PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 80(94) (2006), 97–108 DOI:10.2298/PIM0694097D

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Ю. Н. Дрожжинов и Б. Завьялов

Памяти Татьяны

Аннотация. Обобщенные функции медленного роста, обладающие (квази)асимптотикой на бесконечности в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, называются асимптотически однородными. В частности, к этим функциям принадлежат все однородные обобщенные функции. В работе введено сферическое представление обобщенных функций и в его терминах дается полное описание асимптотически однородных обобщенных функций. Полученные результаты применяются для изучения особенностей голоморфных функций в трубчатых областях над конусами и в задаче о диффузии многокомпонентных веществ.

0. Введение

Идея "правильного изменения" принадлежащая Карамате [1], оказалась очень плодотворной в математике, в частности, в тауберовой теории как классической, так и для обобщенных функций многих переменных. Неудивительно, поэтому, желание предложить более или менее адекватный аналог этому свойству. Один из таких аналогов предложен Т. Острогорской в работах [2, 3], где был доказан ряд многомерных абелевых и тауберовых теорем для мер, сосредоточенных в конусах. В настоящей статье мы излагаем результаты также во многом связанные с идеей правильного изменения. В частности, мы вводим понятие асимптотически однородных обобщенных функций, которые в какой-то мере тоже могут служить многомерным и обобщенным аналогом правильно меняющихся функций. Мы даем полное описание таких функций и приводим некоторые приложения.

Напомним некоторые стандартные обозначения теории обобщенных функций, см. [**4**]. Так через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначаем стандартное пространство Шварца быстро убывающих основных функций, а $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ – его подпространство,

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 46F12; Secondary 44A10, 40E05.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05–01–00312 и грант президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-6705.2006.1.

состоящее из функций, имеющих ноль в начале координат бесконечного порядка. S^{n-1} – еденичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{S}(S^{n-1}) = C^\infty(S^{n-1})$ – пространство бесконечно дифференциируемых на сфере S^{n-1} функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Штрихом над некоторым пространством основных функций обозначаем пространство обобщенных функций (линейных непрерывных функционалов) над этим пространством, так что $\mathcal{S}'$ – пространство медленно растущих обобщенных функций.

Пусть $j = (j_1, \dots, j_n)$ – мультиндекс, тогда, как обычно,

$$j! = j_1! \cdot \dots \cdot j_n!, \quad |j| = j_1 + \dots + j_n, \quad f^{(j)}(x) = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial_n^{j_n}} f(x).$$

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n) \in S^{n-1}$, положим $E_j(e) = e_1^{j_1} \cdot \dots \cdot e_n^{jn}$. Пространство $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$ есть пространство функций $\psi(r, e)$, $r \in \bar{\mathbb{R}}_+$, $e \in S^{n-1}$ бесконечно дифференцируемых на S^{n-1} и $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{r \geqslant 0\}$ со стандартной топологией, см. [**4**].

Определение 0.1. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'$ и $\rho(k)$ положительная непрерывная функция при $k > 0$. Мы говорим, что $f(t)$ *обладает квазиасимптотикой на бесконечности (в нуле) относительно* $\rho(k)$ на некотором подпространстве $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \longrightarrow g(t), \quad \left(\frac{1}{\rho(k)} f(\frac{t}{k}) \longrightarrow g(t), \right) \quad k \to +\infty, \tag{0.1}$$

на любой основной функции из $\mathcal{M}$ с некоторой $g(t) \in \mathcal{S}'$. Если $\mathcal{M}$ совпадает со всем $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то мы говорим, что $f(t)$ асимптотически однородна на бесконечности (в нуле) относительно ρ.

