Revista Colombiana de Estadística
Volumen 28 N° 2. pp. 173 a 191. Diciembre 2005

El movimiento browniano fraccional como límite de ciertos tipos de procesos estocásticos

The Brownian Fractional Motion as a Limit of some Types of Stochastic Processes

Andrea Cavanzo Nisso*
Liliana Blanco Castañeda**

Resumen

Se hace un estudio detallado de algunas construcciones significativas del *movimiento browniano fraccional* (mBf) desarrolladas recientemente: la de Taqqu (1975), quien construye el mBf como un límite de sumas parciales normalizadas de variables aleatorias estacionarias, la de Sottinen (2003), quien utiliza una interpolación de variables aleatorias y la realizada por Delgado & Jolis (2000) quienes aproximan las distribuciones finito dimensionales del mBf a partir de las de procesos continuos definidos por medio de un proceso de Poisson.

Palabras Claves: Convergencia débil, proceso gausiano, proceso de Poisson, movimiento browniano fraccional, caminata aleatoria.

Abstract

Some of the most significant constructions of the fractional brownian motion developed recently are reviewed in detail. Taqqu works with the limit under weak convergence of normalized partial sums of stationary random variables exhibiting long run non-periodic dependence. Sottinen proves a Donsker type approximation theorem and Delgado & Jolis prove that the fractional brownian motion can be weakly approximated by the law of some processes constructed from standard Poisson process.

Keywords: Weak Convergence, Gaussian Process, Poisson Process, Fractional Brownian Motion, Random Walk.

*Estudiante. Maestría en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. E-mail: andrea.cavanzo@gmail.com
**Profesora. Departamento de Estadística. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. E-mail: lblancoc@unal.edu.co

1. Introducción

El proceso estocástico llamado *movimiento browniano fraccional* (mBf), ha sido estudiado intensamente en los últimos años. Su auge se debe a sus múltiples aplicaciones en diferentes campos, tales como la biología, finanzas y telecomunicaciones; desde el punto de vista teórico el mBf es interesante, pues no es proceso de Markov ni una semimartingala y por lo tanto el cálculo desarrollado por Itô no se puede aplicar (Decreusefond & Üstünel 1958).

Un proceso gaussiano centrado $B^H = \{B_t^H : 0 \leq t < \infty\}$ con $B_0^H = 0$, es un movimiento browniano fraccional con parámetro (o constante de Hurst) $H \in (0,1)$ si su función de covarianza está dada por:

$$\operatorname{cov}\left(B_t^H, B_s^H\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \operatorname{var}\left(B_1^H\right) \tag{1}$$

para todo t, $s \geq 0$.

Sottinen (2001) muestra que si $H \in (0,1]$ entonces (1) es definida no negativa y por lo tanto el mBf es el único proceso gaussiano, con incrementos estacionarios de segundo orden y con función de covarianza (1).

El mBf es un proceso autosimilar, es decir, es invariante en distribución bajo un adecuado cambio de escala de tiempo y espacio. Este tipo de proceso es usado para modelar fenómenos aleatorios con dependencia a gran distancia. El primer tratamiento riguroso del tema fue desarrollado por Lamperti (1962), en donde el concepto de autosimilaridad es un caso especial de lo que Lamperti llama proceso semiestable.

Rigurosamente hablando un proceso estocástico $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es autosimilar, H–ss, si existe $H > 0$ tal que para todo $a > 0$ se tiene:

$$X_{at} \overset{d}{=} a^H X_t \tag{2}$$

donde $\overset{d}{=}$ denota la igualdad de las distribuciones finito dimensionales.

Intuitivamente la relación (2) indica que las trayectorias de los procesos X_{at} y $a^H X_t$ aún cuando no son idénticas son visualmente similares.

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso no trivial, H–ss, con incrementos estacionarios y $H > 0$, se tienen las siguientes propiedades (Cavanzo 2004, Embrechts & Maejima 2002, Vervaat 1985):

i) $X_0 = 0$ casi siempre.

ii) Si $E\left[(X_1)^2\right] < \infty$ entonces:

$$E\left[X_t X_s\right] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right) E\left[(X_1)^2\right]$$

iii) Si $E\left[|X_1|^\alpha\right] < \infty$ para algún $0 < \alpha \leq 1$, entonces $\alpha H \leq 1$.

iv) Si X_t tiene varianza finita y $H \neq 1$ entonces $E\left[X_t\right] = 0$.

v) Las trayectorias son casi siempre no diferenciales.

Por ser el mBf un proceso gaussiano, generalmente se define en términos de su covarianza, sin embargo, existen varias definiciones equivalentes. El siguiente teorema resume las equivalencias de la definición del mBf presentadas en Lin (1995).

Teorema 1.1. Un proceso gaussiano centrado $B^H = \left\{B_t^H : 0 \leq t < \infty\right\}$ con $B_0^H = 0$, es un movimiento browniano fraccional con parámetro $H \in (0,1)$, si y sólo si, se cumple alguna de las siguientes condiciones:

a) $\operatorname{cov}\left(B_t^H, B_s^H\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)Var(B_1^H)$, para todo $t, s \geq 0$.

b) $\left(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H,\ B_{s_2}^H - B_{s_1}^H\right) \stackrel{d}{=} \left(B_{t_2+h}^H - B_{t_1+h}^H,\ B_{s_2+h}^H - B_{s_1+h}^H\right)$, para todo t_1, t_2, s_1, s_2 y $h \geq 0$, y si existe un $H \in (0,1)$ tal que:

$$B_{t+\tau}^H - B_t^H \stackrel{d}{=} h^{-H}\left(B_{t+h\tau}^H - B_t^H\right)$$

para todo $t, \tau, h \geq 0$.

c) $Var(B_t^H - B_s^H) = |t-s|^{2H} Var(B_1^H)$, para todo $t, s \geq 0$.

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que el mBf posee incrementos estacionarios, es H–ss y se tiene que:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}&\left(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H, B_{s_2}^H - B_{s_1}^H\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[(s_2-t_1)^{2H} + (s_1-t_2)^{2H} - (s_2-t_2)^{2H} - (s_1-t_1)^{2H}\right] \quad (3)\end{aligned}$$

De (3) se tiene que si $H < \frac{1}{2}$, el mBf está negativamente correlacionado, si $H > \frac{1}{2}$ el mBf está positivamente correlacionado y cuando $H = \frac{1}{2}$ la covarianza es cero y por ser el mBf un proceso gaussiano, se tiene la independencia de los incrementos, esto es, el movimiento browniano estándar.

