Journal of Lie Theory
Volume **11** (2001) 257–272

Quantification d'orbites coadjointes et théorie des contractions

Benjamin Cahen

Communicated by J. Ludwig

Abstract. P. Cotton et A.H. Dooley have shown by considering the example of the semi-simple Lie group $G{=}SL(2,\mathbb{R})$ and of its Cartan motion group, the semi-direct product $G'{=}\mathbb{R}^2{\times}SO(2)$, how to apply ideas coming from the theory of contractions to the Weyl transform on coadjoint orbits of Lie groups. Our aim is to obtain analogous results in the case of the contraction of the group $G{=}SO_0(n{+}1{,}1)$ to the generalized Poincaré group $G'{=}\mathbb{R}^{n+1}{\times}SO(n{,}1)$. Weyl transforms on the coadjoint orbits associated to the principal series of $G{=}SO_0(n{+}1{,}1)$ are constructed as well as on the integral coadjoint orbits of the group $G'{=}\mathbb{R}^{n+1}{\times}SO(n{,}1)$ admitting $SO(n)$ as small group and it is shown how the notion of contraction allows to relate these two constructions. Since the Weyl transforms are associated to the orbits, an infinitesimal version of classical results of the theory of contractions is obtained.

1. Introduction

Soient G un groupe de Lie connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{O}$ une orbite coadjointe de G supposée associée par la méthode des orbites à une représentation unitaire irréductible π de G. Si X appartient à $\mathfrak{g}$, on note $\tilde{X}$ la fonction définie sur $\mathcal{O}$ par

$$\tilde{X}\,(\xi) = \langle \xi\,,\, X \rangle \quad (\xi \in \mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*)\,.$$

La notion de correspondance de Weyl adaptée a été introduite dans [6]. Une correspondance de Weyl (ou calcul symbolique) sur $\mathcal{O}$ est une application linéaire bijective $f \to W(f)$ entre une classe de fonctions sur l'orbite $\mathcal{O}$ appelées symboles et une classe d'opérateurs de l'espace H de la représentation π [4], [13]. Une correspondance de Weyl est dite adaptée lorsque les fonctions $\tilde{X}(X \in \mathfrak{g})$ sont des symboles et qu'il existe un sous espace dense D de H formé de vecteurs C^∞ de la représentation π tel que, pour tout X dans $\mathfrak{g}$ et tout ϕ dans D,

$$W(i\tilde{X})\,\phi = d\pi\,(X)\,\phi\,.$$

ISSN 0949–5932 / $2.50

Introduire la notion de correspondance de Weyl adaptée est une façon de tenter de généraliser directement les “règles de quantification” usuelles. Suivant [9], on peut dire que “quantifier” l'orbite $\mathcal{O}$, c'est lui associer le couple formé de la représentation π et de la correspondance de Weyl adaptée W. Dire que W est adaptée signifie, en particulier, que les “observables” $\tilde{X}$ associés aux éléments X de $\mathfrak{g}$ correspondent à des opérateurs $W(\tilde{X})$ tels que, selon la prescription de Dirac,

$$[W(\tilde{X}), W(\tilde{Y})] = -iW(\{\tilde{X}, \tilde{Y}\})$$

pour X et Y dans $\mathfrak{g}$, $\{\ ,\ \}$ désignant le crochet de Poisson associé à la 2-forme de Kirillov de l'orbite $\mathcal{O}$.

Par exemple, supposons que le groupe G soit nilpotent réel et simplement connexe. Soit $\mathcal{O}$ une orbite coadjointe de G. Posons $n = \frac{1}{2}\dim\mathcal{O}$. Il existe alors une carte globale $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathcal{O}$ dans laquelle, si on note $(p,q) = (p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^{2n}$, la 2-forme de Kirillov de $\mathcal{O}$ s'écrit $dp \wedge dq = \Sigma_{1\leq i\leq n}\ dp_i \wedge dq_i$, et qui est telle que les fonctions $\tilde{X} \circ \psi\,(X \in \mathfrak{g})$ soient des polynômes en les variables p, q [3], [15]. Notons W la correspondance de Weyl usuelle qui associe en particulier à tout polynôme f en p,q un opérateur différentiel $W(f)$ sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [12]. Alors l'application $X \to W(i\tilde{X} \circ \psi)$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ qui coïncide sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec la différentielle de la représentation unitaire irréductible de G dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, associée à $\mathcal{O}$ par la méthode des orbites [18].

Un autre exemple important est celui où le groupe G est semi-simple compact connexe et simplement connexe. Soient alors $\mathcal{O}$ une orbite coadjointe entière de G et ρ la représentation unitaire irréductible de G associée à $\mathcal{O}$. L'espace E de la représentation ρ est un espace vectoriel complexe de dimension finie et le calcul symbolique de Berezin associe à tout opérateur de E une fonction sur l'orbite $\mathcal{O}$ à valeurs complexes appelée symbole de l'opérateur [1], [5]. Pour X élément de $\mathfrak{g}$, la fonction $\tilde{X}$ sur $\mathcal{O}$ est alors un symbole du calcul de Berezin, et l'application qui associe à X l'opérateur de E dont le symbole est la fonction $i\tilde{X}$, coïncide avec la différentielle de la représentation ρ [6].

Outre ces deux exemples, des correspondances de Weyl adaptées ont été construites dans le cas des orbites associées aux représentations des séries discrète [2] et principale [7] d'un groupe de Lie connexe, semi-simple non compact et dans le cas des orbites massives (entières) d'un groupe de Poincaré généralisé [8].

Ces constructions ont par ailleurs diverses applications en analyse harmonique et en théorie des déformations: définition de transformations de Fourier généralisées [3], [19], constructions de star-produits covariants sur des orbites coadjointes de groupes de Lie, théorie des star-exponentielles et des star-représentations [6], [13].

Le présent travail est motivé par un article récent de P. Cotton et A.H. Dooley où il est proposé d'utiliser la notion de correspondance de Weyl adaptée dans le cadre de la théorie des contractions des groupes et algèbres de Lie [10].

Les contractions de groupes et d'algèbres de Lie, utilisées en physique théorique, ont été pendant longtemps peu étudiées mathématiquement à cause d'une définition peu commode basée sur les constantes de structure des algèbres de Lie (voir [11] et ses références). Dans les années 1980, A.H. Dooley et J.W. Rice ont en donné une nouvelle présentation et ont étudié notamment les contractions d'un groupe de Lie semi-simple vers son groupe des déplacements [11]. La situation type, qui recouvre une large classe d'exemples, est la suivante: soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et K un sous groupe réductif de G. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K admet alors un supplémentaire V dans $\mathfrak{g}$, invariant sous l'action adjointe de K et on forme le produit semi direct $V \times K$. Pour $\lambda > 0$, on considère l'application $c_\lambda : V \times K \to G$ définie par

$$c_\lambda(v, k) = \exp_G(\lambda v)\, k$$

pour $v \in V$ et $k \in K$, dont la différentielle $dc_\lambda : V + \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ est donnée par

$$dc_\lambda(v, A) = \lambda v + A$$

pour $v \in V$ et $A \in \mathfrak{k}$. On a

$$\lim_{\lambda \to 0} dc_\lambda^{-1}\,[dc_\lambda(X), dc_\lambda(Y)]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathrm{Lie}\,(V \times K)}$$

pour X et Y dans $\mathfrak{g}$, et on dit que $V \times K$ est une contraction de G relativement à K.