Если выполнено соотношение (0.1) для $\mathcal{M}$ – инвариантного относительно дилатаций и $g(t) \not\equiv 0$ на $\mathcal{M}$, то функция $\rho(k)$ обязательно является правильно меняющейся (автомодельной) функцией. Другими словами, для любого $a > 0$ и некоторого α

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \to a^\alpha, \quad k \to \infty$$

равномерно на компактах по a в $(0, +\infty)$, см. [**5**]. Число α называется *порядком* ρ и порядком асимптотически однородной обобщенной функции. Отметим, что предельная функция $g(t)$ в (0.1) является однородной обобщенной функцией степени α.

Асимптотически однородные функции обладают рядом интересных свойств и участвуют в формулировке многих тауберовых теорем и в различных задачах математической физики. Их описание и свойства хорошо изучены для функций из $\mathcal{S}'_+$- пространства обобщенных функций медленного роста с носителями на положительной полуоси. В частности, $f(r) \in \mathcal{S}'_+$ асимптотически однородна относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ порядка α, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kr) \xrightarrow[k \to +\infty]{} C f_{\alpha+1}(r) \quad \text{в } \mathcal{S}'_+, \tag{0.2}$$

где ядро дробного (дифференциирования) интегрирования $f_\beta(r) \in \mathcal{S}'_+$ определяется формулой

$$f_\beta(r) = \begin{cases} \frac{\Theta(r) r^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{при } \beta > 0 \\ \frac{d^N}{dr^N} f_{\beta+N}(r), & \text{при } \beta \leqslant 0,\ \beta + N > 0, \text{ рекурентно по } N. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\beta)$ – гамма функция, $\Theta(r)$ – функция Хевисайда.

Для того чтобы $f(r) \in \mathcal{S}'_+$ была асимптотически однородна относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ порядка α, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $N > -\alpha - 1$, что

$$\frac{f^{(-N)}(r)}{r^N \rho(r)} \xrightarrow[r \to +\infty]{} A. \tag{0.3}$$

Здесь $f^{(-N)}(r)$ – первообразная порядка N.

Первообразная (*производная*) *порядка* β обобщенной функции $f(r) \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^1)$ определяется формулой

$$f^{(-\beta)}(r) = f_\beta(r) * f(r).$$

Как известно, $N!\, r^{-N} f^{(-N)}(r) = S_r^N(f)$ – чезаровское среднее порядка N, таким образом, понятие асимптотической однородности в случае $\mathcal{S}'_+$ адекватно отражает асимптотическое поведение чезаровских средних.

Основная цель данной статьи дать подобного рода описание асимптотически однородных функций в общем случае.

Другой частный случай, где асимптотически однородные обобщенные функции также имеют простое описание, правда, в несколько других терминах, демонстрирует тесную связь асимптотически однородных функции с граничными свойствами функций, голоморфных в трубчатых конусах.

Пусть $F(z) \in H(T^C)$, где C – острый, выпуклый, открытый конус в $\mathbb{R}^n$, а $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ – трубчатая область над конусом C. Это означает, что $F(z)$ – голоморфна в T^C и удовлетворяет там оценке

$$\bigl|F(z)\bigr| \leqslant A \frac{(1+|z|)^d}{\Delta_C^b(y)}, \qquad z = x + iy, \quad y \in C,$$

с некоторыми постоянными A, b и d. Здесь $\Delta_C(y)$ – расстояние от $y \in C$ до границы конуса C. Отметим, что у $F(z)$ существует граничное значение в $\mathcal{S}'$ при $y \to +0$, так что $f(x) = \lim_{y\to+0} F(x+iy)$, причем носитель его преобразования Фурье $\widetilde{f}(t)$ лежит в конусе, сопряженным конусу C, то есть $\operatorname{supp}\widetilde{f}(t) \subset \Gamma = C^*$.

