Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **16** (2004), 693–703

Les carrés dans des généralisations des suites de Lucas

par Pierre SAMUEL

Résumé. Etant donnés deux entiers P, Q, impairs, premiers entre eux et tels que $P^2 - 4Q > 0$, on étudie les suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ d'entiers positifs telles que $x_{n+1} = Px_n - Qx_{n-1}$. Elles généralisent les suites classiques de Lucas $(U_n(P,Q))$ et $(V_n(P,Q)$. Les propriétés des diviseurs premiers de $V_n(P,Q)$ pour $n = 3 \cdot 2^j$ donnent, via le calcul des Symboles de Legendre de certains x_n modulo ceux-ci, une méthode efficace de détermination des carrés (resp. doubles, triples, ... de carrés) dans une suite (x_n). Ceci est appliqué aux équations Diophantiennes de la forme $x^4 - Ey^2 = k$, $x^2 - Ey^4 = k$ lorsque E est la partie sans facteurs carrés d'un entier de la forme $P^2 - 4$, P impair. On construit des suites (x_n) contenant un carré d'indice arbitrairement grand. Et on montre comment trouver des suites (x_n) contenant trois carrés.

Abstract. Let P, Q be positive, relatively prime and odd integers such that $P^2 - 4Q > 0$. We study the sequences $(x_n)_{n \geqslant 0}$ of positive integers satisfying the recursion formula $x_{n+1} = Px_n - Qx_{n-1}$. They generalize the classical Lucas sequences $(U_n(P,Q))$ and $(V_n(P,Q))$. The prime divisors of $V_n(P,Q)$ for $n = 3 \cdot 2^j$ have nice properties which, through the computation of the Legendre Symbols of suitable x_n's modulo these primes, give an efficient method for trying to find all squares (also double squares, triple squares, ...) in the sequence (x_n). This is applied to Diophantine equations of the form $x^4 - Ey^2 = k$, $x^2 - Ey^4 = k$ when E is the squarefree part of an integer $P^2 - 4$, P odd. We construct sequences (x_n) containing squares with arbitrarily large indices. We also show how to find sequences (x_n) containing three squares.

Pierre Samuel
3, Avenue du Lycée Lakanal
92340 Bourg-La-Reine

Manuscrit reçu le 29 octobre 2003.