L'intérêt de la notion de contraction est de relier l'analyse harmonique de $V \times K$ à celle de G. Dans [11] par exemple, A.H. Dooley et J.W. Rice ont étudié le cas où G est semi-simple, connexe non compact et K un sous groupe compact de G, tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus V$ soit alors une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$, montrant que les représentations unitaires irréductibles génériques du produit semi direct $V \times K$ s'obtiennent comme limites, en un certain sens, de représentations de la série principale de G. De façon analogue, G. Primet s'est intéressé au cas où K n'est pas compact et a montré en particulier que les représentations de masse réelle du groupe de Poincaré généralisé $\mathbb{R}^{n+1} \times SO_0(n, 1)$ peuvent être obtenues comme limites de représentations de la série principale de $SO_0(n+1, 1)$ [14].

Dans [10], P. Cotton et A.H. Dooley examinent le cas où $G = SL(2, \mathbb{R})$ et $K = SO(2)$. Remarquant que les représentations de la série principale de $SL(2, \mathbb{R})$ se contractent vers les représentations unitaires irréductibles du produit semi direct $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$, ils construisent des correspondances de Weyl adaptées sur les orbites correspondantes et interprètent les correspondances de Weyl adaptées associées aux représentations de $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$ comme limites (en un sens précisé dans [10]) de correspondances de Weyl adaptées associées aux représentations de la série principale de $SL(2, \mathbb{R})$. Cela permet notamment d'obtenir, dans ce cas particulier, une version infinitésimale des résultats de [11].

Toutefois, la construction de [10] est grandement simplifiée par le fait que les orbites coadjointes considérées peuvent être paramétrées par $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{T}$ désignant le tore) ce qui permet rapidement de définir dans ce cas des correspondances de Weyl adaptées dérivées de la correspondance de Weyl usuelle. Il semblait dès lors intéressant d'appliquer les idées de [10] à un exemple plus compliqué.

Le but du présent travail est d'obtenir des résultats analogues à ceux de [10] dans le cas de la contraction des représentations de la série principale du groupe $G = SO_0(n+1, 1)$ vers les représentations de masse réelle du groupe de Poincaré généralisé $G' = \mathbb{R}^{n+1} \times SO_0(n, 1)$.

Pour cela, on commence par rappeler, dans la section 2, les résultats de [8] où l'on a construit une correspondance de Weyl adaptée sur Ω, orbite coadjointe entière de G' dont le petit groupe est $SO(n)$ (orbite de masse réelle), en utilisant un symplectomorphisme entre Ω (munie de sa 2-forme de Kirillov) et le produit symplectique $\mathbb{R}^{2n} \times \Omega'$ où Ω' est une orbite coadjointe entière du groupe compact $SO\,(n)$ (munie de sa 2-forme de Kirillov), $\mathbb{R}^{2n}$ étant muni de sa structure symplectique canonique.

On montre ensuite dans la section 3 que si $\mathcal{O}$ est une orbite coadjointe de G associée à une représentation de la série principale de G on peut trouver deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_+$ et $\mathcal{O}_-$ de $\mathcal{O}$, symplectomorphes aux produits symplectiques respectifs $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{O}'_+$, $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{O}'_-$, où $\mathcal{O}'_+$ et $\mathcal{O}'_-$ sont deux orbites coadjointes de $SO\,(n)$, et tels que $\mathcal{O}_+ \cup \mathcal{O}_-$ soit un ouvert dense de $\mathcal{O}$. Cela permet de construire une correspondance de Weyl adaptée au dessus de $\mathcal{O}$.

Dans la section 4 enfin, on étudie la contraction des représentations de la série principale de G vers les représentations de masse réelle de G' au moyen des correspondances de Weyl associées. On montre en particulier que les différentielles des représentations de masse réelle de G' sont limites, dans un sens qui sera précisé plus loin, de différentielles de représentations de la série principale de G, obtenant ainsi une version infinitésimale du théorème II.5 de [14].

2. Quantification d'une orbite massive du groupe de Poincaré

2.1. Soit $K = SO_0\,(n\,,\,1)$ $(n \geq 2)$ la composante connexe de l'identité du groupe orthogonal de la forme bilinéaire symétrique définie sur $V = \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\langle p\,,\,p'\rangle = -(\Sigma_{1\leq i\leq n}\; p_i\, p'_i) + p_{n+1}\, p'_{n+1}\,,\; p \in V\,,\; p' \in V\,.$$

On note G' le groupe produit semi direct $V \times K$ dont la loi est donnée par

$$(v\,,\,k).(v'\,,\,k') = (v + kv'\,,\,kk') \quad v\,,\,v' \in V \quad k\,,\,k' \in K\,.$$

Soient $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{g}' \simeq V \times \mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de G'. On identifie V^* à V au moyen de la forme $\langle\ ,\ \rangle$; le dual $\mathfrak{g}'^*$ de $\mathfrak{g}'$ s'identifie alors à $V \times \mathfrak{k}^*$. L'action coadjointe de G' sur $\mathfrak{g}'^*$ est

$$(v\,,\,k).(p\,,\,f) = (kp\,,\,k.f + v \wedge kp)\,, \quad (v\,,\,k) \in G'\,, \quad (p\,,\,f) \in \mathfrak{g}'^*\,,$$

où $v \wedge p$ désigne l'élément de $\mathfrak{k}^*$ défini par $\langle v \wedge p, A\rangle = \langle p, Av\rangle$ pour $A \in \mathfrak{k}$ et $k.f$ l'action coadjointe de $k \in K$ sur $f \in \mathfrak{k}^*$.

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, $K_0 \simeq SO\,(n)$ le stabilisateur de e_{n+1} dans K, $\mathfrak{k}_0$ l'algèbre de Lie de K_0 et $\mathcal{P}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}_0$ dans $\mathfrak{k}$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{k}$. Notons $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n+1}$ la base canonique de l'espace des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients réels. $\mathfrak{k}_0$ est alors, en tant qu'espace vectoriel, engendré par les matrices $A_{ij} = E_{ji} - E_{ij}, (1 \leq i < j \leq n)$ et $\mathcal{P}$ est l'espace vectoriel engendré par les matrices $T_k = E_{kn+1} + E_{n+1k}, (1 \leq k \leq n)$. On notera W_k l'élément $(e_k\,,\,0)$ de $\mathfrak{g}'$ pour $1 \leq k \leq n+1$.

L'orbite de e_{n+1} dans $V^* \simeq V$ sous l'action de K est la nappe d'hyperboloïde H^+ ensemble des $p \in V$ tels que $\langle p\,,\, p\rangle = 1$ et $p_{n+1} > 0$. Pour tout p dans H^+, il existe un unique élément T_p de $\mathcal{P}$ tel que si $M_p = \exp T_p$, alors $M_p\, e_{n+1} = p$.

Si φ_0 est un élément de $\mathfrak{k}_0^*$ on note $\tilde{\varphi}_0 \in \mathfrak{k}^*$ le prolongement de φ_0 à $\mathfrak{k}$ tel que $\tilde{\varphi}_0|_{\mathcal{P}} = 0$. On considère l'orbite coadjointe $\Omega(\xi_0)$ de $\xi_0 = (me_{n+1}\,,\,\tilde{\varphi}_0) \in \mathfrak{g}^*$ où $m > 0$ et $\varphi_0 \in \mathfrak{k}_0^*$. On note $\Omega(\varphi_0)$ l'orbite de $\varphi_0 \in \mathfrak{k}_0^*$ sous l'action coadjointe de K_0. On munit $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la 2-forme symplectique $d\tilde{p} \wedge d\tilde{q} = \Sigma_{1\le i\le n}\, d\tilde{p}_i \wedge d\tilde{q}_i$ et les orbites coadjointes $\Omega\,(\xi_0)$ et $\Omega\,(\varphi_0)$ de leurs 2-formes de Kirillov. On a alors (voir [8]):

Proposition 2.1. *L'application ψ: $(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi) \to \psi\,(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)$ de $\mathbb{R}^{2n} \times \Omega\,(\varphi_0)$ dans $\mathfrak{g}'^*$ définie par*

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{ij}\ (\psi\,(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)) &= \langle\varphi,\, A_{ij}\rangle + p_i\, q_j - p_j\, q_i\,,\ 1 \le i < j \le n\,,\\
\tilde{T}_k\ (\psi\,(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)) &= -\langle\varphi,\, \mathrm{th}\,(\frac{1}{2}\ \mathrm{ad}\ T_p)T_k\rangle + p_{n+1}\, q_k\,,\ 1 \le k \le n\,,\\
\tilde{W}_k\ (\psi\,(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)) &= -m\, p_k\,,\ 1 \le k \le n\,,\\
\tilde{W}_{n+1}\ (\psi\,(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)) &= m\, p_{n+1}\,,
\end{aligned}$$

où $p = (\tilde{p}\,,\, p_{n+1}) \in H^+$, est un symplectomorphisme du produit symplectique $\mathbb{R}^{2n} \times \Omega(\varphi_0)$ dans $\Omega(\xi_0)$.