Определение 0.2. Будем говорить, что голоморфная функция $F(z) \in H\bigl(T^C\bigr)$ ведет себя в T^C как $\rho\bigl(1/|z|\bigr)$, где $\rho(k)$ – правильно меняющаяся функция, если

1. существует $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{\rho(k)} F\bigl(\frac{z}{k}\bigr)$ для $\forall z \in T^C$;

2. существуют числа b, c, ε такие, что

$$|F(z)| \leqslant \rho\Big(\frac{1}{|z|}\Big)\frac{c}{\varphi^b}, \quad |z| < \varepsilon, \qquad \text{где } \varphi = \min\Big\{\Delta_C\Big(\frac{y}{|y|}\Big), \frac{|y|}{|z|}\Big\}.$$

Теорема 0.1. *$f(x)$ асимптотически однородна в нуле относительно $\rho(k)$ тогда и только тогда, когда $F(z)$ ведет себя в T^C при $z \to 0$ как $\rho(1/|z|)$, см.* [**4**].

1. Сферическое представление обобщенных функций

Рассмотрим в $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$ подпространство

(1.1)

$$V = \Big\{\psi(r,e) \in \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1}) : \Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)^p \psi(r,e)\Big|_{r=0} = \sum_{|j|=p} c_j E_j(e),\ p = 0, 1, \dots\Big\}.$$

Топология в V наследуется топологией в $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$. Нетрудно видеть, что V замкнутое подпространство пространства $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$. Обозначим через $\{E_j^*(e),\ |j| = p\}$ – биортоганальный базис к $\{E_j(e),\ |j| = p\}$ в $L^2(S^{n-1})$.

Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Отображение

$$\tau : \varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n) \mapsto \psi(r,e) = \varphi(re_1, \dots, re_n) \tag{1.2}$$

осуществляет изоморфизм пространств $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и V. При этом обратное отображение τ^{-1} задается формулой

$$\tau^{-1} : \psi(r,e) \mapsto \varphi(t) = \psi(|t|, t/|t|), \quad \forall \psi(r,e) \in V. \tag{1.3}$$

Определение 1.1. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, тогда обобщенная функция $f_s(r,e)$, определяемая формулой

$$\big(f_s(r,e), \psi(r,e)\big) = \big(f(t), \psi(|t|, t/|t|)\big), \quad \forall \psi \in V,$$

принадлежит V'. Так как V замкнутое подпространство $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$, то по теореме Хана–Банаха мы можем продолжить f_s на все $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$. Обозначим это продолжение $F(r,e)$ и назовем его *сферическим представлением* обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'$.

Отметим, что справедлива формула

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r,e), \varphi(re)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Сферическое представление $F(r,e)$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ определяется неоднозначно. Общий вид сферического представления для любой $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ выглядит так:

$$F(r,e) + \sum_{p=0}^{N} \delta^{(p)}(r)\Phi_p(e), \quad p = 0, 1, \dots, \tag{1.4}$$

где $F(r,e)$ какое-то (конкретное) сферическое представление, а обобщенные функции $\Phi_p(e)$ удовлетворяют условиям

$$(\Phi_p(e), E_j(e)) = 0, \quad |j| = p, \quad p = 0, 1, \dots. \tag{1.5}$$

Пример 1. Одним из сферических представлений производных дельта функции $\delta^{(j)}(t)$, $|j| = p$ является обобщенная функция

$$\Delta_j(r,e) = \frac{j!}{|j|!}\delta^{(|j|)}(r)E_j^*(e).$$

С другой стороны, если $F(r,e) = \delta^{(q)}(r)\Phi(e)$, где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, то $F(r,e)$ является сферическим представлением обобщенной функции

$$f(t) = \sum_{|j|=q} \frac{q!}{j!}\big(\Phi(e), E_j(e)\big)\delta^{(j)}(t). \tag{1.6}$$

Это легко проверяется непосредственным счетом на основных функциях $\varphi(t) = \varphi(re)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что если $F(r,e) \in W'$ – сферическое представление обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'$, то для всех $\psi(r,e) \in V$ имеет место формула

$$\begin{aligned}&\big(F(kr,e), \psi(r,e)\big) = \\ &\quad \frac{1}{k}\Big(F(r,e), \psi\Big(\frac{r}{k}, e\Big)\Big) = \frac{1}{k}\Big(F(r,e), \psi\Big(\frac{|t|}{k}, \frac{t}{|t|}\Big)\Big) = k^{n-1}\Big(f(kt), \psi\Big(|t|, \frac{t}{|t|}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Пусть $f_0(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и однородна степени α на $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$\big(f_0(t), \varphi(t)\big) = \big(r^{\alpha+n-1}\varPhi(e), \varphi(re)\big), \quad \forall\varphi(t) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \tag{1.7}$$

