PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 39 (53), 1986, pp. 161–164

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. М. Лаврентьев, Р. Шћепановић

Резюме. Рассматривается вопрос разрешимости уравнения $F(x) = 0$, где F монотонный и G вполне непрерывнный операторы в H.

Пусть в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H задан дифференцируемый по Гато вещественный функционал $f(x)$. Положим $F(x) = \operatorname{grad} F(x)$. Пусть $\{H_n\}$ последовательность конечномерных подпространств H, таких что $H_n \subset H_{n+1}$ в $\overline{UH}_n = H$.

Определение. 1. Отображение $F : H \to H$ називается: монотонным если

$$(\forall x, y \in H)((F(x) - F(y), x - y) \geq o); \tag{1}$$

строго монотонным, если равенство (1) возможно лиш тогда когда $x = y$.

Определение 2. Отображение $F : H \to H$ називается: вполне непрерывным, если оно непрерывно и компактно; усилено непрерывным если оно преобразует всякую слабо сходящуюся последователмность в сходящуюся последовательность.

Браудер [**1**] рассматривал вопрос разрешимости уравнения $F(x) + G(x) = 0$, где $F + G$ монотонный и G усилено непрерывный оператор.

Пусть $D_R = \{u \in H : \|u\| \leq R, R > 0\}$ и ∂R_R граница от D_R.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

(1) *$f(x)$ выпуклый функционал на H,*

(2) *$F : H \to H$ хеминепрерывный оператор,*

(3) *$G : H \to H$ вполне непрерывный оператор,*

(4) *$\exists r > 0)(f(x) + (x, G(y)) > f(0)$, если $x \in \partial D_r$ и $y \in D_r$),*

AMS Subject Classification (1980): Primary 47H05, 47H15.

(5) $(\exists k>0)(\forall x,y\in H)(\|G(x)-G(y)\|\le k\|F(x)-F(y)\|)$.

Тогда $(\exists x_0\in H)(F(x_0+G(x_0)=0)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и $x,y\in H$. Рассмотрим функционал

$$\varphi(x,y)=\varepsilon\|x\|^2+f(x)+(x,G(y)) \tag{2}$$

Для фиксированного y функционал (2) слабо полунепрерывен снизу по x (ибо $\varphi(x,y)$ строго выпуклый функционал по x). Так как

$$\varphi(x,y)-\varphi(x,0)=f(x)+(x,G(y))-f(0)>0,\ \text{ если } x\in\partial D_r \text{ и } y\in D_r,$$

то для любого $y\in D_r$ существует единственная точка $x=V(y)\in D_r$ абсолютного минимума функционала (2) по x. Следовательно

$$(\forall y\in D_r)(\exists! V(y)\in D_r)(\forall x\in D_r)(\varphi(V(y),y))\le\varphi(x,y)),$$

т.е. $V:D_r\to D_r$.

Пусть P_n оператор ортогонального проектирования из H в H_n. Очевидно, отображение $P_nV:D_r\to D_r$ непрерывно. Сјодно теореме Брауэра следует $(\exists\in D_r)(P_nV(y_n)=y_n)$. Так как последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то $y_{n_k}\rightharpoonup y_0$ и $V(y_{n_k}\rightharpoonup v_0$. Следовательно

$$\begin{aligned}(v_0,h)&=\lim_{k\to\infty}(v_0,P_{n_k}h)=\lim_{k\to\infty}(V(y_{n_k}),P_{n_k}h)=\lim_{k\to\infty}(P_{n_k}V(y_{n_k},h)=\\&=\lim_{k\to\infty}(y_{n_k},h)=(y_0,h),\quad h\in H,\end{aligned}$$

т.е. $v_0=y_0$ и $V(y_{n_k})\rightharpoonup y_0$.