2.2. L'orbite $\Omega\,(\xi_0)$ est entière si et seulement si $\Omega\,(\varphi_0)$ l'est [16]. Dans ce cas, notons ρ la représentation unitaire irréductible de $K_0 \simeq SO\,(n)$ associée à $\Omega\,(\varphi_0)$, E l'espace de ρ. A l'orbite $\Omega\,(\xi_0)$ la méthode des orbites associe l'induite unitaire $\sigma = \mathrm{Ind}_{V\times K_0}^{G'}\,(e^{i<me_{n+1}\,,\,\cdot>} \otimes \rho)$ habituellement réalisée dans l'espace de Hilbert complété de l'espace des fonctions $\phi : H^+ \to E$ de classe C^∞ à support compact pour la norme définie par

$$\|\phi\|^2 = \int_{H^+} \langle\phi\,(p),\, \phi(p)\rangle_E\, d\mu\,(p)$$

où $\langle\ ,\ \rangle_E$ est le produit hilbertien de E et $d\mu\,(p) = (1/p_{n+1})\, dp_1 \ldots dp_n$ la mesure K-invariante de H^+, comme suit:

$$\sigma\,(v\,,\,k)\,\phi\,(p) = e^{i\,m\langle p,v\rangle}\,\rho(M_p^{-1}\,k\,M_{k^{-1}\,p})\,\phi\,(k^{-1}\,p), \quad (v\,,\,k) \in G'\,,\, p \in H^+\,.$$

Ici, pour utiliser la correspondance de Weyl usuelle sur $\mathbb{R}^{2n}$, on préfère réaliser σ dans le complété $\mathcal{H}_\sigma$ de l'espace $C_0^\infty\,(\mathbb{R}^n\,,\,E)$ des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ de classe C^∞ à support compact pour la norme définie par

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\varphi(\tilde{p}),\, \varphi(\tilde{p})\rangle_E\, d\tilde{p}$$

où $d\tilde{p} = d\tilde{p}_1 \ldots d\tilde{p}_n$ est la mesure de Lebesgue

$$\sigma\,(v\,,\,k)\,\varphi\,(\tilde{p}) = e^{im\langle p,\,v\rangle}\,\rho\,\left(M_p^{-1}\,k\,M_{k^{-1}\,p}\right)\left((k^{-1}\,p)_{n+1}/p_{n+1}\right)^{1/2}\,\varphi\,(k^{-1}.\tilde{p})$$

où $p = (\tilde{p}\,,\, p_{n+1}) \in H^+$ et $k.\tilde{p}$ désigne l'action de $k \in K$ sur $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ induite par l'action de K sur H^+.

Pour calculer la différentielle $d\sigma$ de la représentation σ, on utilise le lemme suivant (voir [6]).

Lemme 2.2. *Pour $p \in H^+$ et $X \in \mathfrak{k}$ on a*

$$\frac{d}{dt}(M_p^{-1} \exp(t\,X)\; M_{\exp(-tX)p})|_{t=0} \;=\; pr_{\mathfrak{k}_0}(X) - \operatorname{th}(\frac{1}{2}\operatorname{ad} T_p)\, pr_{\mathcal{P}}(X)$$

où $pr_{\mathfrak{k}_0}$ et $pr_{\mathcal{P}}$ désignent les projections respectives sur $\mathfrak{k}_0$ et $\mathcal{P}$ dans la somme directe $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathcal{P}$.

Un calcul direct (voir [8]) donne alors:

Proposition 2.3. *Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E)$, on a*

$$d\sigma(A_{ij})\,\varphi(\tilde p) = d\rho(A_{ij})\,\varphi(\tilde p) + \left(p_j\,\frac{\partial}{\partial p_i} - p_i\,\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\varphi(\tilde p)\ ,\ 1 \le i < j \le n\,,$$

$$d\sigma(T_k)\,\varphi(\tilde p) = -d\rho(\operatorname{th}(\frac{1}{2}\operatorname{ad} T_p)\,T_k)\,\varphi(\tilde p) - p_{n+1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_k} - \frac{p_k}{2p_{n+1}}\,\varphi(\tilde p)\,,\ 1 \le k \le n\,,$$

$d\sigma(W_k)\,\varphi(\tilde p) = -im\,p_k\,\varphi(\tilde p)$, $1 \le k \le n$, $d\sigma(W_{n+1})\,\varphi(\tilde p) = im\,p_{n+1}\,\varphi(\tilde p)$, où $\tilde p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p_{n+1} = (1 + \Sigma_{1\le l\le n}\, p_l^2)^{1/2}$.

2.3. On dira alors qu'une fonction $f : \Omega(\xi_0) \to \mathbb{C}$ est un symbole sur $\Omega(\xi_0)$ si, pour tout $(\tilde p, \tilde q)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la fonction $\varphi \to (f \circ \psi)(\tilde p, \tilde q, \varphi)$ est le symbole, dans le calcul symbolique de Berezin sur l'orbite $\Omega(\varphi_0)$ (voir, par exemple, [1], [5]) d'un opérateur de E que l'on notera $\hat f(\tilde p, \tilde q)$ (on rappelle que E est un espace vectoriel complexe de dimension finie). Etant donné un symbole f sur $\Omega(\xi_0)$ on définit, lorsque cela a un sens, un opérateur $W'(f)$ de $\mathcal{H}_\sigma$ en formant la transformée de Weyl de la fonction $\hat f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to E$ au moyen de la formule intégrale suivante

$$W'(f)\ \varphi(\tilde p) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\,(t,\tilde q)}\, \hat f(\tilde p + \frac{t}{2}, \tilde q)\, \varphi(t + \tilde p)\, dt\, d\tilde q\,. \tag{1}$$

La formule (1) permet en particulier d'associer à tout symbole f polynomial en la variable $\tilde q$, c'est à dire tel que $\hat f$ soit une fonction de classe C^∞ polynomiale en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ un opérateur différentiel $W'(f)$ agissant sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ [12], [17]. Plus précisément, si $f \circ \psi = u(\tilde p)\, q_1^{k_1}\, q_2^{k_2} \ldots q_n^{k_n}$ pour $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dans $\mathbb{N}$ et $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ on obtient à l'aide d'intégrations par parties et du théorème d'inversion de Fourier, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
W'(f)\,\varphi(\tilde p) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\,(t,\tilde q)}\, u(\tilde p + \frac{t}{2})\, q_1^{k_1}\, q_2^{k_2} \ldots q_n^{k_n}\, \varphi(t + \tilde p)\, dt\, d\tilde q \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\alpha_n} \left(e^{i(t,\tilde q)}\right) u(\tilde p + \frac{t}{2})\, \varphi(t + \tilde p)\, dt\, d\tilde q \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\,(t,\tilde q)} \left(-\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(-\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\alpha_n} \left(u(\tilde p + \frac{t}{2})\, \varphi(t + \tilde p)\right) dt\, d\tilde q \\
&= \left[\left(-\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(-\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\alpha_n} \left(u(\tilde p + \frac{t}{2})\, \varphi(t + \tilde p)\right)\right]_{t=0}.
\end{aligned}$$

Par suite, pour $f \circ \psi = u(\tilde p)$ on trouve

$$W'(f)\ \varphi(\tilde p) = u(\tilde p)\ \varphi(\tilde p)$$

et pour $f \circ \psi = u(\tilde{p})\, q_k$ on trouve

$$W'(f)\,\varphi(\tilde{p}) = -\frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial p_k}\,\varphi(\tilde{p}) + u(\tilde{p})\,\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\right).$$

On déduit alors de ces remarques et de la proposition 2.3 le résultat suivant (voir [8]).

