Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 57, 2 (1999)

B. Belaïdi

LA RELATION ENTRE $\beta_\alpha(A, F)$ ET $\Delta_\alpha(A, F)$ POUR LES FONCTIONS Q-QUASI-CONFORMES

Abstract. In this paper, we study more general characteristics than the values of $\beta(a, F)$ and $\Delta(a, F)$. That means what is called α-deficiency in the sense of G. Valiron and α-value of deviation in the sense of V.P. Petrenko of Q-quasi-conformal functions.

Résumé. Dans cet article on étudie des caractéristiques plus générales que celles des valeurs $\beta(a, F)$ et $\Delta(a, F)$. C'est à dire ce qu'on appelle α-défaut au sens de G. Valiron et α-valeur de déviation au sens de V.P. Petrenko pour les fonctions Q-quasi-conformes.

1. Position du problème

La relation entre la valeur de déviation au sens de V.P. Petrenko et la valeur du défaut au sens de G. Valiron pour les fonctions méromorphes et Q-quasi-conformes a été étudiée dans plusieurs travaux ([1, 2]).

Donnons quelques résultats dans ce sens.

Soit f une fonction méromorphe. La valeur de déviation au sens de V.P. Petrenko est définie par la relation

$$\beta(a, f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}, \tag{1}$$

telle que

$$L(r, a, f) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|f(z) - a|}, \quad L(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \ln^+ |f(z)|, \tag{2}$$

et $T(r, f)$ la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de f définie par la relation

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta + d(f), \tag{3}$$

où $d(f)$ est une constante qui ne dépend pas de r et

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t}\, dt + n(0, a, f)\ln r, \tag{4}$$

avec $n(t, a, f)$ désigne le nombre de solutions de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \le t$. Chacun des zéros étant compté avec son ordre de multiplicité. La valeur du défaut au sens de

G. Valiron est définie par la relation

$$\Delta(a, f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}, \tag{5}$$

telle que

$$\begin{aligned} m(r, a, f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left| f\left(re^{i\theta}\right) - a\right|}\, d\theta, \\ m(r, \infty, f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta, \end{aligned} \tag{6}$$

et $T(r, f)$ la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de f.

THÉORÈME 1 ([1], P. 47). *Soit f une fonction méromorphe pour $z \neq \infty$, d'ordre inférieur fini λ. Alors pour tout $a \in \overline{\mathbb{C}}$*

$$\beta(a, f) \le B(\lambda, \Delta(a, f)), \tag{7}$$

avec

$$B(\lambda, \Delta) = \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & si\ \lambda \ge 0.5\ ou\ \lambda < 0.5\ et\ \Delta \le 1 - \cos\lambda\pi \\ \pi\lambda\left(\Delta \operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\right), & si\ \lambda < 0.5\ et\ \Delta > 1 - \cos\lambda\pi \end{cases}$$

Soit F une fonction Q-quasi-conforme*. La valeur de déviation au sens de V.P. Petrenko est définie par la relation

$$\beta(a, F) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{L(r, a, F)}{T(r, F)}, \tag{8}$$

telle que

$$L(r, a, F) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|F(z) - a|},\ L(r, \infty, F) = \max_{|z|=r} \ln^+ |F(z)|, \tag{9}$$

et $T(r, F)$ la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de F définie par la relation

$$T(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, F\right) d\theta, \tag{10}$$

avec

$$N(r, a, F) = \int_1^r \frac{n(t, a, F)}{t}\, dt, \tag{11}$$

et $n(t, a, F)$ désigne le nombre de solutions de l'équation $F(z) = a$ dans le disque $|z| \le t$. Chacun des zéros étant compté avec son ordre de multiplicité. La valeur du défaut au sens de G. Valiron est définie par la relation

$$\Delta(a, F) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{m(r, a, F)}{T(r, F)}, \tag{12}$$

*C'est à dire la fonction $F(z) = \Phi(\chi(z))$, telle que $\Phi(w)$ une fonction méromorphe pour $w \neq \infty$ et $w = \chi(z)$ une transformation Q-quasi-conforme ($\chi(0) = 0$, $\chi(\infty) = \infty$).

telle que

$$m(r, a, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|F\left(re^{i\theta}\right) - a\right|} \, d\theta \,,$$
(13)
$$m(r, \infty, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left|F\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \,,$$

et $T(r, F)$ la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de F.