De la definición de covarianza del mBf se puede ver que el mBf es un proceso de Markov, si y sólo si, $H = \frac{1}{2}$.

Acerca de las trayectorias del mBf el criterio de continuidad de Kolmogorov garantiza que éstas son casi siempre Hölder continuas de orden menor que H, (*véase* Sottinen 2001). Además por ser el mBf un proceso autosimilar se tiene que sus trayectorias son diferenciables en ninguna parte c.s., una demostración alternativa se puede encontrar en Mandelbrot & Ness (1968)[1].

De la variación de las trayectorias se puede decir que tienen p-variación no acotada c.s., para $pH < 1$, y que su variación cuadrática es cero si $H > \frac{1}{2}$, (Nualart 2003). Como una consecuencia de lo anterior se tiene que el mBf con parámetro de Hurst $H \neq \frac{1}{2}$ no es una semimartingala (Lin 1995).

[1]Cabe anotar que este artículo marca el inicio del estudio formal del mBf.

2. Teorema del límite no central

A continuación se presentará la construcción del mBf realizada por Taqqu (1975) como parte de su disertación doctoral. Esta construcción se basa en el teorema del límite central, en el sentido que se toma la suma de ciertas variables aleatorias, pero a estas variables aleatorias les quita la hipótesis de independencia, bajo esta circunstancia la convergencia de dichas sumas hacia una distribución normal estándar no se puede garantizar, es más, ni siquiera tienen porque converger a un proceso gaussiano. Para tener la convergencia hacia el mBf, Taqqu le impone ciertas condiciones a la matriz de covarianza. Veamos cuales:

Sean Y_n una sucesión estacionaria y gaussiana con media cero y varianza finita y $X^N(t)$, es un elemento aleatorio definido por:

$$X_t^N = \frac{1}{d_N} \sum_{i=1}^{[Nt]} Y_i$$

donde $0 \leq t \leq 1$ y d_N^2 es asintóticamente proporcional a $Var(\sum_{i=1}^N Y_i)$.

Para que X_t^N converja débilmente a un límite no degenerado y continuo en probabilidad X_t, es necesario que $d_N^2 \sim N^{2H} L(N)$ cuando $N \to \infty$, donde L es una función de variación lenta, i.e. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{L(cx)}{L(x)} = 1$ con $c > 0$, (*véase* Lamperti 1962).

El objetivo es probar que el proceso límite, cuando existe, satisface las siguientes condiciones:

1. $X_0 = 0$.
2. X_t tiene incrementos estacionarios.
3. X_t es H–ss.
4. $E[X_t] = 0$ y $E[|X_t|^\gamma] < \infty$ para $\gamma H \leq 1$.
5. X_t es separable y continuo c.s.

Los siguientes resultados establecen condiciones suficientes para garantizar que la sucesión X_t^N converge hacia un límite X_t que satisface las anteriores cinco condiciones.

Teorema 2.1. Sea X_t^N, $N = 1, 2, \ldots$ una sucesión de elementos aleatorios de D, donde D es el espacio de las funciones sobre $[0, 1]$ cuyas discontinuidades son a lo más de primera clase, tales que:

i) $X_t^N = \dfrac{S_{[Nt]}}{N^{2H} L(N)}$, donde $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} Y_i$ siendo $\{Y_i\}$ una sucesión estrictamente estacionaria, con media cero y varianza finita; $0 < H \leq 1$, $L(\cdot)$ una función de variación lenta.

ii) $E\big[S_N^2\big] = O\big(N^{2H} L(N)\big)$, cuando $N \to \infty$.

iii) $E\left[|S_N|^{2a}\right] = O\left(E\left[S_N^2\right]^a\right)$, cuando $N \to \infty$ y algún $a > \frac{1}{2H}$.

iv) Las distribuciones finito–dimensionales de X_t^N convergen cuando $N \to \infty$.

Entonces la sucesión X_t^N converge débilmente cuando $N \to \infty$ hacia un proceso X_t, que cumple las propiedades 1 a 5 y cuyas distribuciones finito dimensionales son el límite de las X_t^N.

Para probar el teorema (2.1) es necesario el siguiente lema:

Lema 2.1. Una sucesión X_t^N con $N = 1, 2, \ldots$ de elementos de D que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) del teorema 2.1 es tirante.

Proof. Sea $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq 1$, $a > \frac{1}{2H}$. Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la estacionaridad de Y_i se tiene:

$$
\begin{aligned}
E\Big[\left|X_{t_2}^N - X_t^N\right|^a \left|X_t^N - X_{t_1}^N\right|^a\Big] &= \\
&= E\left[\left|\frac{S_{[Nt_2]}}{N^{2H}L(N)} - \frac{S_{[Nt]}}{N^{2H}L(N)}\right|^a \left|\frac{S_{[Nt]}}{N^{2H}L(N)} - \frac{S_{[Nt_1]}}{N^{2H}L(N)}\right|^a\right] \\
&= \frac{1}{(N^{2H}L(N))^a} E\Big[\left|S_{[Nt_2]} - S_{[Nt]}\right|^a \left|S_{[Nt]} - S_{[Nt_1]}\right|^a\Big] \\
&= \frac{1}{(N^{2H}L(N))^a} E\Big[\left|S_{[Nt_2]-[Nt]}\right|^a \left|S_{[Nt]-[Nt_1]}\right|^a\Big] \\
&\leq \frac{1}{(N^{2H}L(N))^a} \left(E\Big[S_{[Nt_2]-[Nt]}^{2a}\Big]\right)^{\frac{1}{2}} \left(E\Big[S_{[Nt]-[Nt_1]}^{2a}\Big]\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Por la hipótesis (iii) se sabe que existen K_1 y N_1 tales que para todo $N > N_1$, se tiene:

$$
(4) \leq \frac{1}{(N^{2H}L(N))^a} K_1 \left(E\left[S_{[Nt_2]-[Nt]}^2\right]\right)^{\frac{a}{2}} \left(E\left[S_{[Nt]-[Nt_1]}^2\right]\right)^{\frac{a}{2}} \qquad (5)
$$

y por la hipótesis (ii) se sabe que existen K_2 y $N_2 > N_1$ tales que para todo $N > N_2$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
(5) \leq \frac{1}{\left(N^{2H}L(N)\right)^a} K\Big(\big([Nt_2] - [Nt]\big)^{2H} L\big([Nt_2] - [Nt]\big)\Big)^{\frac{a}{2}} & \\
\times \Big(([Nt] - [Nt_1])^{2H} L\left([Nt] - [Nt_1]\right)\Big)^{\frac{a}{2}} & \qquad (6)
\end{aligned}
$$

donde $K = K_1 \times K_2$.

