieurs degrés de *probabilité*; pour peu que le témoignage en ajoute, il deviendra très-probable. Cette *probabilité* augmentera encore par l'accord d'une vérité avec d'autres déja connues & établies; si le récit qu'on nous fait est si bien lié avec l'histoire, qu'on ne sauroit le nier sans renverser une suite des faits historiques bien constatés, par cela même il est prouvé; si au contraire il ne peut trouver sa place dans l'histoire sans déranger certains grands événemens connus, par cela même ce récit est rejeté. Pourquoi l'histoire des Grecs & des Romains est-elle regardée parmi nous comme beaucoup plus croyable que celle des Chinois? C'est qu'il nous reste une infinité de monumens de toute espece qui ont un rapport si nécessaire, ou du moins si naturel avec cette histoire, & qui la lient tellement à l'histoire générale, qu'ils multiplient les preuves à l'infini; au lieu que celle des Chinois n'a que peu de liaisons avec la suite de cette histoire générale qui nous est connue.

2.° Quand on a pesé les preuves qui se tirent de la nature même de la chose, que l'on a reconnu la possibilité, & en quelque maniere le degré de *probabilité* intrinseque, il faut en venir à la validité même du témoignage. Elle dépend de deux choses; du nombre des témoins, & de la confiance qu'on peut avoir en chacun d'eux.

Pour ce qui est du nombre des témoins, il n'est personne qui ne sente que leur témoignage est d'autant plus probable, qu'ils sont en plus grand nombre : on croiroit même qu'il augmente de *probabilité* en même proportion que le nombre croît; en sorte que deux témoins d'une égale confiance donneroient une *probabilité* double de celle d'un seul, mais l'on se tromperoit. La *probabilité* croît avec le nombre des témoins dans une proportion différente. Si l'on suppose que le premier témoin me donne une *probabilité* qui se porte aux $\frac{9}{10}$ de la certitude; le second, que je suppose également croyable, ajouteroit-il à la *probabilité* du premier aussi $\frac{9}{10}$? non, puisqu'alors leurs deux témoignages réunies feroient $\frac{18}{10}$ de la certitude, ou une certitude & $\frac{8}{10}$ de plus, ce qui est impossible. Je dis donc que ce second témoin augmentera la *probabilité* du premier de $\frac{9}{10}$ sur ce qui reste pour aller à la certitude, & poussera ainsi la *probabilité* réunie à $\frac{99}{100}$, qu'un troisième la portera à $\frac{999}{1000}$ un quatrième à $\frac{9999}{10000}$, ainsi de suite, approchant toujours de la certitude sans jamais y arriver entièrement : ce qui ne doit pas surprendre, puisque quelque nombre de témoins que l'on suppose, il doit toujours rester la possibilité du contraire, ou quelques degrés de *probabilité*, bien petits à la vérité, qu'ils se trompent ; en voici la preuve. Quand deux témoins me disent une chose, il faut, pour que je me trompe en ajoutant foi à leur témoignage, que l'un & l'autre m'induisent en erreur ; si je suis sûr de l'un des deux, peu m'importe que l'autre soit croyable. Or, la *probabilité* que l'un & l'autre me trompent, est une *probabilité* composée de deux *probabilités*, que le premier trompe, & que le second trompe. Celle du premier est $\frac{1}{10}$ (puisque la *probabilité* que la chose est conforme à son rapport est $\frac{9}{10}$) ; la *probabilité* que le second me trompe aussi, est encore $\frac{1}{10}$: donc la *probabilité* composée est le dixième d'un dixième ou $\frac{1}{100}$; donc la *probabilité* du contraire, c'est-à-dire, celle que l'un ou l'autre dit vrai, est $\frac{99}{100}$.

