und wenn man alle Größen etwa als Funktionen von v auf der Kurve $\mathfrak{C}$ auffaßt:

$$dH = \frac{d\mathfrak{Q}}{\Theta}$$

Integriert man nun von 0 bis 1, so findet man

$$\underline{[H]_0^1 = \int_0^1 \frac{d\mathfrak{Q}}{\Theta}}$$

und hat hier die bekannte Grundformel, die die Entropiedifferenz durch Wärmezufuhr und Temperatur darstellt. In der gewöhnlichen Theorie, die die Wärmezufuhr als das primäre betrachtet, benutzt man diese Formel geradezu als Definition der Entropie.

Nernst's dritter Wärmesatz!

§ 4. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir wenden uns nun endlich zu diesem von dem bisher behandelten gänzlich verschiedenen Gegenstande, der aber eine wiederum ganz analoge Behandlung zuläßt. Es erscheint mir überhaupt sehr ersprießlich, die verschiedensten Disciplinen parallel und vergleichend axiomatisch zu behandeln; man gewinnt dabei, worauf schon mehrfach hingewiesen wurde, interessante neue Ausblicke, und kann so erst die Fruchtbarkeit unserer Methode erschöpfen. In einzelnen Disciplinen sind nun schon vielfach Ansätze zur axiomatischen Betrachtung vorhanden (vgl. besonders die Referate in der Encyklopädie); daß aber ein Mathematiker verschiedene Gebiete gleichzeitig vergleichend untersuchte, ist bisher leider wohl noch nie vorgekommen.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat Bohlmann unter dem Einfluß unserer Bestrebungen eine Formulierung der Grundlagen versucht (Encykl. I.D.4 b, Lebensversicherungsmathematik), die ich hier wiedergeben will: Unter der „Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis E eintritt", versteht man einen gewissen positiven echten Bruch, der E zugeordnet ist:

$$0 \leqq p(E) \leqq 1$$

In dieser Schreibweise $p(E)$ denken wir uns E gewissermaßen als eine unbestimmte Variable allerallgemeinster Art von p. Ist insbesondere $p = 0$, so nennen wir das Ereignis E unmöglich, ist $p = 1$, so nennen wir es gewiß. Wir fassen das einfach als Definitionen auf, wiewohl im gegenwärtigen Zustande der Entwicklung besonders die Bezeichnungen „Axiom" und Definition noch etwas durcheinandergehen. Die symbolische Schreibweise von E als Argument dehnen wir jetzt noch etwas aus, und kommen dabei auf Bezeichnungsweisen, die wir im zweiten Hauptteil des Collegs mit Nutzen gebrauchen werden. Die Zusammenfassung „Ereignis E_1 und Ereignis E_2" (gleichzeitiges Eintreten beider) schreiben wir

$$\underline{E_1 + E_2},$$

die „entweder E_1 oder E_2":

$$\underline{E_1 \cdot E_2};$$

den Zusammenhang endlich: „Wenn E_1 ist, so ist stets auch E_2" oder „E_2 folgt aus E_1" schreiben wir

$$\underline{E_1 \mid E_2}.$$

Wir definieren nun weiter: Zwei Ereignisse E_1, E_2 schließen sich aus, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sowohl E_1 als auch E_2 eintritt 0 ist, in unserer Symbolik also, wenn $E_1 + E_2$ unmöglich ist, d. h.

$$\underline{p(E_1 + E_2) = 0}.$$

Wir stellen nun 2 allgemeine Axiome auf:

Axiom I: Die Wahrscheinlichkeit, daß eines von zwei sich ausschließenden Ereignissen E_1, E_2 eintritt, ist gleich der Summe derer, daß E_1, und derer daß E_2 eintritt:

$$\underline{p(E_1 \cdot E_2) = p(E_1) + p(E_2), \quad \text{wenn } p(E_1 + E_2) = 0}$$

Axiom II: Die Wahrscheinlichkeit, daß E_1 und E_2 zugleich eintreten, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeit von

E_1 in die Wahrscheinlichkeit dafür, daß E_2 in solchen Fällen eintritt, wo bereits E_1 eingetreten ist:

$$\underline{p(E_1 + E_2) = p(E_1) \cdot p(E_1 | E_2)}$$

Man nennt nun 2 Ereignisse <u>unabhängig</u>, wenn die Wahrscheinlichkeit ihres gleichzeitigen Eintretens gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten des Eintretens jedes einzelnen ist, symbolisch: wenn

$$\underline{p(E_1 + E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)}$$

Aus dem Vergleiche mit Ax. II folgt dann der <u>Satz</u>, daß für 2 unabhängige Ereignisse

$$p(E_2) = p(E_1 | E_2)$$

ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit von E_2 ist gleich der von E_2 unter den Fällen, wo E_1 bereits stattfindet. Man könnte dies auch direkt als Definition der Unabhängigkeit nehmen, und dann die vorige Definition mit Hilfe von Axiom II folgern.

Ich gehe auf den weiteren Ausbau der eigentlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht ein, sondern wende mich bald zu einer kurzen Darstellung ihrer <u>Anwendungen</u>.

<u>1. Die Ausgleichungsrechnung</u>. Es handelt sich hier um die Aufgabe, aus vielen Beobachtungen für weniger Größen