где $\varPhi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$. Если $\alpha \neq -n, -n-1, \dots$, то $f_0(t)$ имеет единственное однородное продолжение на все $\mathcal{S}$,

$$\big(f_0(t), \varphi(t)\big) = \big(r_+^{\alpha+n-1}\varPhi(e), \varphi(re)\big), \quad \forall\varphi(t) \in \mathcal{S}, \tag{1.8}$$

Обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени однородности $\alpha = -n - p$, где p – целое неотрицательное число, тогда и только тогда, когда существует

$$\varPhi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1}), \quad \big(\varPhi(e), E_j(e)\big) = 0, \quad \text{для всех } |j| = p \tag{1.9}$$

такое, что

$$\begin{aligned}&\big(f(t), \varphi(t)\big) = \\ &\quad \int_0^{+\infty}\Big(\varPhi(e), \varphi(re) - \sum_{|j|\leqslant p}\frac{r^{|j|}}{j!}E_j(e)\varphi^{(j)}(0)\Big)\frac{dr}{r^{p+1}} + \sum_{|j|=p} c_j\varphi^{(j)}(0)\end{aligned} \tag{1.10}$$

с некоторыми c_j, см. также [**6**].

Отметим, что обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ тогда и только тогда, когда любое ее сферическое представление $F(r,e) \in \mathcal{S}'(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho_1(k) = k^{n-1}\rho(k)$ на всех основных функциях из V.

Ясно, что если $F(r,e)$ обладает квазиасимптотикой по r относительно правильно меняющейся функции $\rho_1(k)$ на всем $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$, то есть асимптотически однородна, то $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$. Вопрос: верно ли обратное утверждение?

2. Основные теоремы

В этом параграфе мы даем описание асимптотически однородных обобщенных функций в асимптотической шкале правильно меняющихся функций как некритических, так и критических порядков в терминах их сферических представлений. Для некритических порядков однородности справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\rho(k)$ правильно меняющаяся функция порядка $\alpha \neq -n-p$, $p = 0,1,\dots$. Обобщенная функция $f(t)$ асимптотически однородна относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ порядка α, то есть*

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f_0(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

тогда и только тогда, когда существуют ее сферическое представление $F(r,e)$ и число N $(N+\alpha > -n)$ такие, что

$$\frac{1}{r^{N+n-1}\rho(r)} F^{(-N)}(r,e) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \Phi(e) \quad \text{в } \mathcal{S}'(S^{n-1}), \tag{2.2}$$

где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$.

Эта теорема является обобщением случая $f \in \mathcal{S}'_+$. В случае критических порядков $\alpha = -n-p$, $p = 0,1,\dots$, дело обстоит несколько сложнее.

Пусть $\rho(k)$ – правильно меняющаяся функция порядка α. Введем функцию

$$\widehat{\rho}(k) = \begin{cases} k^\alpha \int\limits_1^k \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa, & \text{если} \quad \int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} = \infty \\ k^\alpha \int\limits_k^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa, & \text{если} \quad \int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} < \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Нетрудно видеть, что $\widehat{\rho}(k)$ – правильно меняющаяся функция порядка α. Отметим некоторые ее свойства:

$$1. \quad \frac{\widehat{\rho}(k)}{k^\alpha} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty, & \text{если} \int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} = \infty; \\ 0, & \text{если} \int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} < \infty; \end{cases} \tag{2.4}$$

$$2. \quad \frac{\widehat{\rho}(k)}{\rho(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty. \tag{2.5}$$