Proposition 2.4. *Pour tout X de $\mathfrak{g}'$, la fonction $\tilde{X}$ définie sur $\Omega(\xi_0)$ est un symbole polynomial en la variable $\tilde{q}$ et, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E)$, on a $W'(i\tilde{X})\,\varphi = d\sigma(X)\,\varphi$.*

3. Quantification d'une orbite principale du groupe $SO_0(n+1, 1)$

3.1. Soient $G = SO_0(n+1, 1)$ et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G.
Pour décrire la série principale de G, on introduit à présent quelques notations. On considère la décomposition d'Iwasawa $G = K'AN$ de G où K' est le groupe des matrices du type

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $k \in SO(n+1)$, A le groupe abélien des matrices

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & I_n & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et N le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}|x|^2 & x & \frac{1}{2}|x|^2 \\ -x^{tr} & I_n & x^{tr} \\ -\frac{1}{2}|x|^2 & x & 1 + \frac{1}{2}|x|^2 \end{pmatrix}$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Le centralisateur M de A dans K' est le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $k \in SO(n)$. On note $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}$ les algèbres de Lie respectives des groupes A et M.

Le groupe $K = SO_0(n, 1)$ sera considéré comme un sous groupe de G à l'aide du plongement

$$k \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

et l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K sera alors considérée comme une sous algèbre de $\mathfrak{g}$.

Soit $(E_{ij})_{0\leq i,j\leq n+1}$ la base canonique de l'espace des matrices carrées d'ordre $n+2$ à coefficients réels.
On complète la base de $\mathfrak{k}$ de la section 2 formée par les matrices $A_{ij} = E_{ji} - E_{ij}$ $(1 \leq i < j \leq n)$, $T_k = E_{kn+1} + E_{n+1\,k}$ $(1 \leq k \leq n)$ en une base de $\mathfrak{g}$ en lui adjoignant les matrices $B_k = E_{0\,k} - E_{k\,0}(1 \leq k \leq n)$ et $D = E_{0\,n+1} + E_{n+1\,0}$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 \in \mathfrak{m}^*$. On note χ_α le caractère de A défini par $\chi_\alpha(\exp t\,D) = e^{i\alpha t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On suppose que l'orbite $\Omega(\varphi_0)$ de φ_0 sous l'action coadjointe de $M \simeq SO(n)$ est entière, associée à une représentation unitaire irréductible ρ de M, d'espace E. On note ξ_0 l'élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\zeta_0|_{\mathfrak{m}} = \varphi_0$, $\zeta_0(D) = \alpha$ et $\zeta_0(X) = 0$ pour tout X appartenant au complémentaire orthogonal de $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. La méthode des orbites associe alors à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}(\zeta_0) \subset \mathfrak{g}^*$ de ζ_0 la représentation induite unitaire $\pi = Ind_{M\,A\,N}^G(\rho \otimes \chi_\alpha \otimes 1_N)$ [7].

3.2. La représentation π est habituellement réalisée dans un espace de fonctions de carré intégrable de G/MAN dans E. Ici, on va donner une réalisation de π mieux adaptée à notre problème de contractions.

Le groupe $G = SO_0(n+1, 1)$ agit de façon naturelle sur le cône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ d'équation $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0$ donc sur l'espace $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ ensemble des droites vectorielles $\mathbb{R}(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ où $(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{C}$. Cette action est transitive et le stabilisateur de $\mathbb{R}(1, 0, ..., 0, 1)$ pour cette action est le groupe $M\,A\,N$. D'où $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \simeq G/MAN$. D'autre part, l'application $\mathbb{R}(x_0\,, x_1, \ldots, x_{n+1}) \to (x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0\,, x_{n+1}/x_0)$ est une bijection continue d'un ouvert dense de $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ dans l'hyperboloïde H ensemble des $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $-\Sigma_{1\leq i\leq n}\, p_i^2 + p_{n+1}^2 = 1$ et permet de transporter l'action de G sur $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ en une action de G sur H définie presque partout. On peut remarquer que la restriction de cette dernière action à $K = SO_0(n, 1) \subset G$ est l'action habituelle de $SO_0(n, 1)$ sur H.

L'hyperboloïde H est réunion de ses deux nappes $H^+ = \{p \in H : p_{n+1} > 0\}$ et $H^- = \{p \in H : p_{n+1} < 0\}$. On pose, pour $p \in H^+$, $M_p = \exp T_p$ où T_p a été défini dans la section 2 et pour $p \in H^-$, $M_p = w \exp T_{w.p}$ où $w = Diag(-1, -1, 1, \ldots, 1) \in G$. Pour $p \in H^-$, T_p désignera la matrice $T_{p'}$ où $p' = (p_1, \ldots, p_n, -p_{n+1})$. Notons $g.p$ l'action de $g \in G$ sur $p \in H$ définie plus haut. On a, pour tout $p \in H$, $M_p.e_{n+1} = p$.

On utilise alors la section $p \to M_p$ de H dans G ainsi définie pour réaliser la représentation π dans le complété $\mathcal{H}_\pi$ de l'espace $C_0^\infty(H, E)$ des fonctions $\phi : H \to E$ de classe C^∞ à support compact pour la norme définie par $\|\phi\|^2 = \int_H \langle\phi(p), \phi(p)\rangle\, d\nu(p)$, ν désignant la mesure quasi invariante sur H définie par

$$\int_H \phi(p)\, d\nu(p) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi^+(\tilde{p})\, d\tilde{p} + \int_{\mathbb{R}^n} \phi^-(\tilde{p})\, d\tilde{p}$$

où, pour $\phi \in C_0^\infty(H, E)$, on a posé

$$\phi^+(p_1, \ldots, p_n) = \phi\left(p_1, \ldots, p_n,\ (1 + \Sigma_{1\leq i\leq n}\, p_i^2)^{1/2}\right)$$

$$\phi^-(p_1, \ldots, p_n) = \phi\left(p_1, \ldots, p_n,\ -(1 + \Sigma_{1\leq i\leq n}\, p_i^2)^{1/2}\right)$$

et où $d\tilde{p} = dp_1 dp_2 \dots dp_n$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. On obtient, par un calcul habituel (voir, par exemple, [14])

$$\pi\,(g)\;\phi\,(p) = \delta\,(g\,,\,p)\;(\chi_\alpha \otimes \rho \otimes 1_N)\,(M_p^{-1}\,g\;M_{g.p}^{-1})\,\phi\,(g^{-1}.p)$$

où δ est le multiplicateur correspondant à la mesure quasi invariante ν sur H. Remarquons que la matrice $M_p^{-1}\,g\;M_{g.p}^{-1}$ stabilise e_{n+1} (lorsque $g.p$ est défini) donc appartient à MAN.

On a besoin, pour la suite, de calculer la différentielle $d\pi$ de la représentation π. Ce calcul se fait de façon analogue à celui de la différentielle $d\sigma$ de la représentation σ de la section 2 (voir [8]) à l'aide des lemmes suivants.