Como $\lim_{N\to\infty} \frac{[Nt]}{N} = t$ uniformemente y $L(\cdot)$ es una función de variación lenta, entonces:

$$
\lim_{N\to\infty} \frac{\big([Nt_2] - [Nt]\big)^{2H} L\Big(N\Big(\frac{[Nt_2]-[Nt]}{N}\Big)\Big)}{N^{2H}L(N)} = (t_2 - t)^{2H}
$$

por lo tanto para algún $N_3 > N_2$ y una constante positiva C:

$$(6) \leq C^{2Ha}\left(t_2 - t\right)^{Ha}\left(t - t_1\right)^{Ha} \leq \left(Ct_2 - Ct_1\right)^{2Ha}$$

es decir,

$$E\left[\left|X_{t_2}^N - X_t^N\right|^a \left|X_t^N - X_{t_1}^N\right|^a\right] \leq \left(Ct_2 - Ct_1\right)^{2Ha}$$

y como $a > \frac{1}{2H}$ entonces $aH > \frac{1}{2}$ y por los teoremas 15.4 y 15.6 de Billingsley (1968) se tiene que X_t^N es tirante. □

Proof. (del Teorema 2.1) La convergencia de las distribuciones finito–dimensionales (condición (iv)) y el lema 2.1 aseguran la convergencia débil de X_t^N hacia un límite X_t, pues éstas son las hipótesis del teorema 15.1 de Billingsley (1968). A continuación se probará que el proceso X_t cumple las condiciones $1 - 5$

i) $X_0 = 0$ pues $X_0^N = 0$.

ii) X_t tiene incrementos estacionarios pues Y_i es una sucesión estrictamente estacionaria.

iii) Lamperti (1962) demuestra que la sucesión X_t es autosimlar.

iv) Por las hipótesis (ii) y (iii) se tiene que:

$$E\left|X_1^N\right|^{2a} = E\left|\frac{S_1}{N^{2H}L(N)}\right|^{2a} \leq \frac{K_1\left[ES_N^2\right]^a}{N^{2H}L(N)} \leq \frac{K_2 N^{2H}L(N)}{N^{2H}L(N)}$$

cuando $N \to \infty$, por lo tanto $\sup_N E\left|X_1^N\right|^{2a} < \infty$. La sucesión $\left|X_1^N\right|^\gamma$ con $N = 1, 2, 3, 4 \ldots$ y $\gamma < 2a$ es uniformemente integrable y $E|X_1|^\gamma = \lim_{N\to\infty} E\left|X_1^N\right|^\gamma$. Sea $\gamma_0 = a + \dfrac{1}{2H}$, note que $\dfrac{1}{H} < \gamma_0 < 2a$. Por lo tanto se tiene:

$$E|X_t|^\gamma = t^\gamma E|X_1|^\gamma < \infty \text{ para } \gamma \leq \frac{1}{H} < 2a$$

como $E\left|X_1^N\right| = 0$ entonces $E\left|X_1\right| = 0$.

v) Se puede escoger una versión separable del proceso X_t y la continuidad se obtiene porque X_t es H–ss, estacionario y por lo tanto se puede usar el criterio de Kolmogorov. □

Los siguientes resultados dan condiciones necesarias y suficientes para garantizar que $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^N X_i)$ sea asintóticamente proporcional a $N^{2H}L(N)$ cuando $N \to \infty$ con $\frac{1}{2} < H < 1$.

Definición 2.1. Sea $r(k) = E[X_i X_{i+k}]$. Se dice que la sucesión $\{X_i\} \in (1)$ $(D, L(\cdot))$, si y sólo si, $r(k) \sim k^{-D}L(N)$ cuando $k \to \infty$, donde $0 < D < 1$ y $L(\cdot)$ es una función de variación lenta.

Definición 2.2. Se dice que la sucesión $\{X_i\} \in (1')(H, L(\cdot))$ si:

i) $\lim\limits_{k\to\infty} r(k) = 0$,

ii) $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N} r(i-j) \sim N^{2H}L(N)$, cuando $N\to\infty$,

iii) $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N} |r(i-j)| = O(N^{2H}L(N))$, cuando $N\to\infty$,

donde $\frac{1}{2} < H < 1$ y $L(\cdot)$ es de variación lenta.

Lema 2.2. $\{X_i\} \in (1)(D, L(\cdot))$ entonces:

$$\{X_i\} \in (1')\left(1 - \frac{D}{2},\ \frac{2L(\cdot)}{(1-D)(2-D)}\right)$$

Recíprocamente, si $r(k)$ es monótonamente decreciente para k grande. Entonces $\{X_i\} \in (1')\,(H, L(\cdot))$ implica que:

$$\{X_i\} \in (1)\big(2-2H, H\,(2H-1)\,L(\cdot)\big)$$

Teorema 2.2. Si la sucesión $r(k)$ es no negativa para k suficientemente grande y converge cuando $k\to\infty$ y si $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{N} X_i) \sim N^{2H}L(N)$ entonces $\{X_i\} \in (1')\big(H, L(\cdot)\big)$.

Teorema 2.3. Si para k suficientemente grande $r(k)$ es no negativa y es una sucesión monótonamente decreciente entonces $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{N} X_i) \sim N^{2H}L(N)$ cuando $N\to\infty$ con $\frac{1}{2} < H < 1$, si y sólo si, $r(k) \sim k^{2H-2}L(N)$ cuando $k\to\infty$.

Proof. Por el teorema (2.2) se tiene que si $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{N} X_i) \sim N^{2H}L(N)$, entonces, $\{X_i\} \in (1')\big(H, L(\cdot)\big)$ y por el lema (2.2) se obtiene que $\{X_i\} \in (1)\big(2-2H, H(2H-1)L(\cdot)\big)$, es decir, $r(k) \sim k^{2H-2}L(K)$.

Si $r(k) \sim k^{2H-2}L(K)$ entonces $\{X_i\} \in (1')\big(2-2H, H(2H-1)L(\cdot)\big)$ y por el lema (2.2) se tiene que $\{X_i\} \in \Big(H, \dfrac{L(\cdot)}{H(2H-1)}\Big)$. Por lo tanto $\mathrm{var}\Big(\sum\limits_{i=1}^{N} X_i\Big) \sim N^{2H}\dfrac{L(N)}{H(2H-1)}$. □

Si $\{X_i\} \in (1')\big(H, L(\cdot)\big)$ y si definimos la sucesión $X_t^N = \dfrac{1}{d_N}\sum\limits_{i=1}^{[N_t]} X_i$, donde $d_N^2 \sim N^{2H}L(N)$ cuando $N\to\infty$, entonces X_t^N converge en D hacia un proceso X_t que cumple las condiciones $1-5$. A continuación se va a tomar una sucesión de variables aleatorias que cumpla la anterior observación y se hará converger a un mBf.