Теорема 2.2. *Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимтотически однородна на бесконечности относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ порядка $\alpha =$*

$-n-p$, $p=0,1,,\dots$, *то есть*

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f_0(t), \quad \text{на } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{2.6}$$

где

$$(f_0(t),\varphi(t)) = \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r^{p+1}}\Big(\Phi(e),\varphi(re)-T^p_{\varphi(re)}\Big) + \sum_{|j|=p} c_j\varphi^{(j)}(0), \quad \varphi(t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{2.7}$$

с некоторыми $c_j, |j|=p$ *и* $\Phi(e)\in\mathcal{S}(S^{n-1})$. *Тогда, существует ее сферическое представление* $F(r,e)\in W'$, *асимптотически однородное по* r *на бесконечности относительно* $\widehat{\rho}_1(k)$, *где* $\rho_1(k)=k^{n-1}\rho(k)$, *так что*

$$\frac{1}{\widehat{\rho}_1(k)} F(kr,e) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \pm\frac{(-1)^p}{p!}\Phi(e)\,\delta^{(p)}(r). \tag{2.8}$$

Здесь берется знак $+$, *если* $\int_1^{+\infty}\frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}}d\varkappa=\infty$, *и* $-$, *если* $\int_1^{+\infty}\frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}}d\varkappa<\infty$.

Следствие 1. *Пусть* $f(t)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *и обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно правильно меняющейся функции* $\rho(k)$ *порядка* $\alpha=-n-p$, $p=0,1,\dots$, *на* $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, *то есть*

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f_0(t) \quad \text{на } \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \tag{2.9}$$

где f_0 *определяется формулой* (1.7). *Тогда найдутся постоянные* $N, c_j, |j|\leqslant N$ *такие, что обобщенная функция*

$$g(t) = f(t) - \sum_{|j|\leqslant N} c_j\delta^{(j)}(t) \tag{2.10}$$

асимптотически однородна на бесконечности относительно $\widehat{\rho}(k)$, *при этом*

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)} g(kt) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \pm\operatorname*{Res}_{\lambda=0}|t|^\lambda f_0(t) = \pm(-1)^p\sum_{|j|=p}\frac{1}{j!}(\Phi(e),E_j(e))\delta^{(j)}(t), \tag{2.11}$$

на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Знаки* $\pm$ *берутся как в теореме.*

Теорема 2.3. *Обобщенная функция* $f(t)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *асимптотически однородна на бесконечности относительно правильно меняющейся функции* $\rho(k)$ *порядка* $\alpha=-n-p$, $p=0,1,\dots$, *тогда и только тогда, когда существует ее сферическое представление* $F(r,e)$ *и число* N, $(N+p>0)$ *такие, что*

$$F(r,e) = F_1(r,e)+F_2(r,e), \tag{2.12}$$

где

$$\frac{1}{r^{N+n-1}\rho(r)} F_1^{(-N)}(r,e) \xrightarrow[r\to\infty]{} \varPhi_1(e) \quad \text{в } \mathcal{S}'(S^{n-1}) \tag{2.13}$$

и

$$F_2^{(-N)}(r,e) = r^{N-p-1}\eta^{[-p-1]}(r,e), \tag{2.14}$$

причем $\eta(r,e)$ непрерывна по r $(r>0)$ со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$,

$$\frac{1}{r^{n-1}\rho(r)}\eta(r,e) \xrightarrow[r\to\infty]{} \Phi_2(e), \quad \text{и для всех } |j|=p \ \ (\eta(r,e),E_j(e))\equiv 0. \tag{2.15}$$

Здесь специальная первообразная $\eta^{[-p-1]}(r,e)$ порядка $p+1$ по r при $r>0$ дается формулой

$$\eta^{[-p-1]}(r,e)=\begin{cases}\int_1^r dr_{p+1}\int_{+\infty}^{r_{p+1}} dr_p\dots\int_{+\infty}^{r_1} dr_1\eta(r_1,e), & \text{если } \int_1^\infty r^p\rho_1(r)dr=\infty\\ \int_{+\infty}^r dr_{p+1}\int_{+\infty}^{r_{p+1}} dr_p\dots\int_{+\infty}^{r_2}\eta(r_1,e)dr_1, & \text{если } \int_1^\infty r^p\rho_1(r)dr<\infty.\end{cases}$$