Lemme 3.1. *On pose pour $p \in H$ et $X \in \mathfrak{g}$*

$$L\,(p\,,\,X) = \frac{d}{dt}(\,M_p^{-1}\;\exp{(t\,X)}\;M_{\exp{(-t\,X)}.p})|_{t=0}.$$

Alors pour $p \in H^+$,

$$L\,(p\,,\,X) = pr_1\,(\mathrm{Ad}\;M_p^{-1}.X) + \mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\;\mathrm{ad}\;T_p\right)\;pr_2\;\left(\mathrm{Ad}\;M_p^{-1}\,X\right)$$

où pr_1, pr_2 désignent les projections respectives sur $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathcal{P}$ dans la somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathcal{P}$, et pour $p \in H^-$,

$$L(p\,,\,X) = L(w.p\,,\,\mathrm{Ad}\,wX)\,.$$

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 2.2 (voir [6]). ■

Lemme 3.2. *Pour $p \in H^+$, on a $L(p,X) = X$ pour $X \in \mathfrak{m}$, $L(p,X) = -\,\mathrm{th}(\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}\;T_p)X$ pour $X \in \mathcal{P}$ ainsi que $L(p,D) = p_{n+1}\,D$ et $L(p,B_k) = -p_k\,D +$ $\mathrm{th}\,(\frac{1}{2}\;\mathrm{ad}\;T_p)T_k$ pour $k = 1,...,n$.*

Preuve. Ce résultat se déduit immédiatement du lemme 3.1 précédent. ■

Lemme 3.3. *Pour $p \in H^+$, on a $\delta(k\,,\,p)^2 = (k\,p)_{n+1}/p_{n+1}$ pour $k \in K$,*

$$\delta(\exp{(t\,D)}\,,\,p)^2 = \frac{p_{n+1}\;\mathrm{ch}\,t + \mathrm{sh}\,t}{p_{n+1}|\;\mathrm{ch}\,t + \mathrm{sh}\,t\,p_{n+1}|^{n+1}},$$

et $\delta(\exp{(t\,B_l)}\,,\,p)^2 = \frac{1}{|\cos\,t - p_l\,\sin\,t|^{n+1}}$ pour $l = 1,2,...,n$ et t réel assez proche de 0.

Preuve. Pour vérifier la première égalité, on calcule le jacobien de l'application $p \to k.p$ en remarquant que k s'écrit $(\exp\,T)u$ où $T \in \mathcal{P}$ et $u \in SO(n)$. Pour les deux suivantes, on calcule de même les jacobiens des applications $p \to \exp{(t\,D)}.p$ et $p \to \exp{(t\,B_k)}.p$. ■

Proposition 3.4. *Soit $\phi \in C_0^\infty(H, E)$. Pour un élément $p \in H$, posons $\tilde{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Alors pour $p \in H^+$ on a*

$$
\begin{aligned}
d\pi\,(A_{ij})\,\phi(p) &= d\rho\,(A_{ij})\,\phi^+(\tilde{p}) + \left(p_j\,\frac{\partial}{\partial p_i} - p_i\,\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\,\phi^+\,(\tilde{p}),\\
d\pi\,(T_k)\,\phi(p) &= -d\rho\,(\mathrm{th}\,(\frac{1}{2}\ \mathrm{ad}\ T_p)T_k)\,\phi^+\,(\tilde{p}) - p_{n+1}\,\frac{\partial\phi^+}{\partial p_k} - \frac{p_k}{2p_{n+1}}\,\phi^+\,(\tilde{p}),\\
d\pi\,(D)\,\phi(p) &= \left(\frac{1}{2}\,(n+1)\,p_{n+1} - \frac{1}{2p_{n+1}}\right)\,\phi^+\,(\tilde{p}) + i\alpha\,p_{n+1}\,\phi^+\,(\tilde{p})\\
&\quad + p_{n+1}\,\Sigma_{1\le l\le n}\,p_l\,\frac{\partial\phi^+}{\partial p_l},\\
d\pi\,(B_k)\,\phi(p) &= d\rho\,(\mathrm{th}\,(\frac{1}{2}\ \mathrm{ad}\ T_p)T_k)\,\phi^+\,(\tilde{p}) - \left(\frac{n+1}{2} + i\alpha\right)\,p_k\,\phi^+\,(\tilde{p})\\
&\quad - p_k\,(\Sigma_{1\le l\le n}\,p_l\,\frac{\partial\phi^+}{\partial p_l}) - \frac{\partial\phi^+}{\partial p_k}
\end{aligned}
$$

et pour $p \in H^-$,

$$
\begin{aligned}
d\pi\,(A_{ij})\,\phi\,(p) &= d\rho\,(\mathrm{Ad}\ w.A_{ij})\,\phi^-(\tilde{p}) + \left(p_j\,\frac{\partial}{\partial p_i} - p_i\,\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\,\phi^-\,(\tilde{p}),\\
d\pi\,(T_k)\,\phi\,(p) &= d\rho\,\left(\mathrm{Ad}\ w\,\left(\mathrm{th}\,(\frac{1}{2}\ \mathrm{ad}\ T_p)T_k\right)\right)\,\phi^-\,(\tilde{p}) - p_{n+1}\,\frac{\partial\phi^-}{\partial p_k}\\
&\quad - \frac{p_k}{2p_{n+1}}\,\phi^-\,(\tilde{p}),\\
d\pi\,(D)\,\phi\,(p) &= \left(\frac{1}{2}\,(n+1)\,p_{n+1} - \frac{1}{2p_{n+1}}\right)\,\phi^-\,(\tilde{p}) + i\alpha\,p_{n+1}\,\phi^-\,(\tilde{p}),\\
&\quad + p_{n+1}\,\Sigma_{1\le l\le n}\,p_l\,\frac{\partial\phi^-}{\partial p_l}\\
d\pi\,(B_k)\,\phi\,(p) &= d\rho\,\left(\mathrm{Ad}\ w\,\left(\mathrm{th}\,(\frac{1}{2}\ \mathrm{ad}\ T_p)T_k\right)\right)\,\phi^-\,(\tilde{p})\\
&\quad - \left(\frac{n+1}{2} + i\alpha\right)\,p_k\,\phi^-\,(\tilde{p}) - p_k\,(\Sigma_{1\le l\le n}\,p_l\,\frac{\partial\phi^-}{\partial p_l}) - \frac{\partial\phi^-}{\partial p_k}\,.
\end{aligned}
$$

3.3. Dans le but de définir une correspondance de Weyl adaptée sur l'orbite $\mathcal{O}\,(\zeta_0)$, on va introduire à présent un paramétrage de cette orbite.

Lemme 3.5. *L'application $\varepsilon : g.\zeta_0 \to g.e_{n+1}$ est définie sur un ouvert dense de $\mathcal{O}\,(\zeta_0)$ qui s'écrit $\mathcal{O}^+ \cup \mathcal{O}^-$ où $\mathcal{O}^+ = \exp\,(\mathcal{P})\,M\,A\,N\,.\zeta_0$ et $\mathcal{O}^- = w.\mathcal{O}^+$. On a alors $\mathcal{O}^+ = \varepsilon^{-1}\,(H^+)$ et $\mathcal{O}^- = \varepsilon^{-1}\,(H^-)$.*

Preuve. Le stabilisateur de ζ_0 dans G est, d'après [6], lemme 1, le groupe $M'A$ où M' est le stabilisateur de φ_0 dans M donc est inclus dans $M\,A\,N$ ce qui montre que ε est bien définie sur l'ouvert dense de $\mathcal{O}\,(\zeta_0)$ formé des points $g.\zeta_0$ tels que $g.e_{n+1}$ soit défini i.e. $g_{00} + g_{0\,n+1} \neq 0$. Lorsque $g.e_{n+1}$ est défini dans H, on a ou bien $g.e_{n+1} = p \in H^+$ ce qui implique $(M_p^{-1}\,g).e_{n+1} = e_{n+1}$ et $M_p^{-1}\,g \in M\,A\,N$ donc $g \in \exp\,(\mathcal{P})M\,A\,N$ ou bien $g.e_{n+1} \in H^-$ ce qui implique $(wg).e_{n+1} \in H^+$ donc $g \in w\exp\,(\mathcal{P})\,M\,A\,N$. ∎