Покажем что $V(y_{n_k})\to y_0$. Пусть $L(x)=2\varepsilon x+F(x)$. Так как $L(V(y_{n_k})=-G(y_{n_k})$, то множество $\{L(V(y_{n_k}))\}$ компактно. Оцюда следует, что подпоследовательность $\{L(V(y_{n_k}))\}$ сильно сходится. Далее

$$(L(V(y_{n_{k+p}}))-L(V(y_{n_k})),V(y_{n_{k+p}})-V(y_{n_k}))\ge 2\varepsilon\|V(u_{n_{k+p}})-V(y_{n_k})\|^2.$$

Отсюда следует, что $\{V(y_{n_k})\}$ фундаментальная подпоследовательность, т.е. $V(y_{n_k})\to y_0$.

Осталось показать, что $y_{n_k}\to y_0$. Действительно,

$$\begin{aligned}&\|P_{n_k}V(y_{n_k}-y_0\|^2=\|P_{n_k}V(y_{n_k})\|^2-2(P_{n_k}V(y_{n_k}),y_0)+\|y_0\|^2\le\|V(y_{n_k})\|^2-\\&-2(V(y_{n_k}),P_{n_k}y_0)+\|y_0\|^2=\omega(y_{n_k}).\end{aligned}$$

Так как $\omega(y_{n_k})\to 0$, $k\to\infty$, то из $P_{n_k}V(y_{n_k})=y_{n_k}$ следует $y_{n_k}\to y_0$.

Из предельного перехода в $\varphi(V(y_{n_k}),y_{n_k})\le\varphi(x,y_{n_k})$, $x\in H$, получаем $\varphi(y_0,x_0)\le\varphi(x,y_0)$, $x\in H$, т.е. $2\varepsilon y_0+F(y_0)+G(y_0)=0$.

Пусть $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$, $n\to\infty$. Тогда

$$(\forall n\in N)(\exists y_n\in D_r)(2\varepsilon_n y_n+F(y_n)+G(y_n)=0). \tag{3}$$

Из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить последовательность $\{y_{n_k}\}$ такую что $y_{n_k} \rightharpoonup x_0$. Так как множество $\{L(y_{n_k})\}$ компактно то последовательность $\{F(y_{n_k})\}$ сильно сходится. Пусть $F(y_{n_k}) \to z_0$. Для $y \in H$ имеем

$$(F(y) - z_0, y - y_0) = \lim_{k\to\infty} f(y) - F(y_{n_k}), y - x_0) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (F(y) - F(y_{n_k}), y - y_{n_k}) \geq 0, \text{ т.е. } (\forall y \in H)((F(y) - z_0, y - x_0) \geq 0).$$

Отсјуда следует $z_0 = F(x_0)$, $F(y_{n_k}) \to F(x_0)$. Из $\|G(y_{n_k}) - G(x_0)\| \leq K\|F(y_{n_k}) - F(x_0)\|$ следует $G(y_{n_k}) \to G(x_0)$. Из предельного перехода в (3) (n заменит с n_k) получаем $F(x_0) + G(x_0) = 0$. Теорема доказана.

В следующей теореме не предполагается что F потенциальный оператор.

Теорема 2. *Пусть;* (1) F *монотонный оператор из* h *в* H*;*
(2) $(\exists r > 0)((F(x) + G(y), x) \geq 0$, *если* $y \in D_r$ *и* $x \in \partial D_r)$*;*
(3) F *непрерывный и* G *вполне непрерывный операторы из* H *в* H*;*
(4) $\exists K > 0(\forall x, y \in H)(\|G(x) - G(y)\| \leq K\|F(x) - F(y)\|)$;
Тогда $(\exists x_0 \in H)(F(x_0)_G(x_0) = 0)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $B(x, y) = \varepsilon x + F(x) + G(y)$; $x, y \in H$. Далее $(\forall y \in D_r)(\forall x \in \partial D_r)((B(x, y), x) > 0$. Следовательно, для $y \in D_r$ существует единственная точка $x = V(y) \in D_r$ такая что $B(x, y) = 0$, т.е. $\varepsilon V(y) + F(V(y)) + G(y) = 0$. Как и в теореме 1 показывается что существует последовательность $\{y_n\}$ такая что $V(y_n) \to y_0$ и $y_n \to y_0$. Из предельного перехода в $\varepsilon V(y_n) + F(V(y_n)) + G(y_n) = 0$ получаем $\varepsilon y_0 + F(y_0) + G(y_0) = 0$. Окончание доказательства проводится как и в предыдущей теореме. Теорема доказана.