L'on voit que je me représente ici la certitude morale comme le terme d'une carrière que les divers témoins qui viennent à l'appui l'un de l'autre, me font parcourir. Le premier m'en approche d'un espace, qui a avec toute la lice la même proportion que la force de son témoignage a avec la certitude entière. Si son rapport produit chez moi les $\frac{9}{10}$ de la certitude, ce premier témoin me fera faire les $\frac{9}{10}$ du chemin. Vient un second témoin aussi croyable que le premier ; il m'avance sur le chemin restant, précisément autant que le premier m'avoit avancé sur l'espace total : celui-ci m'avoit amené aux $\frac{9}{10}$ de la course, le second m'approche encore des $\frac{9}{10}$ de dixième restant ; de sorte qu'avec ces deux témoins j'ai fait les $\frac{99}{100}$ du tout. Un troisième de même poids me fait parcourir encore les $\frac{9}{10}$ du centième restant, entre la certitude où je suis ; il n'en restera plus que la millième, & j'aurois fait les $\frac{999}{1000}$ de la course, & ainsi de suite.

Cette méthode de calculer la *probabilité* du témoignage, est la même pour un nombre de témoins dont la crédibilité est différente ; ce qui, pour l'ordinaire, est plus conforme à la nature des choses. Qu'un fait me soit rendu par trois témoins, le rapport du premier est équivalent aux $\frac{5}{6}$ de la certitude ; le second ne produit chez moi que les $\frac{6}{7}$; & le troisième moins croyable que les deux autres, ne me donneroit qu'une $\frac{1}{2}$ certitude s'il étoit seul. Alors, supposant toujours que je n'ai aucune raison pour soupçonner quelque concert entr'eux, je dis que leur témoignage réuni me donne une *probabilité* qui est les $\frac{83}{84}$ de la certitude, parce que le premier m'approchant des $\frac{5}{6}$, il restera $\frac{1}{6}$, dont le second me fera parcourir les $\frac{6}{7}$; ainsi, il y aura encore $\frac{1}{7}$ de $\frac{1}{6}$, qui est $\frac{1}{42}$; & le troisième m'avançant de $\frac{1}{2}$, je ne suis plus éloigné du bout de la carrière que de $\frac{1}{84}$; j'aurois donc parcouru les $\frac{83}{84}$; d'ailleurs il est indifférent dans quel ordre on les prenne, le résultat est le même.

2.° Ce principe peut suffire pour tous les calculs sur la valeur du témoignage. Quant à la foi que mérite chaque témoin, elle est fondée sur sa *capacité* & sur son *intégrité*. Par la première, il ne peut se tromper ; par la seconde, il ne cherche pas à me tromper ; deux conditions également nécessaires ; l'une sans l'autre ne suffit pas. D'où il suit que la *probabilité* que fait naître le rapport d'un témoin en qui nous reconnoissons cette capacité & cette intégrité, doit être regardée & calculée comme une *probabilité* composée. Un homme vient me dire que j'ai le gros lot ; je le connois pour n'être pas fort intelligent ; il peut s'être trompé : tout compté, j'évalue la *probabilité* de sa capacité à $\frac{8}{9}$; mais peut-être se fait-il un plaisir de me tromper. Posons qu'il y ait 15 à parier contre 1 qu'il est de bonne foi, la *probabilité* de son intégrité sera donc de $\frac{15}{16}$. Je dis que l'assurance de son témoignage ou la *probabilité* composée de sa capacité, & de son intégrité, sera les $\frac{8}{9}$ de $\frac{15}{16}$, c'est-à-dire, $\frac{5}{6}$ de la certitude.

La maniere la plus sûre de juger de la capacité & de l'intégrité d'un témoin, seroit l'*expérience*. Il faudroit savoir au juste combien de fois ce même homme a trompé ou a dit la vérité ; mais cette expérience est bornée, & manque pour l'ordinaire. A son défaut on a recours aux bruits publics & particuliers, aux circonstances extérieures où se trouve le témoin. A-t-il reçu une bonne éducation ? est-il d'un rang qui est supposé l'engager à respecter davantage la vérité ? est-il d'un âge qui donne plus de poids à son témoignage ? est-il en cela désintéressé ? ou quel peut être son but ? en retire-t-il quelque avantage, ou évite-t-il par-là quelque peine ? son goût, sa passion sont-ils flattés à nous tromper ? est-ce une suite de la prévention, de la haine ? Tout autant de circonstances qu'il faut examiner si nous n'avons pas l'expérience, & dont il est bien difficile de déterminer la juste valeur.