Proposition 3.6. *1) L'application* $\gamma^+ : (\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi) \to \gamma^+(\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi)$ *de* $\mathbb{R}^{2n} \times \Omega(\varphi_0)$ *dans* $\mathfrak{g}^*$ *définie par*

$$(1)\ \tilde{A_{ij}}\ \left(\gamma^+(\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi)\right) = \langle \varphi, A_{ij}\rangle + p_i q_j - p_j q_i,\ 1 \leq i < j \leq n,$$

$$(2)\ \tilde{T_k}\ (\gamma^+(\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi)) = -\langle \varphi, \operatorname{th}(\frac{1}{2}\ \operatorname{ad}\ T_p)T_k\rangle + p_{n+1} q_k,\ 1 \leq k \leq n,$$

$$(3)\ \tilde{D}\ \ (\gamma^+(\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi)) = (\alpha - \Sigma_{1\leq l\leq n}\, p_l\, q_l)\, p_{n+1},$$

$$(4)\ \tilde{B_k}\ (\gamma^+(\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi)) = -\,(\alpha - \Sigma_{1\leq l\leq n}\, p_l\, q_l)\ p_k + q_k + \langle \varphi, \operatorname{th}(\frac{1}{2}\ \operatorname{ad}\ T_p)T_k\rangle,$$

$$1 \leq k \leq n,$$

où $p = (\tilde{p}, p_{n+1}) \in H^+$*, est un symplectomorphisme du produit symplectique* $\mathbb{R}^{2n} \times \Omega(\varphi_0)$ *dans* $\mathcal{O}^+$ *muni de la restriction de la 2-forme de Kirillov de* $\mathcal{O}(\zeta_0)$*.*
2) Pour $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$ *on pose* $w.\tilde{p} = (\tilde{p}_1, -\tilde{p}_2, \ldots, -\tilde{p}_n)$ *et pour* $\varphi \in \mathfrak{m}^*$ *on note* $w.\varphi$ *l'élément de* $\mathfrak{m}^*$ *défini par* $\langle w.\varphi, X\rangle = \langle \varphi, \operatorname{Ad} w^{-1}.X\rangle$ *pour* $X \in \mathfrak{m}$ *(remarquons que* $\operatorname{Ad} w(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$*).*
L'application $\gamma^- : (\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi) \to w.\gamma^+(w.\tilde{p}, w.\tilde{q}, w.\varphi)$ *est un symplectomorphisme du produit symplectique* $\mathbb{R}^{2n} \times \Omega(w.\varphi_0)$ *dans* $\mathcal{O}^-$ *muni de la restriction de la 2-forme de Kirillov de* $\mathcal{O}(\zeta_0)$*.*

Preuve. Le calcul direct de $\zeta = M_p\, man\, \zeta_0$ où $p \in H^+$, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$ montre que $(p, \zeta|_{\mathfrak{k}})$ appartient à l'orbite de $(e_{n+1}, \tilde{\varphi}_0)$ sous l'action coadjointe de $G' = \mathbb{R}^{n+1} \times SO_0(n,1)$ (voir la section 2). D'après la proposition 2.1, il existe $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{q} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \Omega(\varphi_0)$ tels que $\zeta|_{\mathfrak{k}}(A_{ij}) = \tilde{A_{ij}}(\zeta)$, $\zeta|_{\mathfrak{k}}(T_k) = \tilde{T_k}(\zeta)$ soient donnés pour $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ par les expressions (1) et (2). On revient alors au calcul de $M_p\, man\, \zeta_0$ pour obtenir, en utilisant (1) et (2), les expressions (3) et (4). Ceci montre que l'image de γ^+ est $\mathcal{O}^+$. L'injectivité de γ^+ se déduit également de la proposition 2.1. On montre ensuite que γ^+ est un symplectomorphisme par un calcul analogue à celui de la preuve de la proposition 2.1. (voir [8]). D'où 1). Enfin, 2) se déduit de 1). ■

Remarquons qu'à l'orbite coadjointe $\Omega(w.\varphi_0)$ est associée la représentation ρ' de $M \simeq SO(n)$ définie par $\rho'(m) = \rho(w\, m\, w^{-1})$ pour $m \in M$, réalisée dans le même espace E que la représentation ρ.

3.4. On peut à présent définir une correspondance de Weyl adaptée sur l'orbite $\mathcal{O}(\zeta_0)$. On dira qu'une fonction $f : \mathcal{O}(\zeta_0) \to \mathbb{C}$ est un symbole sur $\mathcal{O}(\zeta_0)$ si pour tout $(\tilde{p}, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ la fonction $\varphi \to f \circ \gamma^+(\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi)$ est le symbole, dans le calcul symbolique de Berezin sur l'orbite $\Omega(\varphi_0)$, d'un opérateur de E noté $\hat{f^+}(\tilde{p}, \tilde{q})$ et la fonction $\varphi \to f \circ \gamma^-(\tilde{p}, \tilde{q}, \varphi)$ est le symbole, dans le calcul de Berezin sur l'orbite $\Omega(w.\varphi_0)$, d'un opérateur de E noté $\hat{f^-}(\tilde{p}, \tilde{q})$. Pour un tel symbole f sur $\mathcal{O}(\zeta_0)$, on définit lorsque cela a un sens les transformées de Weyl $\mathcal{W}(\hat{f^+})$ et $\mathcal{W}(\hat{f^-})$ des fonctions $\hat{f^+}$ et $\hat{f^-}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans E au moyen de la formule intégrale (1) de la section 2 puis l'opérateur $W(f)$ de $\mathcal{H}_\pi$ par

$$W(f)\ \phi(p)\ = \mathcal{W}(\hat{f^+})\ \phi^+(\tilde{p}) \quad \text{si } p \in H^+$$

$$W(f)\ \phi(p)\ = \mathcal{W}(\hat{f^-})\ \phi^-(\tilde{p}) \quad \text{si } p \in H^-$$

où $p = (\tilde{p}\,,\, p_{n+1}) \in H$ et $\phi \in C_0^\infty(H\,,\,E)$.
En particulier, on dira que le symbole f sur $\mathcal{O}(\zeta_0)$ est polynomial en la variable $\tilde{q}$ lorsque les fonctions $\hat{f^+}$ et $\hat{f^-}$ sont des fonctions de classe C^∞ polynomiales en $q_1\,,\, q_2, \ldots, q_n$.