Примеры 1. В следующих примерах $t=(t_1,t_2)$, а $r=|t|$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

1. Пусть $f(t)=\frac{\sin|t|\varphi}{|t|}$. Тогда $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)=k^{-2}\ln k$, а именно

$$\frac{k^2}{\ln k}f(kt)\xrightarrow[k\to+\infty]{}\delta(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2).$$

2. Пусть $f(t)=\cos(|t|\varphi)$. Тогда $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)=k^{-2}$, а именно

$$k^2\cos(k|t|\varphi)\xrightarrow[k\to+\infty]{}-\delta'(t_2)\Theta(t_1)+\frac{1}{2\pi}\delta(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2).$$

Можно дать другое описание асимптотически однородных обобщенных функций в духе теоремы 0.1. Мы приведем это описание в случае асимптотически однородных функций на бесконечности.

Определение 2.1. Пусть функция $h(x,y)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y>0$, непрерывна и $\rho(k)$ правильно меняющаяся функция. Будем говорить, что $h(x,y)$ ведет себя на бесконечности как $\rho(|z|)$, где $|z|=\sqrt{|x|^2+y^2}$, если выполнены условия:

1. Существуют постоянные A и b такие, что

$$\sup_{k>1}\frac{1}{\rho(k)}|h(kx,ky)|\leqslant\frac{A}{y^b} \quad \text{при } |x|^2+y^2=1, y>0;$$

2. существует

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\rho(k)}|h(kx,ky)|=C(x,y) \quad \text{при } |x|^2+y^2=1, y>0.$$

Напомним, что стандартным усреднением обобщенной функции $f(t)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ с ядром $\omega(t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, называется функция

$$L_f^\omega(x,y)=\left(f(\xi),\frac{1}{y^n}\omega\Big(\frac{x-\xi}{y}\Big)\right), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty).$$

Теорема 2.4. *Обобщенная функция $f(t)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ тогда и только тогда, когда $L_f^\omega(x,y)$ ведет себя на бесконечности как $\rho(|z|)$.*

Здесь

$$\omega(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \int \omega(t)\,dt \neq 0. \tag{2.16}$$

Отметим, что если условие (2.16) не выполнено, то теорема 2.4, в том виде как она сформулирована, перестает быть справедливой. Однако, останется справедливым соотношение (0.1) на некотором подпространстве $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Это подпространство описывается в терминах идеалов, натянутых на многочлены, получающиеся из тейлоровского разложения преобразования Фурье ядра ω. Подробнее см. [**8**].

3. Некоторые приложения

Теоремы, фигурирующие в § 2 позволяют получить некоторые результаты, касающиеся граничных свойств функций голоморфных в трубчатых областях над острыми конусами и стабилизации решений задачи Коши для диффузии многокомпонентного газа.

Задача Коши для диффузии многокомпонентных веществ. Рассмотрим следующую модельную задачу:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} u_i(x,t) = a_i^2 \Delta u_i(x,t) \qquad i = 1, 2, \dots, m, \\ \lim_{t \to +0} u_i(x,t) = f(x) \quad (\text{ в } \mathcal{S}) \quad f \in \mathcal{S}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Решение ищется в классе не более, чем полиномиально растущих функций, то есть таких, что функции $u_i(x,t)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству $|u_i(x,t)| < Ct^{-^b}(|x|^N + |t|^N + 1)$ для некоторых b, C и N. Здесь $u_i(x,t)$ – концентрация i-ого вещества, $i = 1, 2, \dots, m$. Не нарушая общности, можно считать, что все коэффициенты диффузии различных веществ a_i различны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i(x,t).$$

Ее можно интерпретировать, например, как плотность зарядов смеси веществ, где c_i – удельный заряд i-ой компоненты.