De plus, la capacité d'un témoin suppose, outre les sens bien conditionnés, une certaine fermeté d'esprit qui ne se laisse ni épouvanter par le danger, ni surprendre par la nouveauté, ni entraîner par un jugement trop précipité. Il est plus croyable à proportion que la chose dont il nous parle lui est plus familière & plus connue ; son récit même fait souvent preuve de sa capacité, & m'annonce qu'il a pris ou négligé toutes les précautions nécessaires pour ne se pas tromper : plus il les a réitérées, plus il a le droit à ma confiance. Cette capacité à bien connoître, dépend encore de l'attention à observer, de la mémoire, du temps; autres conditions qui, jointes à la manière de narrer clairement & en détail, influent sur le degré de *probabilité* que mérite un témoin.

On ne doit pas négliger le silence de ceux qui auroient intérêt à contredire un témoignage, si du moins il n'est extorqué ni par la crainte, ni par l'autorité. Il est difficile à la vérité d'estimer le poids d'un pareil témoignage négatif; on peut assurer en général que celui qui ne fait simplement que se taire, mérite moins d'attention que celui qui assure un fait. Si néanmoins le fait est tel qu'il n'ait pu l'ignorer, s'il avoit servi à faire valoir le reste de son récit; s'il avoit été intéressé à le rapporter, ou si son devoir l'y appelloit; en pareil cas, il est certain que son silence vaut un témoignage, ou du moins affoiblit & diminue la *probabilité* des témoignages opposés.

Nous devons encore dire un mot sur les témoignages par ouï dire, ou sur l'affoiblissement d'un témoignage qui, passant de bouche en bouche, ne nous parvient qu'au moyen d'une chaîne de témoins. Il est clair qu'un témoin par ouï dire, toutes choses d'ailleurs égales, est moins croyable qu'un témoin oculaire; car, si celui-ci s'est trompé, ou a voulu tromper, le témoin par ouï dire qui le suit, quoique fidèle, ne nous rapportera qu'une erreur; & lors même que le premier auroit débité la vérité, si le témoin par ouï dire n'est pas fidèle, s'il a mal entendu, s'il a oublié ou confondu quelque partie essentielle du récit, s'il y mêle du sien, il ne nous rapporte plus la vérité pure; ainsi, la confiance que nous devons à ce second témoignage, s'affoiblit déjà, & s'affoiblira à mesure qu'il passera par plus de bouches, à mesure que la chaîne des témoins s'alongera. Il est aisé de calculer sur les principes établis, la valeur de cette *probabilité*.

Suivons l'exemple dont nous avons fait usage. Pierre m'annonce que j'ai eu un lot de mille livres: j'estime son témoignage aux $\frac{9}{10}$ de la certitude, c'est-à-dire, que je ne donnerai pas mon espérance pour 900 francs. Mais Pierre me dit qu'il le sait de Jacques; or, si Jacques m'avoit parlé, j'aurois estimé son rapport aux $\frac{9}{10}$, en le supposant aussi croyable que Pierre; ainsi, moi qui ne suis pas entièrement sûr que Pierre ne se soit pas trompé en recevant ce témoignage de Jacques, ou qu'il n'ait pas quelque dessein de me tromper, je ne dois compter que sur les $\frac{9}{10}$ de 900 livres, ou sur les $\frac{9}{10}$ des $\frac{9}{10}$ de 1000 livres, ce qui fait 810 livres. Si Jacques tenoit le fait d'un autre, je devrois encore prendre sur cette dernière assurance $\frac{9}{10}$, supposé ce troisième également croyable, & mon espérance se réduiroit aux $\frac{9}{10}$ des $\frac{9}{10}$ des $\frac{9}{10}$ de 1000 livres, ou à 729 livres, & ainsi de suite.