Proposition 3.7. *Pour $X \in \mathfrak{g}$, la fonction $\tilde{X}$ sur $\mathcal{O}(\zeta_0)$ est un symbole polynomial en la variable $\tilde{q}$ et $W(i\tilde{X})\,\phi = d\pi(X)\,\phi$ pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(H\,,\,E)$.*

Preuve. Cette proposition se vérifie de façon analogue à la proposition 2.4 par un calcul direct utilisant la proposition 3.4 (calcul de $d\pi$) et les remarques sur la correspondance de Weyl de la fin de section 2. ■

4. Contraction de correspondances de Weyl adaptées

4.1. On rappelle que le groupe $K = SO_0(n\,,\,1)$ est considéré comme un sous groupe de $G = SO_0(n+1\,,\,1)$ (voir section 3). L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K est alors une sous algèbre de $\mathfrak{g}$ qui admet comme sous espace supplémentaire $Ad\,K$-invariant le sous espace V de $\mathfrak{g}$ engendré par les B_k $(1 \le k \le n)$ et D. On identifie V à $\mathbb{R}^{n+1}$ au moyen de l'application qui à $x = (x_1\,,\, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ associe $\tilde{x} = (\sum_{1 \le k \le n} x_k\, B_k) + x_{n+1}\, D$. L'action adjointe de K sur V correspond alors à l'action usuelle de K sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Par suite, le groupe de Poincaré $G' = \mathbb{R}^{n+1} \times SO_0(n\,,\,1)$ est une contraction de G relativement à K. Les “applications contraction” c_λ, $(\lambda > 0)$ de G' dans G sont données par

$$c_\lambda(x\,,\,k) = \exp_G(\lambda\,\tilde{x})\,k$$

pour $x \in \mathbb{R}^{n+1}, k \in K$ et admettent pour différentielles les applications dc_λ, $\lambda > 0$, définies par

$$dc_\lambda(x\,,\,A) = \lambda\,\tilde{x} + A$$

pour $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $A \in \mathfrak{k}$ (voir section 1).

4.2. On reprend ici les notations des sections 2 et 3 en les allégeant quelque peu. Soit $\varphi_0 \in \mathfrak{m}^*$ tel que l'orbite $\Omega(\varphi_0)$ soit entière, associée à une représentation unitaire irréductible ρ de $M \simeq SO(n)$. Soit $m > 0$. On note $\Omega^+ = \Omega(\xi_0)$ l'orbite de $\xi_0 = (m\,e_{n+1}\,,\,\tilde{\varphi}_0) \in \mathfrak{g}^*$ sous l'action coadjointe du groupe de Poincaré G' et $\Omega^- = \Omega(\xi_0')$ l'orbite de $\xi_0' = (-m\,e_{n+1}\,,\,w.\tilde{\varphi}_0) \in \mathfrak{g}'^*$ sous l'action coadjointe de G'. Pour $\lambda > 0$, on note $\mathcal{O}_\lambda$ l'orbite sous l'action coadjointe de G de l'élément ζ_0 de $\mathfrak{g}^*$ défini comme dans la section 3 par la donnée de φ_0 et par $\alpha = m/\lambda$. Soient $\mathcal{O}_\lambda^+$ et $\mathcal{O}_\lambda^-$ les ouverts de $\mathcal{O}_\lambda$ définis dans le lemme 3.5, $\gamma_\lambda^+ : \mathbb{R}^{2n} \times \Omega(\varphi_0) \to \mathcal{O}_\lambda^+$ et $\gamma_\lambda^- : \mathbb{R}^{2n} \times \Omega(w.\varphi_0) \to \mathcal{O}_\lambda^-$ les applications définies dans la proposition 3.6. A l'orbite $\mathcal{O}_\lambda$ est associée comme dans la section 3 une représentation π_λ de la série principale de G et une correspondance de Weyl adaptée W_λ.

4.3. On rappelle qu'à l'orbite $\Omega(w.\varphi_0) \subset \mathfrak{m}^*$ est associée la représentation unitaire irréductible ρ' de $M \simeq SO(n)$ définie par $\rho'(m) = \rho(w\,m\,w^{-1})$ pour $m \in M$, réalisée dans l'espace E de la représentation ρ.

A l'orbite coadjointe Ω^+ de G' la méthode des orbites associe la représentation unitaire irréductible σ de G' définie dans la section 2. De même, à l'orbite coadjointe Ω^- est associée l'induite unitaire

$$\sigma^- = \mathrm{Ind}_{\mathbb{R}^{n+1}\times SO\,(n)}^{G'} \left(e^{i<-m\, e_{n+1}\,,\,\cdot\,>} \otimes \rho'\right)$$

réalisée dans l'espace $\mathcal{H}_\sigma$ de σ par

$$\sigma^-\,(v\,,\,k)\,\varphi\,(\tilde{p}) = e^{im\langle p,\,v\rangle}\,\rho'\,\left(N_p^{-1}\,k\,N_{k^{-1}p}\right)\,\left((k^{-1}p)_{n+1}/p_{n+1}\right)^{1/2}\,\varphi\,(\widetilde{k^{-1}p})$$

où on a posé $p = (\tilde{p}\,,\,p_{n+1}) \in H^-$ et $N_p = w_0\,M_{w_0p}\,w_0$, w_0 étant l'automorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ de matrice Diag $(+1,-1,\ldots,-1)$ (remarquons que l'action de w_0 sur H coïncide avec l'action de w sur H).

On obtient alors, de la même façon que dans la section 2, les propositions suivantes analogues des propositions 2.1 et 2.3 .

Proposition 4.1. *L'application $\psi^-\;:\;(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi) \to \psi^-\,(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)$ de $\mathbb{R}^{2n}\times\Omega\,(w.\varphi_0)$ dans $\mathfrak{g}'^*$ définie par*

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}_{ij}\,\left(\psi^-(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)\right) = \langle\varphi,\,A_{ij}\rangle + p_i\,q_j - p_j\,q_i\;,\;1\le i<j\le n\,,\\
&\tilde{T}_k\,(\psi^-(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)) = \langle\varphi,\,\mathrm{th}\,(\frac{1}{2}\;\mathrm{ad}\;T_p)T_k\rangle + p_{n+1}\,q_k\;,\;1\le k\le n\,,\\
&\tilde{W}_k\,(\psi^-(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)) = -m\,p_k\;,\;1\le k\le n\,,\\
&\tilde{W}_{n+1}\,(\psi^-(\tilde{p}\,,\,\tilde{q}\,,\,\varphi)) = m\,p_{n+1}
\end{aligned}$$

où $p = (\tilde{p}\,,\,p_{n+1}) \in H^-$ est un symplectomorphisme du produit symplectique $\mathbb{R}^{2n}\times\Omega\,(w.\varphi_0)$ dans l'orbite Ω^- .

Proposition 4.2. *Pour $\varphi\in C_0^\infty\,(\mathbb{R}^n\,,\,E)$ on a*

$$\begin{aligned}
d\sigma^-\,(A_{ij})\,\varphi\,(\tilde{p})\;&= d\rho'\,(A_{ij})\,\varphi\,(\tilde{p}) + \left(p_j\,\frac{\partial}{\partial p_i} - p_i\,\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\,\varphi\,(\tilde{p})\;,\;1\le i<j\le n\,,\\
d\sigma^-\,(T_k)\,\varphi\,(\tilde{p})\;&= d\rho'\,(\mathrm{th}\,(\frac{1}{2}\;\mathrm{ad}\;T_p)T_k)\,\varphi\,(\tilde{p}) - p_{n+1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\\
&\qquad - \frac{p_k}{2p_{n+1}}\,\varphi\,(\tilde{p})\,,\,1\le k\le n\,,\\
d\sigma^-\,(W_k)\,\varphi\,(\tilde{p})\;&= -im\,p_k\;,\;1\le k\le n\;,\;d\sigma^-\;(W_{n+1})\;\varphi\,(\tilde{p}) = im\,p_{n+1}\,,
\end{aligned}$$

où $p_{n+1}\;= -\left(1+\Sigma_{1\le k\le n}\,p_k^2\right)^{1/2}$.