Определение 3. Скажем, что отображение $P : H \to H$ удовлетворяет условию (α) если образ каждого некомпактного множества – некомпактное множество.

Определение 4. Скажем, что функционал $\psi(x, y)$, $x, y \in H$ удовлетворяет условию (β) на H, если из $x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in H)$ и$\psi(x_1, y) = \psi(x_2, y)$ следует $(\exists x' inH)(\psi(x', y) \leq \psi(x_i, y), i = 1, 2)$.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 сохраняется при замене условия (1), (2) и (5) условиями; (а) F удовлетворяет условию (α); (б) функционал $f(x) + (x, G(y))$ обладает свойством (β) на H;)в) $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу на H; (г) F непрерывное отображение из H в H.

Действительно, достаточно рассмотреть функционал $\varphi(x, y) = f(x) + (x, G(y))$. Для любого $y \in D_r$ функционал $\varphi(x, y)$ имеет единственную точку $x = V(y) \in D_r$ абсолютного минимума по x. Далее, показыватся, что существует последовательность $\{y_n\}$ такая что

$$F(y_n) + G(y_n) = 0 \tag{4}$$

Отсюда следует, что множество $\{F(y_n)\}$ компактно, т.е. последовательность $\{y_n\}$ сильно сходится. Пусть $y_n \to x_0$. Из предельного перехода в (4) получим $F(x_0) + G(x_0) = 0$.

Замечание 2. В [**2**,§§18.2] доказано утверждение (γ): Пусть хеминепрерывный монотонный оператор S из H в H удовлетворяет условию: существует $r > 0$ такое, что $(S(x), x) > 0$ если $\|x\| > r$. Тогда существует решение уравнения $S(x) = 0$. Если $S = F + G$, F строго монотонный оператор, то утверждение (γ) не верно. Действительно, пусть $F = A$ линейный самосопряженный оператор из H в $R(A) \subset H$; $(Ax, x) > 0$, $x \neq 0$ и $R(A) \neq H$. Тогда существует $g \notin H \setminus R(A)$. Пусть $S(x) = Ax + (1 - \|x\|^2)g$. Следовательно для $\|x\| = 1$ имеем $(S(x), x) > 0$. Предположим, что существует x_0, $|x_0\| < 1$ такое что $S(x_0) = 0$, т.е. $Ax_0 = (\|x_0\|^2 - 1)g$. Отсюда вытекает, что $Ay_0 = g$, где $y_0 = x_0(\|x_0\|^2 - 1)$, что невазможно.

Замечание 3. Условие (4) теоремы 1 будет выполнено, например, если: $f(x) \geq \alpha\|x\|^2$ $\alpha > 0$, $x \in H$; $\|G(x)\| \leq \beta(\|x\|)$, где β убывающая неотрицательная функция на $[0, \infty)$. Действительно, так как $f(x) + (xG(y)) \geq \alpha\|x\|^2 - \|x\|\beta(\|y\|)$, то для $\|x\| = r$ и $\|y\| \leq r$ имеем $f(x) + (x, G(y)) \geq \alpha r^2 - r \cdot \beta(r)$. Очевидно можно выбрать $r > 0$ такое что $\alpha r^2 - r\beta(r) > f(0)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. E. Browder, *Nonlinear elliptic boundary value problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963).

[2] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод монотонных операторов*, Наука, Москва, 1972.

МГУ, Механико-математический факултет
Кафедра метематического анализа
Москва, СССР

(Поступила 09 05 1984)

Универзитет "В. Влаховић
Институт за математику и физику
81000 Титоград
Југославија