Qui voudra se donner la peine de calculer sur cette méthode, trouvera que, si la confiance qu'on doit avoir en chaque témoin est de $\frac{95}{100}$, le treizième témoin ne transmettra plus que la $\frac{1}{2}$ certitude, & alors la chose cessera d'être probable, ou il n'y aura pas plus de raison extrinséque pour la croire, que pour ne la pas croire. Si la *probabilité* dûe à chaque témoin est de $\frac{99}{100}$, elle ne se réduira à la $\frac{1}{2}$ certitude que quand le témoignage aura passé par soixante-dix bouches; &, si cette confiance étoit supposée de $\frac{999}{1000}$, il faudroit une chaîne de 7000 témoins pour rendre le fait incertain.

Ces calculs assez longs peuvent être abrégés par cette règle générale, dont l'algèbre simple nous fournit le résultat & la démonstration. Prenez le $\frac{7}{10}$ du quotient de la division de la *probabilité* d'un simple témoin par la *probabilité* contraire, comme ici de $\frac{95}{100}$, par $\frac{5}{100}$ ou de 95 par 5, qui est 19, dont je prends les $\frac{9}{10}$, & vous aurez le témoin qui vous laisse dans une demi-certitude; dans cet exemple, c'est 13 $\frac{3}{10}$, ce qui donne le treizième témoin.

Il en sera de même si les témoins successifs sont supposés de force inégale; d'où il y a lieu de conclure, en général, qu'il faut faire peu de fond sur les ouï-dires, sans se laisser aller cependant au pyrrhonisme historique, puisqu'ici on peut réunir les *probabilités* que donnent plusieurs chaînes collatérales de témoins successifs. Supposons qu'un fait nous parvienne par une simple succession de témoins de vive voix, de manière que chaque témoin succède à l'autre au bout de vingt ans, & que la confiance à chaque témoin diminue de $\frac{1}{10}$; par la règle précédente, au bout de douze successions, ou de 340 ans, le fait deviendroit incertain, n'étant prouvé que par ces 12 témoins; mais, si cette chaîne de témoins est fortifiée par neuf autres chaînes semblables qui concourent à attester la même vérité, alors il y aura plus de mille à parier contre un pour la vérité du fait; si l'on suppose cent chaînes de témoins, il y aura plus de deux millions contre un en faveur du fait.

Si le témoignage est transmis par écrit, la *probabilité* augmente infiniment, d'autant qu'il subsiste & se conserve bien plus long-temps; le témoignage concourant de plusieurs copies ou livres imprimés qui forment autant de différentes chaînes, donne une *probabilité* si grande qu'elle approche indéfiniment de la certitude; car, à supposer que chaque copie puisse durer 100 ans, ce qui est le moins, & qu'au bout de ce temps-là l'autorité, non pas d'une seule copie, mais de toutes celles qui ont été faites sur le même original, soit seulement $\frac{96}{100}$, alors il faudra plus de soixante-dix successions de 100 ans, ou 7000 ans pour que le fait devienne incertain; & si on suppose on suppose plusieurs chaînes de témoins qui concourent toutes à attester le même fait, la *probabilité* augmente si fort, qu'elle devient infiniment peu différente de la certitude entière, & surpassera de beaucoup l'assurance qu'on pourroit avoir de la bouche d'un ou même de plusieurs témoins oculaires. Il y a d'autres circonstances qu'il est aisé de supposer & qui démontrent la grande supériorité de la tradition par écrit sur la tradition orale.

Nous avons indiqué deux autres sources de *probabilité*, l'analogie & les hypothèses sur lesquelles nous renvoyons aux *articles* INDUCTION, ANALOGIE, HYPOTHESE, SUPPOSITION. Ces principes peuvent suffire pour expliquer toute la théorie de la *probabilité*. Nous n'avons donc que les élémens ; l'on en trouvera l'application dans tous les bons ouvrages, qui sont en grand nombre sur ce sujet. Tels sont les *Essais sur les probabilités de la vie humaine*, de M. Deparcieux ; *l'Analyse des jeux de hasard*, de M. de Montmord, qui donne la théorie des combinaisons, ainsi que l'*article* de ce Dictionnaire sous ce mot, & plusieurs autres qui y ont rapport, sur-tout l'*Ars conjectandi*, de M. Jacq. Bernoulli, & des *Mémoires* de M. Halley, qui se trouvent dans les transactions d'Angleterre, n.° 196 & suivans, qui tous servent à déterminer la vraisemblance des événemens, & les degrés par lesquels nous parvenons à la certitude morale.