Teorema 2.4. Sea $\{Y_i\}$ una sucesión de variables aleatorias gaussianas y estacionarias con media 0 y covarianza $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$. Si

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) \sim K N^{2H} L(N)$$

cuando $N \to \infty$, con $0 < H < 1$ y $L(\cdot)$ una función de variación lenta y $K > 0$. Entonces:

$$X_t^N = \frac{1}{d_N} \sum_{i=1}^{[N_t]} Y_i$$

con $d_N^2 \sim N^{2H} L(N)$, converge débilmente cuando $N \to \infty$ hacia $\sqrt{K} B_t^H$.

Proof. Como $Y_1, \ldots, Y_N$ tienen distribución conjunta gaussiana, entonces $X_{t_1}^N, \ldots, X_{t_p}^N$ también. Sean:

$$\begin{aligned} C^N(t_i, t_j) &= E\left[X_{t_i}^N X_{t_j}^N\right] \\ C(t_i, t_j) &= \lim_{N \to \infty} C^N(t_i, t_j) \end{aligned}$$

Cuando $N \to \infty$ la función característica de $(X_{t_1}^N, \ldots, X_{t_p}^N)$ converge hacia la función característica de $X_{t_1}, \ldots, X_{t_p}$ donde $(X_{t_1}, \ldots X_{t_p})$ es variable aleatoria con distribución normal multivariada con vector de media 0 y matriz de covarianza $C = (C(t_i, t_j))$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$. Sean:

$$\begin{aligned} S_{[Nt_i]} &= \sum_{u=1}^{[Nt_i]} Y_u \\ C^N\left(t_i, t_j\right) &= \frac{1}{N^{2H} L(N)} \frac{1}{2}\left(E\left[S_{[Nt_i]}^2\right] + E\left[S_{[Nt_j]}^2\right] - E\left[S_{|[Nt_i]-[Nt_j]|}^2\right]\right) \end{aligned}$$

Por hipótesis se tiene:

$$E\left[S_{[Nt_i]}^2\right] = \sum_{u=1}^{[Nt_i]} \sum_{v=1}^{[Nt_i]} \operatorname{cov}\left(Y_u, Y_v\right) \sim K N^{2H} L\left([Nt_i]\right) t_i^{2H}$$

cuando $N \to \infty$, luego:

$$C\left(t_i, t_j\right) = K \frac{1}{2}\left(t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}\right)$$

Por lo tanto:

$$\left(X_{t_1}^N, \ldots, X_{t_p}^N\right) \xrightarrow{d} \left(\sqrt{K} B_{t_1}^H, \ldots, \sqrt{K} B_{t_p}^H\right)$$

Como S_N es Gaussiana entonces existe un $\hat{K}$ tal que $E\left[S_N^{2n}\right] \leq \hat{K} E\left[S_N^2\right]^n$ para todo $n \geq 1 > \frac{1}{2H}$. Por el lema 2.1 la sucesión X_t^N es tirante y aplicando el teorema 15.1 de Billingsley (1968), se tiene que X_t^N converge débilmente hacia $\sqrt{K} B_t^H$, cuando $N \to \infty$. □

3. Caminos aleatorios

En esta sección se presentará la construcción del mBf, realizada por Sottinen (2001). Esta construcción es motivada por las aplicaciones en finanzas. Como se ha hecho desde la época Bachelier, un camino natural a seguir es aproximar el proceso por medio de caminatas aleatorias. El primer trabajo hecho, en este sentido, es el teorema de Donsker, el cual aproxima el movimiento browniano por caminatas aleatorias. Cuando el exponente de Hurst $H > \frac{1}{2}$, se dice que la serie de tiempo tiene una dependencia a largo plazo y son las series de este tipo las que se trabajan en economía, por lo tanto para esta construcción sólo se tendrá en cuenta este caso.

Sean $\xi_i^{(n)}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, tales que $E\big[\xi_i^{(n)}\big] = 0$ y $\operatorname{var}\big[\xi_i^{(n)}\big] = 1$. Sea:

$$B_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{[nt]} \left(n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K_H\left(\frac{[nt]}{n},\ s\right) ds \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_i^{(n)}$$

donde

$$K_H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du$$

y $c_H = \left[\frac{H(2H-1)}{\beta\left(H-\frac{1}{2}, 2-2H\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$ y $t > s$.

Teorema 3.1. La caminata aleatoria $B^{(n)} = (B_t^{(n)})_{t \geq 0}$ converge débilmente hacia el mBf.

Proof. Lo primero que se mostrará es que las distribuciones finito dimensionales de $B^{(n)}$ convergen hacia la de B^H y luego se mostrará que la sucesión $\{B^{(n)}\}$ es tirante.

Para $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_d \in [0, T]$ se desea mostrar que:

$$Y^{(n)} = \sum_{h=1}^{d} a_h B_{t_h}^{(n)}$$

converge a una distribución normal con media cero y varianza $E\left(\sum_{h=1}^d a_h B_{t_h}^{(n)}\right)^2$. La media de $Y^{(n)}$ es cero porque $E\big[\xi_i^{(n)}\big] = 0$. A continuación se calculará el límite de la varianza de $Y^{(n)}$.

$$\operatorname{var}\big(Y^{(n)}\big) = \sum_{h,l=1}^{d} a_h a_l n \sum_{i=1}^{[nT]} \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K_H\Big(\frac{[nt_h]}{n}, s\Big) ds \right) \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K_H\Big(\frac{[nt_l]}{n}, s\Big) ds \right)$$