On définit, de la même façon que dans la section 2, à l'aide de la proposition 4.1 et du calcul de Berezin sur l'orbite $\Omega\,(w.\varphi_0)$ la classe des symboles polynomiaux dans la variable $\tilde{q}$ sur l'orbite Ω^- et la correspondance de Weyl W'' qui associe à un tel symbole un opérateur de l'espace $\mathcal{H}_\sigma$. On obtient alors la proposition suivante, analogue à la proposition 2.4:

Proposition 4.3. *Pour $X \in \mathfrak{g}'$, la fonction $\tilde{X}$ définie sur Ω^- est un symbole polynomial en la variable $\tilde{q}$ et $W''(i\tilde{X})\varphi = d\sigma^-(X)\varphi$ pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E)$.*

4.4. Soient $f_\lambda : \mathcal{O}_\lambda \to \mathbb{C}(\lambda > 0)$, $g : \Omega^+ \to \mathbb{C}$ et $h : \Omega^- \to \mathbb{C}$ des symboles polynomiaux en la variable $\tilde{q}$ de même degré c'est à dire tels qu'il existe un entier r tel que, avec les notations des sections 2 et 3:

$$\begin{aligned} \hat{f}^+_\lambda(\tilde{p}, \tilde{q}) &= \Sigma_{|\alpha|\le r}\, u^\lambda_\alpha(\tilde{p})\,\tilde{q}^{\,\alpha}\ ,\ \hat{f}^-_\lambda(\tilde{p}, \tilde{q}) = \Sigma_{|\alpha|\le r}\, v^\lambda_\alpha(\tilde{p})\,\tilde{q}^{\,\alpha}\ ,\\ \hat{g}(\tilde{p}, \tilde{q}) &= \Sigma_{|\alpha|\le r}\, u_\alpha(\tilde{p})\,\tilde{q}^{\,\alpha}\ ,\quad \hat{h}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \Sigma_{|\alpha|\le r}\, v_\alpha(\tilde{p})\,\tilde{q}^{\,\alpha}\ ,\end{aligned}$$

où $u^\lambda_\alpha, v^\lambda_\alpha, u_\alpha, v_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et où on a posé

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\ ,\quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\ ,\quad \tilde{q}^{\,\alpha} = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_n^{\alpha_n}\,.$$

On dira alors, suivant [10], que la famille $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ est une approximation de (h, g) si , pour tout α tel que $|\alpha| \le r$, $(u^\lambda_\alpha - u_\alpha)$ et $(v^\lambda_\alpha - v_\alpha)$ convergent uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{R}^n$, ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à r, lorsque λ tend vers 0.

En utilisant les propriétés de la correspondance de Weyl détaillées à la fin de la section 2, on obtient immédiatement:

Proposition 4.4. *Soient $g : \Omega^+ \to \mathbb{C}$ et $h : \Omega^- \to \mathbb{C}$ des symboles polynomiaux en la variable $\tilde{q}$ et $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ une approximation de (g, h). Alors, pour $\phi \in C_0^\infty(H, E)$,*

$$\lim_{\lambda\to 0} W_\lambda(f_\lambda)\,\phi\,(p) = W'(g)\,\phi^+(\tilde{p}) + W''(h)\,\phi^-(\tilde{p})$$

uniformément sur les compacts de H.

On peut alors conclure en rappelant un résultat de [14] et en donnant la version infinitésimale:

Proposition 4.5. *1) Pour $(v, k) \in G'$, $\phi \in C_0^\infty(H, E)$ et $p \in H$,*

$$\lim_{\lambda\to 0} \pi_\lambda(c_\lambda(v, k))\,\phi(p) = \sigma(v, k)\,\phi^+(\tilde{p}) + \sigma^-(v, k)\,\phi^-(\tilde{p})\,.$$

2) Pour $X \in \mathfrak{g}'$, $\phi \in C_0^\infty(H, E)$,

$$\lim_{\lambda\to 0} d\pi_\lambda\,(dc_\lambda(X))\,\phi(p) = d\sigma(X)\,\phi^+(\tilde{p}) + d\sigma^-(X)\,\phi^-(\tilde{p})$$

uniformément sur les compacts de H.

Preuve. 1) est le théorème II 5 de [14]. Pour 2) , on vérifie, en utilisant les propositions 2.1, 3.6 et 4.1, que si $X \in \mathfrak{g}'$, alors la famille $(dc_\lambda\tilde{(X)})_{\lambda>0}$ est une approximation de $(\tilde{X}|_{\Omega^+}, \tilde{X}|_{\Omega^-})$ et on applique la proposition 4.4 précédente. Les propositions 2.4, 3.7 et 4.3 donnent alors le résultat. ∎

4.5. Remarques. On reprend ici les notations de l'introduction. Pour pouvoir étudier de la même façon que ci-dessus le cas général de la contraction des représentations de la série principale d'un groupe de Lie semi simple non compact G vers des représentations du produit semi direct $V \times K$, il faudrait disposer de transformations de Weyl sur les orbites principales de G qui soient appropriées à ce problème de contractions, ce qui ne semble pas être le cas pour les transformations de Weyl introduites dans [6] (voir [10]). D'autre part, on ne dispose pas non plus, en dehors de quelques cas particuliers, de transformations de Weyl sur les orbites entières de $V \times K$. Par conséquent, toute généralisation des résultats précédents semble difficile même si, selon une remarque de [10], une fois construites des transformations de Weyl adéquates, la contraction des transformations de Weyl sur les orbites principales de G vers les transformations de Weyl sur des orbites entières de $V \times K$ doit pouvoir s'étudier de manière analogue à celle des exemples considérés dans [10] et dans le présent travail.

Références

[1] Arnal, D., M. Cahen, et S. Gutt, *Representations of compact Lie groups and quantization by deformation*, Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sc. 3e série LXXIV **45** (1988), 123–141.

[2] —, *Star exponential and holomorphic discrete series*, Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B **41:2** (1989), 207–227.

[3] Arnal, D. et J.-C. Cortet, *Nilpotent Fourier Transform and Applications*, Lett. Math. Phys. **9** (1985), 25–34.

[4] Bayen, F., M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization*, Ann. Phys. **110** (1978), 61–151.

[5] Berezin, F. A., *General concept of quantization*, Comm. Math. Phys. **40** (1975), 153–174.

[6] Cahen, B., *Star-représentations induites*, thèse Univ. Metz, 1992.

[7] —, *Deformation Program for Principal Series Representations*, Lett. Math. Phys. **36** (1996), 65–75.

[8] —, *Quantification d'une orbite massive d'un groupe de Poincaré généralisé*, C. R. Acad. Sci. Paris t. **325**, Serie I (1997), 803–806.

[9] Cahen, M., *Déformations et quantification*, Phys. quantique et géométrie, Colloq. Geom. Phys. Paris, France (1986), Trav. Cours **32** (1988), 43-62.

[10] Cotton, P., et A. H. Dooley, *Contraction of an Adapted Functional Calculus*, Journ. Lie Theory **7:2** (1997), 147–164.

[11] Dooley, A. H., et J. W. Rice, *On contractions of semi simple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 185–202.

[12] Folland, B., "Harmonic Analysis in Phase Space," Princeton Univ. Press, 1989.

[13] Fronsdal, C., *Some ideas about quantization*, Rep. Math. Phys. **15:1** (1978), 111–145.

[14] Primet, G., *Contractions de groupes de Lie semi-simples sur le groupe de Poincaré généralisé*, Publ. Dep. Math. Nouv. Ser., Univ. Claude Bernard, Lyon, **6/D** (1983), 1–69.

[15] Pukanszky, L., "Leçons sur les représentations des groupes", Dunod, Paris, 1967.

[16] Rawnsley, J. H., *Representations of a semi direct product by quantization*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975), 345–350.

[17] Voros, A., *An Algebra of Pseudo differential operators and the Asymptotics of Quantum Mechanics*, J. Funct. Anal. **29** (1978), 104–132.

[18] Wildberger, N. J., *Convexity and unitary representations of a nilpotent Lie group*, Invent. Math. **89** (1989), 281–292.

[19] —, *On the Fourier transform of a compact semi simple Lie group*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **56** (1994), 64–116.

Benjamin Cahen
Université de Metz
Département de Mathématiques
Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01
France
cahen@poncelet.sciences.univ-metz.fr

Received June 21, 1998
and in final form September 20, 2000