Concluons qu'il ne seroit pas entièrement impossible de réduire toute cette théorie des *probabilités* à un calcul assez réglé, si de bons génies vouloient concourir par des recherches, des observations, une étude suivie, & une analyse du cœur & de l'esprit, fondés sur l'expérience, à cultiver cette branche si importante de nos connoissances, & si utile dans la pratique continuelle de la vie. Nous convenons qu'il y a encore beaucoup à faire, mais la considération de ce qui manque doit exciter à remplir ces guides ; & l'importance de l'objet offre de quoi dédommager amplement des difficultés.

PROBABILITÉ. Nous nous bornerons à donner ici les principes généraux du calcul des *probabilités*, dont on trouve des applications à divers articles.

I.

1. Le principe fondamental de ce calcul peut s'exprimer ainsi.

Soit A un événement, & N un autre événement contradictoire au premier (c'est-à-dire, qui, dans l'hypothèse, ne peut exister en même tems); que n exprime le nombre total des combinaisons également possibles, m celui des combinaisons qui donnent l'événement A, m' celui des combinaisons qui donnent l'événement N.

$\frac{m}{n}$ exprimera la *probabilité* de l'événement A, & $\frac{m'}{n}$ celle de l'événement N. $n = m + m'$.

2. Si on a trois événemens A, N, N', que n soit toujours le nombre total des combinaisons, m celui des combinaisons qui donnent A, m' celui des combinaisons qui donnent N, m'' celui des combinaisons qui donnent N', la *probabilité* de A sera $\frac{m}{n}$, celle de N sera $\frac{m'}{n}$, celle de N' $\frac{m''}{n}$, & l'on aura $n = m + m' + m''$.

Il est aisé de voir que cette deuxième définition est une suite de la première ; en effet, ici la *probabilité* de A est, par cette première définition, $\frac{m}{n}$, & celle de n'avoir pas A $\frac{m_{,}}{n}$, $m_{,} = m' + m''$; mais, si on n'a pas A, la *probabilité* de N est $\frac{m'}{m_{,}}$, & celle de N' $\frac{m''}{m_{,}}$: donc celle de N sera, en général, $\frac{m_{,}}{n} \times \frac{m'}{m_{,}} = \frac{m'}{n}$, & celle de N' $\frac{m_{,}}{n} \times \frac{m''}{m_{,}} = \frac{m''}{n}$. Ainsi, dans la suite de nos réflexions sur ce premier principe, nous ne considérerons que deux événemens.

3. Si $m' = o$, $n = m$, & la *probabilité* de A est $\frac{m}{n} = 1$; mais, si aucune combinaison possible ne donne l'événement N, cet événement est donc impossible, l'événement A arrivera donc nécessairement ; ainsi, 1 exprimera la probabilité d'un événement nécessaire, ou la certitude ; de même l'un des deux événemens A ou N arrive nécessairement, & la somme de leurs *probabilités* est $\frac{m}{n} + \frac{m'}{n} = 1$. Ce qui conduit encore à la même conclusion.

4. Il suit de la même définition que, si on prend un nombre t quelconque de combinaisons successives des événemens A & N, la *probabilité* de chacune sera exprimée par la suite des termes du binome $\frac{\overline{m + m'}^{\,t}}{n^t}$; en sorte que la *probabilité* d'avoir t fois, l'événement A sera $\frac{m^t}{n^t}$, celle d'avoir $t - 1$ fois l'événement A, & une fois l'événement N sera $\frac{t.\, m^{t-1}\, m'}{n^t}$, celle d'avoir l'événement A, $t - t'$ fois, & l'événement N, t' fois sera $\frac{t \cdot t - 1 \cdots t - t' + 1}{1 \cdot 2 \cdots t'}\, m^{t-t'}\, m'^{\,t'}$.

5. Nous avons appellé *probabilité* d'un événement, le nombre des combinaisons également possibles qui le donnent, divisé par le nombre total des combinaisons qui donnent cet événement ou l'événement contradictoire. Jusqu'ici c'est