Por el teorema del valor medio se tiene que:

$$\operatorname{var}(Y^{(n)}) = \sum_{h,l=1}^{d} a_h a_l \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nT]} K_H\left(\frac{[nt_h]}{n}, s_{i,\ h}^{(n)}\right) K_H\left(\frac{[nt_l]}{n}, s_{i,\ l}^{(n)}\right)$$

para algún par de puntos $s_{i,\ h}^{(n)}$ y $s_{i,\ l}^{(n)} \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$. Como la función $K_H(t,\cdot)$ es continua y decreciente en $(0,T]$, entonces:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nT]} K_H\left(\frac{[nt_h]}{n}, s_{i,\ h}^{(n)}\right) K_H\left(\frac{[nt_l]}{n}, s_{i,\ l}^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{[nT]} \frac{1}{n} K_H\left(\frac{[nt_h]}{n}, u_i^{(n)}\right) K_H\left(\frac{[nt_l]}{n}, u_i^{(n)}\right)$$

para algún $u_i^{(n)} \in \left[\min\left(s_{i,\ h}^{(n)}\ s_{i,\ l}^{(n)}\right), \max\left(s_{i,\ h}^{(n)}\ s_{i,\ l}^{(n)}\right)\right] \subset \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$. Usando el hecho que el núcleo $K_H(t,s)$ es continuo con respecto a ambos argumentos y que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[nt]}{n} \to t$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{[nT]} \frac{1}{n} K_H\left(\frac{[nt_h]}{n}, u_i^{(n)}\right) K_H\left(\frac{[nt_l]}{n}, u_i^{(n)}\right) = \int_0^T K_H(t_h,s)K_H(t_l,s)ds$$

y por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}(Y^{(n)}) = \sum_{h,l=1}^{d} a_h a_l \int_0^T K_H(t_h,s)K_H(t_l,s)ds = E\Big(\sum_{h=1}^{d} a_h B^H\Big)^2$$

Sea

$$Y_i^{(n)} = \sqrt{n}\xi_i^{(n)} \sum_{k=1}^{d} a_k \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K\left(\frac{[nt_k]}{n}, s\right) ds$$

es claro que:

$$Y^{(n)} = \sum_{i=1}^{[nt]} \sqrt{n}\xi_i^{(n)} \sum_{k=1}^{d} a_k \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K\left(\frac{[nt_k]}{n}, s\right) ds = \sum_{i=1}^{[nt]} Y_i^{(n)}$$

Por la desigualdad de Cauchy–Schwarz y del hecho que $K(\cdot,s)$ es creciente y $K(t,\cdot)$ es decreciente se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left(Y_i^{(n)}\right)^2 &= n\left(\xi_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{d} a_k \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K\left(\frac{[nt_k]}{n}, s\right) ds\right)^2 \\
&\leq \left(\xi_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{d} a_k\right)^2 \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \sqrt{n}K\left(T,s\right) ds\right)^2 \\
&\leq \left(\xi_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{d} a_k\right)^2 \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K\left(T,s\right)^2 ds \\
&\leq \left(\xi_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{d} a_k\right)^2 \int_0^{\frac{1}{n}} K\left(T,s\right)^2 ds
\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
A_i &= \left\{ \left| Y_i^{(n)} \right| > \varepsilon \sqrt{\operatorname{var}(Y^{(n)})} \right\} = \left\{ \left(Y_i^{(n)} \right)^2 > \varepsilon^2 \operatorname{var}\left(Y^{(n)} \right) \right\} \\
&\subseteq \left\{ \left(\xi_i^{(n)} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{d} a_k \right)^2 \int_0^{\frac{1}{n}} K(T,s)^2 \, ds > \varepsilon^2 \operatorname{var}(Y^{(n)}) \right\} =: D^{(n)} \left(\xi_i^{(n)} \right)
\end{aligned}
$$

Por hipótesis se sabe que $E(\xi_i^{(n)})^2 = 1$ y con la anterior contenencia se obtiene:

$$
E \left(Y_i^{(n)} \right)^2 1_{A_i} \leq \operatorname{var}(Y_i^{(n)}) E \left(\xi_i^{(n)} \right)^2 1_{D^{(n)}\left(\xi_i^{(n)}\right)}
$$

y como las v.a. $\xi_i^{(n)}$ son i.i.d., entonces:

$$
\frac{1}{\operatorname{var}\big(Y_i^{(n)}\big)} \sum_{i=1}^{[nT]} E \left(Y_i^{(n)} \right)^2 1_{A_i} \leq \frac{\sigma_1^{(n)} + \cdots + \sigma_{[nt]}^{(n)}}{\operatorname{var}\big(Y_i^{(n)}\big)} E\big(\xi^2 1_{D^{(n)}(\xi)}\big) = E\big(\xi^2 1_{D^{(n)}(\xi)}\big)
$$

Como $\lim_{n\to\infty} E(\xi^2 1_{D^{(n)}(\xi)}) = 0$, entonces la condición de Lindeberg se cumple, lo cual implica:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{var}\big(Y_i^{(n)}\big)} \sum_{i=1}^{[nT]} E \left(Y_i^{(n)} \right)^2 1_{\left\{ \left| Y_i^{(n)} \right| > \varepsilon \sqrt{\operatorname{var}\left(Y^{(n)}\right)} \right\}} = 0
$$

En consecuencia se obtiene la convergencia de las distribuciones finito dimensionales de $B^{(n)}$ hacia las de B^H. A continuación se probará la tirantez. Sean s, t arbitrarios con $s < t$, usando de nuevo la desigualdad de Cauchy–Schwarz se obtiene

$$
\begin{aligned}
E \left(B_t^{(n)} - B_s^{(n)} \right)^2 &= E \left(\sum_{i=1}^{[nt]} \sqrt{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K \left(\frac{[nt]}{n}, u \right) - K \left(\frac{[ns]}{n}, u \right) du \xi_i^{(n)} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\sqrt{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K \left(\frac{[nt]}{n}, u \right) - K \left(\frac{[ns]}{n}, u \right) du \right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{[nt]} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(K \left(\frac{[nt]}{n}, u \right) - K \left(\frac{[ns]}{n}, u \right) \right)^2 du \\
&\leq \int_0^t \left(K \left(\frac{[nt]}{n}, u \right) - K \left(\frac{[ns]}{n}, u \right) \right)^2 du \\
&= \left| \frac{[nt]}{n} - \frac{[ns]}{n} \right|^{2H}
\end{aligned}
$$

Para $s < t < u$ reales arbitrarios. Se obtiene por la desigualdad de Cauchy–

Schwarz y la anterior desigualdad que:

$$\begin{aligned} E\left|B_t^{(n)}-B_s^{(n)}\right|\left|B_u^{(n)}-B_s^{(n)}\right| &\leq \left[E\left(B_t^{(n)}-B_s^{(n)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\left(B_t^{(n)}-B_s^{(n)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left|\frac{[nt]}{n}-\frac{[ns]}{n}\right|^H\left|\frac{[nu]}{n}-\frac{[ns]}{n}\right|^H \\ &\leq \left|\frac{[nu]}{n}-\frac{[ns]}{n}\right|^{2H} \end{aligned}$$