Пусть $U(x,t)$ стабилизируется относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ по параболам. Это означает, что для некоторой функции $U(x,t)$ выполнены условия:

(1) существует предел

$$\frac{1}{\rho(k)} U(kx, k^2 t) \xrightarrow[k \to +\infty]{} u_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0;$$

(2) существуют A и b, такие что

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} U(kx, k^2 t) \right| \leqslant \frac{A}{t^b} \quad \text{при } |x|^2 + t^2 = 1.$$

Что можно сказать об асимптотическом поведении концентрации отдельных веществ u_i? Положим

$$s_p = \sum_{i=1}^{m} c_i a_i^{2p} \qquad p = 0, 1, \dots. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Пусть $U(x,t)$ стабилизируется по параболам относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ порядка α. Тогда, если $s_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \neq 0$, то каждая компонента $u_i(x,t)$ стабилизируется по параболам относительно функции $\rho(k)$.*

Если же

$$s_p = 0, \quad p = 0, 1, \dots, M-1, \quad s_M \neq 0 \ (M > 0) \ \text{ и } \ \alpha \neq 0, 1, \dots,$$

то существует M-гармонический многочлен $Q(x)$, $\Delta^M Q(x) = 0$, такой, что для каждого $i = 1, \dots, m$ функция

$$\widehat{u}_i(x,t) = u_i(x,t) - \sum_{q=0}^{M-1} \frac{(a_i^2 t)^q}{q!} \Delta^q Q(x)$$

стабилизируется по параболам относительно $\rho(k)$.

Следствие 2. *Пусть $U(x,t)$ стабилизируется по параболам относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq 0, 1, \dots$ и $s_p = 0$ при $p = 0, 1, \dots, M-1$, а $s_M \neq 0$. Пусть еще $\alpha > 2M-2$. Тогда каждая компонента $u_i(x,t)$, $i = 1, \dots, m$, стабилизируется по времени относительно $\rho(\sqrt{t})$.*

О граничных свойств функций голоморфных в трубчатых областях. Рассмотрим функцию $F(z) \in H(T^C)$. Напомним, что поведение $F(z)$ в T^C при $z \to 0$ как $\rho(1/|z|)$ эквивалентно асимптотической однородности ее граничного значения $f(x)$ в нуле относительно $\rho(k)$, см. утверждение 0.1.

Пусть C_q, $q = 1, 2, \dots, m$, – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_q = C_q^*$ – сопряженные конусы. Положим

$$H^p = \left\{ f_{i_1 \dots i_p}(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), i_\ell = 1, \dots, m : \ \operatorname{supp} \widetilde{f}_{i_1 \dots i_p}(t) \subset \bigcup_{\ell=1}^{p} \Gamma_{i_\ell}, \right\}$$

где $p = 1, \dots, m$ и $f_{i_1 \dots i_p}(x)$ полностью антисимметричны по совокупности индексов. Положим еще

$$H^0 = \left\{ f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \ \operatorname{supp} \widetilde{f}(t) \subset \bigcap_{q=1}^{m} \Gamma_q \right\}.$$

Отметим, что условие “частотности” $\left(\operatorname{supp} \widetilde{f}(t) \subset \bigcup_{\ell=1}^{p} \Gamma_{i_\ell}\right)$ в случае, когда $\bigcup_{\ell=1}^{p} \Gamma_{i_\ell}$ – регулярное множество, эквивалентно условию

$$f_{i_1 \dots i_p}(x) = \sum_{\ell=1}^{p} h_{i_\ell}(x),$$

где $h_{i_\ell}(x)$ есть граничное значение функции $h_{i_\ell}(z) \in H(T^{C_{i_\ell}})$. Введем операторы δ_p по правилу, если $f \in H^p$, то $\delta_p f \in H^{p+1}$, где

$$[\delta_p f]_{i_0 i_1 \dots i_p}(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k f_{i_0 \dots \check{i}_k \dots i_p}(x)$$

