Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **16** (2004), 125–149

Geometric study of the beta-integers for a Perron number and mathematical quasicrystals

par Jean-Pierre GAZEAU et Jean-Louis VERGER-GAUGRY

Résumé. Nous étudions géométriquement les ensembles de points de $\mathbb{R}$ obtenus par la β-numération que sont les β-entiers $\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta]$ où β est un nombre de Perron. Nous montrons qu'il existe deux schémas de coupe-et-projection canoniques associés à la β-numération, où les β-entiers se relèvent en certains points du réseau $\mathbb{Z}^m$ ($m =$ degré de β), situés autour du sous-espace propre dominant de la matrice compagnon de β. Lorsque β est en particulier un nombre de Pisot, nous redonnons une preuve du fait que $\mathbb{Z}_\beta$ est un ensemble de Meyer. Dans les espaces internes les fenêtres d'acceptation canoniques sont des fractals dont l'une est le fractal de Rauzy (à quasi-homothétie près). Nous le montrons sur un exemple. Nous montrons que $\mathbb{Z}_\beta \cap \mathbb{R}^+$ est de type fini sur $\mathbb{N}$, faisons le lien avec la classification de Lagarias des ensembles de Delaunay et donnons une borne supérieure effective de l'entier q dans la relation : $x, y \in \mathbb{Z}_\beta \implies x+y$ (respectivement $x-y$) $\in \beta^{-q}\,\mathbb{Z}_\beta$ lorsque $x+y$ (respectivement $x-y$) a un β-développement de Rényi fini.

Abstract. We investigate in a geometrical way the point sets of $\mathbb{R}$ obtained by the β-numeration that are the β-integers $\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta]$ where β is a Perron number. We show that there exist two canonical cut-and-project schemes associated with the β-numeration, allowing to lift up the β-integers to some points of the lattice $\mathbb{Z}^m$ ($m =$ degree of β) lying about the dominant eigenspace of the companion matrix of β. When β is in particular a Pisot number, this framework gives another proof of the fact that $\mathbb{Z}_\beta$ is a Meyer set. In the internal spaces, the canonical acceptance windows are fractals and one of them is the Rauzy fractal (up to quasi-dilation). We show it on an example. We show that $\mathbb{Z}_\beta \cap \mathbb{R}^+$ is finitely generated over $\mathbb{N}$ and make a link with the classification of Delone sets proposed by Lagarias. Finally we give an effective upper bound for the integer q taking place in

Manuscrit reçu le 7 mai 2002.

the relation: $x, y \in \mathbb{Z}_\beta \implies x + y$ (respectively $x - y$) $\in \beta^{-q}\,\mathbb{Z}_\beta$
if $x + y$ (respectively $x - y$) has a finite Rényi β-expansion.

Jean-Pierre Gazeau
LPTMC
Université Paris 7 Denis Diderot
mailbox 7020
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05, France
E-mail : gazeau@ccr.jussieu.fr

Jean-Louis Verger-Gaugry
Institut Fourier
UJF Grenoble
UFR de Mathématiques
CNRS UMR 5582
BP 74 - Domaine Universitaire
38402 Saint Martin d'Hères, France
E-mail : jlverger@ujf-grenoble.fr