Si $u-s<\frac{1}{n}$, entonces s y t o t y u están en el mismo subintervalo $\left[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}\right)$ para algún m, de aquí se tiene que:

$$E\left|B_t^{(n)}-B_s^{(n)}\right|\left|B_u^{(n)}-B_s^{(n)}\right| \to 0, \text{ cuando } n\to\infty$$

y si $u-s\geq\frac{1}{n}$ se sigue que:

$$E\left|B_t^{(n)}-B_s^{(n)}\right|\left|B_u^{(n)}-B_s^{(n)}\right| \leq |2(u-s)|^{2H}$$

Como $H>\frac{1}{2}$, el teorema 15.6 de Billingsley (1968), implica la tirantez de $B^{(n)}$. □

4. Aproximación por procesos de Poisson

En esta sección se presentará la construcción realizada por Delgado & Jolis (2000). En dicho artículo se aproximan las distribuciones del mBf por medio de los procesos continuos construidos a partir de un proceso de Poisson, de la siguiente manera:

$$Y^\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 K_H(t,r)(-1)^{N(r/\varepsilon^2)}dr \xrightarrow{D} \int_0^1 K_H(t,r)dW_r$$

donde $N=\{N(t),t\geq 0\}$ es un proceso de Poisson definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, $(W_t)_{t\in[0,1]}$ un movimiento browniano estándar definido en el espacio de probabilidad $(\Omega',\mathfrak{F}',P')$, donde E y E' denotarán los valores esperados con respecto a P y P' respectivamente y K_H es el núcleo de representación del mBf.

Teorema 4.1. Para cualquier $m\in\mathbb{N}$ par, existe una constante $c_m=\frac{m!}{2^{m/2}}$, tal que para todo $\varepsilon>0$ y para toda $f\in L^2([0,1])$, se satisface:

$$E\left[\left(\int_0^1 f(r)\theta_\varepsilon(r)dr\right)^m\right]\leq c_m\left(\int_0^1 f^2(r)dr\right)^{\frac{m}{2}}$$

siendo $\theta_\varepsilon(r)=\frac{1}{\varepsilon}N\left(\frac{r}{\varepsilon^2}\right)$.

Proof.

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^1 f(r)\theta_\varepsilon(r)\,dr\right)^m\right]\\
&\quad= E\left[\int_{[0,1]^m} f(r_1)\cdots f(r_m)\theta_\varepsilon(r_1)\cdots\theta_\varepsilon(r_m)\,dr_1\cdots dr_m\right]\\
&\quad= \frac{m!}{\varepsilon^m}E\left[\int_{[0,1]^m} f(r_1)\cdots f(r_m)(-1)^{N\left(\frac{r_1}{\varepsilon^2}\right)+\cdots+N\left(\frac{r_m}{\varepsilon^2}\right)}1_{[r_1\le\cdots\le r_m]}\,dr_1\cdots dr_m\right]
\end{aligned}
$$

pues $\theta_\varepsilon(r_i)=\frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N\left(\frac{r_i}{\varepsilon^2}\right)}$ para $i=1,\ldots,m$. Por otra parte se tiene:

$$
\sum_{i=1}^{m/2}\left[N\left(\frac{r_{2i}}{\varepsilon^2}\right)-N\left(\frac{r_{2i-1}}{\varepsilon^2}\right)\right]=\left[N\left(\frac{r_2}{\varepsilon^2}\right)-N\left(\frac{r_1}{\varepsilon^2}\right)\right]+\cdots+\left[N\left(\frac{r_m}{\varepsilon^2}\right)-N\left(\frac{r_{m-1}}{\varepsilon^2}\right)\right]
$$

como $(-1)^{-N\left(\frac{r_i}{\varepsilon^2}\right)}=(-1)^{N\left(\frac{r_i}{\varepsilon^2}\right)}$, entonces:

$$
E\left[(-1)^{N\left(\frac{r_1}{\varepsilon^2}\right)+\cdots+N\left(\frac{r_m}{\varepsilon^2}\right)}\right]=E\left[(-1)^{\sum_{i=1}^{m/2}N\left(\frac{r_{2i}}{\varepsilon^2}\right)-N\left(\frac{r_{2i-1}}{\varepsilon^2}\right)}\right]
$$

de donde:

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^1 f(r)\theta_\varepsilon(r)dr\right)^m\right]\\
&= \frac{m!}{\varepsilon^m}\int_{[0,1]^m}1_{[r_1\le\cdots\le r_m]}f(r_1)\cdots f(r_m)E\left[(-1)^{\sum_{i=1}^{m/2}N\left(\frac{r_{2i}}{\varepsilon^2}\right)-N\left(\frac{r_{2i-1}}{\varepsilon^2}\right)}\right]dr_1\cdots dr_m
\end{aligned}
$$

Como $N(t)$ es un proceso de Poisson, entonces posee incrementos independientes, estacionarios y $N(0)=0$, y en consecuencia:

$$
\sum_{i=1}^{m/2}\left[N\left(\frac{r_{2i}}{\varepsilon^2}\right)-N\left(\frac{r_{2i-1}}{\varepsilon^2}\right)\right]\stackrel{d}{=}\sum_{i=1}^{m/2}N\left(\frac{r_{2i}-r_{2i-1}}{\varepsilon^2}\right)
$$

Por lo tanto:

$$
E\left[(-1)^{\sum_{i=1}^{m/2}N\left(\frac{r_{2i}-r_{2i-1}}{\varepsilon^2}\right)}\right]=\exp\left[\frac{-2}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{m/2}(r_{2i}-r_{2i-1})\right]
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^1 f(r)\theta_\varepsilon(r)\,dr\right)^m\right]\\
&= \frac{m!}{\varepsilon^m}\int_{[0,1]^m} 1_{[r_1\le\cdots\le r_m]} f(r_1)\cdots f(r_m)\exp\left[\frac{-2}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{m/2}(r_{2i}-r_{2i-1})\right]dr_1\cdots dr_m\\
&\le \frac{m!}{\varepsilon^m}\int_{[0,1]^m}\left(\prod_{i=1}^{m/2}1_{[r_{2i}\le r_{2i-1}]}\right)|f(r_1)\cdots f(r_m)|\left(\prod_{i=1}^{m/2}e^{-2\frac{(r_{2i}-r_{2i-1})}{\varepsilon^2}}\right)dr_1\cdots dr_m\\
&= m!\left(\int_{[0,1]^2}1_{[r_1\le r_2]}|f(r_1)f(r_2)|\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-2\frac{(r_2-r_1)}{\varepsilon^2}}dr_1dr_2\right)^{\frac{m}{2}}\\
&= m!\left(\int_{[0,1]}|f(r_2)|\int_{[0,1]}|f(r_1)|\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-2\frac{(r_2-r_1)}{\varepsilon^2}}1_{[r_2-r_1\le 0]}dr_1dr_2\right)^{\frac{m}{2}} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz a (7) se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]}|f(r_2)|\int_{[0,1]}|f(r_1)|\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\left(-2\frac{(r_2-r_1)}{\varepsilon^2}\right)1_{[r_2-r_1\le 0]}dr_1dr_2\\
&\quad\le\left(\int_{[0,1]}|f(r)|^2dr\right)^{\frac12}\left(\int_{[0,1]}\left[|f(r_1)|\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\left(-2\frac{(r_2-r_1)}{\varepsilon^2}\right)1_{[r_2-r_1\le 0]}\right]^2dr_1\right)^{\frac12}\\
&\quad=\left(\int_{[0,1]}|f(r)|^2dr\right)^{\frac12}\left(\int_0^1(g*h)^2(r)dr\right)^{\frac12} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