Здесь символ "$\check{\ }$"сверху означает, что соответствующий индекс опущен. Пусть $\rho(k)$ правильно меняющаяся функция порядка α, положим $A^p = \{f \in H^p :$ каждая компонента f асимптотически однородна в нуле относительно $\rho(k)\}$. Так как $\delta_p A^p \subset A^{p+1}$, то для фактор-пространств $G^p = H^p/A^p$ корректно определен оператор $\delta_p : G^p \mapsto G^{p+1}$.

Теорема 3.2. *Пусть ch $\bigcup_{q=1}^{m} C_q = \mathbb{R}^n$ и $\alpha \neq 0, -1, \dots$; тогда последовательность*

$$0 \to G^0 \xrightarrow{\delta_0} G^1 \xrightarrow{\delta_1} G^2 \xrightarrow{\delta_2} \cdots \xrightarrow{\delta_{m-2}} G^{m-1} \xrightarrow{\delta_{m-1}} G^m \to 0 \tag{3.3}$$

точна.

В частности, в случае $m = 2$ точность в члене G^1 можно переформулировать следующим образом:

Следствие 3. *Пусть C_1 и C_2 – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$ и ch $C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}^n$. Пусть $F_i(z) \in H(T^{C_i})$, $i = 1, 2$, и*

$$F_1(z) - F_2(z) \text{ ведет себя в } T^{C_1 \cap C_2} \text{ как } \rho(1/|z|), \tag{3.4}$$

где $\rho(k)$ – правильно меняющаяся функция порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда существует многочлен $F(z)$ такой, что

$$F_i(z) - F(z) \text{ ведет себя в } T^{C_i} \text{ как } \rho(1/|z|), \quad i = 1, 2. \tag{3.5}$$

Этот частный результат о "некомпенсации особенностей"получен ранее в [**7**].

Теорема 3.3. *Пусть C_i, $i = 1, 2, \dots, m$, – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_i = C_i^*$ – сопряженные конусы, причем $pr\,(\bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i) = \mathcal{F}$ – регулярное множество на единичной сфере S^{n-1}. Пусть $F_i(z) \in H\big(T^{C_i}\big)$, причем сумма их граничных значений $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ асимптотически однородна в нуле относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$.*

Тогда существуют $\widehat{F}_i(z) \in H\big(T^{C_i}\big)$, ведущие себя в T^{C_i} как $\rho(1/|z|)$, и $\sum_{i=1}^{m} \widehat{f}_i(x) = f(x)$.

Если $\alpha = 0, 1, \dots$, то утверждение этой теоремы останется справедливым при дополнительном предположении $\mathrm{ch} C_q \bigcup C_{q+1} \neq \mathbb{R}^n$, $q = 1, \dots, m-1$.

Список литературы

[1] J. Karamata, *Sur un mode de croissance réguliére des functions*, Mathematica (Cluj) **4** (1930), 38–53.

[2] T. Ostrogorski, *Asymptotic behaviour of Fourier transforms in R^n*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **35(49)** (1984), 105–117.

[3] T. Ostrogorski, *Abelian type theorems for some integral operators in R^n*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **35(49)** (1984), 93–103

[4] В. С. Владимиров, Ю. Н.Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций*, Наука, Москва, 1986.

[5] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, Москва, 1985.

[6] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщённые функции и действия над ними. Вып.1*, Физматгиз, Москва, 1959.

[7] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Теоремы типа Харди–Литтлвуда для знаконеопределенных мер в конусе*, Мат. сборник **186**:5 (1995), 49–68.

[8] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций со значениями в банаховых пространствах*, Мат. сборник **194**:11 (2003), 17–64.

Математический институт им. В. А. Стеклова,
Москва, Россия
drozzin@mi.ras.ru

(Поступила 26 07 2006)