

On the Delta set of a singular arithmetical congruence monoid

par PAUL BAGINSKI, SCOTT T. CHAPMAN et GEORGE
J. SCHAEFFER

RÉSUMÉ. Si a et b sont des entiers positifs, avec $a \leq b$ et $a^2 \equiv a \pmod{b}$, l'ensemble

$$M_{a,b} = \{x \in \mathbb{N} : x \equiv a \pmod{b} \text{ ou } x = 1\}$$

est un monoïde multiplicatif, appelé monoïde de congruence arithmétique (ACM). Pour chaque monoïde avec ses unités M^\times et pour chaque $x \in M \setminus M^\times$, nous dirons que $t \in \mathbb{N}$ est une longueur de décomposition en facteurs de x si et seulement s'il existe des éléments irréductibles $y_1, \dots, y_t \in M$ tels que $x = y_1 \cdots y_t$. Soit $\mathcal{L}(x) = \{t_1, \dots, t_j\}$ l'ensemble des longueurs (avec $t_i < t_{i+1}$ pour $i < j$). Le Delta-ensemble d'un élément x est $\Delta(x) = \{t_{i+1} - t_i : 1 \leq i < j\}$ et le Delta-ensemble du monoïde M est $\Delta(M) = \bigcup_{x \in M \setminus M^\times} \Delta(x)$. Nous examinons $\Delta(M)$ quand $M = M_{a,b}$ est un ACM avec $\text{pgcd}(a, b) > 1$. Cet ensemble est complètement caractérisé quand $\text{pgcd}(a, b) = p^\alpha$, p un nombre premier et $\alpha > 0$. Quand $\text{pgcd}(a, b)$ a plus d'un facteur premier, nous donnons des bornes pour $\Delta(M)$.

ABSTRACT. If a and b are positive integers with $a \leq b$ and $a^2 \equiv a \pmod{b}$, then the set

$$M_{a,b} = \{x \in \mathbb{N} : x \equiv a \pmod{b} \text{ or } x = 1\}$$

is a multiplicative monoid known as an arithmetical congruence monoid (or ACM). For any monoid M with units M^\times and any $x \in M \setminus M^\times$ we say that $t \in \mathbb{N}$ is a *factorization length* of x if and only if there exist irreducible elements y_1, \dots, y_t of M and $x = y_1 \cdots y_t$. Let $\mathcal{L}(x) = \{t_1, \dots, t_j\}$ be the set of all such lengths (where $t_i < t_{i+1}$ whenever $i < j$). The Delta-set of the element x is defined as the set of gaps in $\mathcal{L}(x)$: $\Delta(x) = \{t_{i+1} - t_i : 1 \leq i < k\}$ and the Delta-set of the monoid M is given by $\bigcup_{x \in M \setminus M^\times} \Delta(x)$. We consider the $\Delta(M)$ when $M = M_{a,b}$ is an ACM with $\text{gcd}(a, b) > 1$.

Manuscrit reçu le 22 janvier 2007.

The first author was supported by a Dept. of Homeland Security Graduate Fellowship.

The third author received support from the National Science Foundation, Grant #DMS-0353488.

This set is fully characterized when $\gcd(a, b) = p^\alpha$ for p prime and $\alpha > 0$. Bounds on $\Delta(M_{a,b})$ are given when $\gcd(a, b)$ has two or more distinct prime factors.

Paul BAGINSKI
University of California at Berkeley
Department of Mathematics
Berkeley, California 94720
E-mail : `baginski@gmail.com`

Scott T. CHAPMAN
Trinity University
Department of Mathematics
One Trinity Place
San Antonio, TX. 78212-7200
E-mail : `schapman@trinity.edu`

George J. SCHAEFFER
Carnegie Mellon University
Department of Mathematical Sciences
Pittsburgh, PA 15213
E-mail : `gschaeff@andrew.cmu.edu`