donde $g(r)=\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\left(-2\frac{r}{\varepsilon^2}\right)1_{[r\le 0]}$ y $h(r)=|f(r)|$. Usando la desigualdad de Young en el último término de (8) con $p=1$, $q=2$ y $r=2$, se tiene que:

$$
\left(\int_0^1(g*h)^2(r)dr\right))^{\frac12}\le\left(\int_{[0,1]}\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\left(-2\frac{r}{\varepsilon^2}\right)1_{[r\le\ 0]}dr\right)\left(\int_{[0,1]}|f(r)|^2dr\right)^{\frac12}
$$

pero

$$
\left(\int_{[0,1]}\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\left(-2\frac{r}{\varepsilon^2}\right)1_{r\le\ 0}\,dr\right)=\frac12-\frac12\exp\left(\frac{-2}{\varepsilon^2}\right)\le\frac12
$$

Por lo tanto

$$
E\left[\left(\int_0^1 f(r)\theta_\varepsilon(r)dr\right)^m\right]\le\frac{m!}{2^{m/2}}\left(\int_0^1 f^2(r)\,dr\right)^{\frac{m}{2}} \qquad \square
$$

Sea $X=\{X_t,t\in[0,1]\}$ un proceso gaussiano centrado, definido sobre un espacio de probabilidad apropiado, con función de covarianza:

$$
\operatorname{cov}(X_s,X_t)=\int_0^1 K(t,r)K(s,r)dr
$$

donde $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función que satisface:

i) K es medible y $K(0,r) = 0$ para cualquier $r \in [0,1]$. (9)

ii) Existe una función continua y creciente $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ y una constante $\alpha > 0$, tal que para cualquier $0 \leq s < t \leq 1$ se cumple que:

$$\int_0^1 (K(t,r) - K(s,r))^2 \, dr \leq (G(t) - G(s))^\alpha \tag{10}$$

La condición (10) implica que $K(t,\cdot) \in L^2([0,1])$ para todo $t \in [0,1]$.

Sea $\{Y_t^\varepsilon\}_{t>0}$, con $\varepsilon > 0$, un proceso definido sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ por:

$$Y_t^\varepsilon = \int_0^1 K(t,r)\theta_\varepsilon(r)dr \quad \text{para} \quad t \in [0,1]$$

donde $\theta_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(r/\varepsilon^2)}$. El proceso $\{Y_t^\varepsilon\}$ es un proceso continuo, pues:

$$\begin{aligned}
|Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon| &= \left| \int_0^1 (K(t,r) - K(s,r))\theta_\varepsilon(r) \, dr \right| \\
&\leq \left(\int_0^1 (K(t,r) - K(s,r))^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(r/\varepsilon^2)} \right)^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^1 (K(t,r) - K(s,r))^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} (G(t) - G(s))^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Teorema 4.2. Sea $\{Q_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la familia de distribuciones en $C([0,1])$ de los procesos Y^ε. Entonces cuando $\varepsilon \to 0$ $\{Q_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge débilmente hacia Q, donde Q tiene la misma distribución que X.

Proof. El primer paso de la demostración será probar que la sucesión Y^ε es tirante. Para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$E\left[(Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon)^m\right] = E\left[\left(\int_0^1 \left[K(t,r) - K(s,r)\right] \theta_\varepsilon(r) dr \right)^m \right]$$

por la condición (10) y el teorema 4.1, se sabe que existe una constante $c_m = \frac{m!}{2^{m/2}}$ tal que:

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^1 [K(t,r) - K(s,r)]\theta_\varepsilon(r) \, dr \right)^m \right] &\leq c_m \left(\int_0^1 [K(t,r) - K(s,r)]^2 \, dr \right)^{\frac{m}{2}} \\
&\leq c_m \left(G(t) - G(s)\right)^{\alpha \frac{m}{2}}
\end{aligned}$$

y como $K(0,\cdot) = 0$ entonces $Y_0^\varepsilon = 0$. Luego se cumple las hipótesis del teorema 12.3 de Billingsley (1968) y por lo tanto Y_t^ε es tirante. El siguiente paso será probar que la distribución de Y^ε converge hacia la distribución de:

$$Y_t = \int_0^1 K(t,r)dW_r \quad \text{con } t \in [0,1]$$

Para ello se probará que la distribución de $S_\varepsilon = \sum_{i=1}^k a_i Y_{t_i}^\varepsilon$ converge débilmente cuando $\varepsilon \to 0$ hacia la de $S = \sum_{i=1}^k a_i Y_{t_i}^\varepsilon$, donde $k \geq 1$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ y $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$. Se sabe que Y_t tiene una distribución normal, con media cero y:

$$\operatorname{cov}(X_s, X_t) = \int_0^1 K(t,r)K(s,r)dr$$

De la definición de Y^ε y Y se tiene que:

$$S_\varepsilon = \int_0^1 K^*(r)\theta_\varepsilon(r)dr \qquad \text{y} \qquad S = \int_0^1 K^*(r)dW_r$$

donde $K^*(r) = \sum_{i=1}^k a_i K(t_i, r)$.

La función K^* pertenece a L^2 y por consiguiente se puede aproximar por una sucesión de funciones elementales de la forma:

$$K^n(r) = \sum_{i=0}^{m_n - 1} b_i^n 1_{\left(r_i^n, r_{i-1}^n\right]}(r)$$

con $B_i^n \in \mathbb{R}$ $0 = r_0^n < r_1^n \cdots < r_{m_n-1}^n < r_{m_n}^n = 1$ y con

$$\int_0^1 \left(K^*(r) - K^n(r)\right)^2 dr \leq \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $S_\varepsilon^n = \int_0^1 K^n(r)\theta_\varepsilon(r)\,dr$ y $S^n = \int_0^1 K^n(r)\,dW$. Por el teorema 4.1 se sabe que existe una constante C, tal que:

$$\begin{aligned} E\left[(S_\varepsilon - S_\varepsilon^n)^2\right] &= E\left[\int_0^1 (K^* - K^n)(r)\theta_\varepsilon(r)\right]^2 \\ &\leq C\int_0^1 (K^*(r) - K^n(r))^2\,dr \leq C\frac{1}{n} \end{aligned} \tag{11}$$

Aplicando el teorema del valor medio y (11) se tiene que:

$$\left|E\left[e^{ixS_\varepsilon}\right] - E\left[e^{ixS_\varepsilon^n}\right]\right| \leq E\left[\left|e^{ixS_\varepsilon} - e^{ixS_\varepsilon^n}\right|\right] \leq xE[S_\varepsilon - S_\varepsilon^n] \leq Cx\frac{1}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado en Stroock (1982), se demuestra que para $n \in \mathbb{N}$ fijo y $\varepsilon \to 0$ se cumple:

$$S_\varepsilon^n = \sum_{i=0}^{m_n-1} K_i^n \int_{r_i^n}^{r_{i+1}^n} \theta_\varepsilon(r)\, dr \xrightarrow{d} \sum_{i=0}^{m_n-1} K_i^n \int_{r_i^n}^{r_{i+1}^n} dW_r = S^n$$

y en consecuencia para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$E\left[e^{ixS_\varepsilon^n}\right] \to E'\left[e^{ixS^n}\right] \tag{13}$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Además al aplicar el teorema del valor medio, la isometría de Itô y (4.1), se obtiene:

$$\begin{aligned}\left|E'\left[e^{ixS^n}\right] - E'\left[e^{ixS}\right]\right| &\leq E'\left[\left|e^{ixS^n} - e^{ixS}\right|\right] \leq xE\left[|S^n - S|\right] \\ &\leq x\left(E[S^n - S]^2\right)^{\frac{1}{2}} = xE\left[\left(\int_0^1 K^n(r) - K^*(r)dW_r\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= x\left(\int_0^1 (K^n(r) - K^*(r))^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} \leq Cx\frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned} \tag{14}$$

Como:

$$\begin{aligned}\left|E\left[e^{ixS\varepsilon}\right] - E'\left[e^{ixS}\right]\right| \leq& \left|E\left[e^{ixS_\varepsilon}\right] - E\left[e^{ixS_\varepsilon^n}\right]\right| \\ &+ \left|E\left[e^{ixS_\varepsilon^n}\right] - E'\left[e^{ixS^n}\right]\right| + \left|E'\left[e^{ixS^n}\right] - E'\left[e^{ixS}\right]\right|\end{aligned}$$

entonces, por (12),(13) y (14):

$$\left|E\left[e^{ixS\varepsilon}\right] - E'\left[e^{ixS}\right]\right| \leq Cx\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + Cx\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Esto es, la función característica de S_ε converge a la función característica de S y en consecuencia S_ε converge débilmente hacia S. □

Para aproximar el mBf haciendo uso del teorema anterior, se debe encontrar una función K que cumpla las condiciones (9) y (10). Esta función se presenta de manera natural y no es otra que el núcleo de representación del mBf, (*véase* Nualart 2003).

La condición (9) se cumple pues:

- para $H > \frac{1}{2}$ se tiene:

  $$K_H(t,s) = 1_{[0,t]} c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du$$

  por lo tanto $K_H(0,s) = 0$.

- y para $H < \frac{1}{2}$ se tiene:

$$K_H(t,s) = 1_{[0,t]} C_H \left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - \left(H - \frac{1}{2}\right) s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{H-\frac{3}{2}} (u-s)^{H-\frac{1}{2}} du \right]$$

de donde $K_H(0,s) = 0$.

Finalmente, la condición (10) también se satisface pues:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(K_H(t,r) - K_H(s,r)\right)^2 dr &= E\left[\int_0^1 \left(K_H(t,r) - K_H(s,r)\right) dW_r\right]^2 \\ &= E\left[(B_t^H - B_s^H)^2\right] = |t-s|^{2H} \end{aligned}$$

Recibido: 16 de Agosto de 2005
Aceptado: 25 de Octubre de 2005

References

Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York.

Cavanzo, A. (2004), 'El movimiento browniano fraccional como límite de ciertos tipos de procesos estocásticos'.

Decreusefond, L. & Üstünel, A. (1958), Fractional brownian motion: Theory and applications. http://www.emath.fr/proc/vol5/.

Delgado, R. & Jolis, M. (2000), 'Weak approximation for a class of gaussian process', *Applied Probability* **37**(2), 400–407.

Embrechts, P. & Maejima, M. (2002), *Selfsimilar Stochastic Processes*, Princeton University Press.

Feller, W. (1951), 'The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables', *Ann. Math. Stat.* **22**, 427–432.

Feller, W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and its Applications 2*, John Willey & Sons, New York.

Lamperti, J. (1962), 'Semi-stable stochastic processes', *Amer. Math. Soc. Trans.* **104**, 62–78.

Lin, S. (1995), 'Stochastic analysis of fractional brownian motion', *Stochastic and Stochastic Reports* **55**(1-2), 121–140.

Mandelbrot, B. & Ness, J. V. (1968), 'Fractional brownian motion, fraccional noises and applications', *SIAM Review* **10**(4), 422–437.

Nualart, D. (2003), Stochastic integration with respect to fractional brownian motion an applications. Preprint.

Sottinen, T. (2001), 'Fractional brownian motion, random walks and binary market models', *Finance and Stochastic* **5**(3), 343–355.

Sottinen, T. (2003), Fractional brownian motion in finance and queueing, Technical report, Academic Dissertation, Department of Mathematics, Faculty of Science University of Helsinki.

Stroock, D. (1982), *Topics in Stochastic Differential Equations*, Tata Institute of Fundamental Research & Springer Verlag, Berlín.

Taqqu, M. (1975), 'Weak convergence to fractional brownian motion and to the Rosenblatt process', *Z. Wahrsch. Verwandte Gebiete* **31**, 287–302.

Vervaat, W. (1985), 'Sample path properties of self-similar processes with stationary increments', *Annals of Probability* **13**, 1–27.