THÉORÈME 2 ([2]). *Soit F une fonction Q-quasi-conforme pour $z \neq \infty$, d'ordre inférieur fini λ. Alors pour tout $a \in \overline{\mathbb{C}}$*

$$\beta(a, F) \leq C(Q, \lambda)\sqrt{\Delta(a, F)} \,, \tag{14}$$

avec $C(Q, \lambda)$ une constante positive qui dépend uniquement de Q et λ.

Il est connu ([3]) que pour les fonctions méromorphes et les fonctions Q-quasi-conformes d'ordre inférieur infini les relations (7) et (14) n'ont pas de sens.

Dans la théorie de la distribution des valeurs, l'étude des fonctions Q-quasi-conformes nécessite l'étude de caractéristiques plus générales que celles des valeurs $\beta(a, F)$, $\Delta(a, F)$ et $\delta(a, F)$. C'est à dire ce qu'on appelle α-défaut et α-valeur de déviation ([4, p. 78]). Soit F une fonction Q-quasi-conforme. Posons pour tout α, $0 < \alpha \leq 1$

$$\Delta_\alpha(a, F) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(r, a, F)}{T^\alpha(r, F)} \,,$$
$$\beta_\alpha(a, F) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{L(r, a, F)}{T^\alpha(r, F)} \,,$$

où $L(r, a, F)$, $T(r, F)$ et $m(r, a, F)$ sont déjà définis en (9), (10) et (13).

2. Résultat Principal

Le résultat essentiel de cet article est

THÉORÈME 3. *Si F est une fonction Q-quasi-conforme pour $z \neq \infty$, d'ordre inférieur fini λ, alors pour tout γ, $0 < \gamma \leq 1$ et tout $a \in \overline{\mathbb{C}}$*

$$\beta_{\frac{1+\gamma}{2}}(a, F) \leq C(Q, \lambda)\sqrt{\Delta_\gamma(a, F)} \,, \tag{15}$$

où $C(Q, \lambda)$ est une constante positive qui dépend uniquement de Q et λ.

Ce résultat généralise le théorème 2 qu'on retrouve pour $\gamma = 1$, de plus, il est une extension du théorème 1 de V.P. Petrenko aux fonctions Q-quasi-conformes.

3. Notions et lemmes préliminaires

Soit $\chi(z)$ une transformation Q-quasi-conforme du plan z au plan w telle que

$$\chi(0) = 0 \,, \quad \chi(1) = 1 \,, \quad \chi(\infty) = \infty \,, \tag{16}$$

et $z = \chi^{-1}(w)$ la transformation réciproque. Posons ($r > 0$, $\rho > 0$)

$$\overline{\rho}(r) = \max_{|z|=r} |\chi(z)|\,, \qquad \underline{\rho}(r) = \min_{|z|=r} |\chi(z)|\,,$$
$$\overline{R}(\rho) = \max_{|w|=\rho} |\chi^{-1}(w)|\,, \qquad \underline{R}(\rho) = \min_{|w|=\rho} |\chi^{-1}(w)|\,,$$
$$w(Q) = \sup_{\{\chi\}} \left\{ \sup_{0<r<\infty} \frac{\overline{\rho}(r)}{\underline{\rho}(r)} \right\} \dagger,$$

telle que $\{\chi\}$ la famille des transformations Q-quasi-conformes qui vérifie la relation (16). Soient

$$\begin{aligned} \chi(r) &= p(r)e^{i\theta_0(r)} = pe^{i\theta_0}, \\ D_{\theta,R} &= \left\{ z : |\arg z| < \theta,\ |z| < R,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4},\ R > R_0 \right\}, \\ \chi\left(D_{\theta,R}\right) &= D^{\star}_{\theta,R}\,. \end{aligned}$$

LEMME 1 ([4], LEMME 2.3). *Pour tout r fixé tel que $r(1+\sin\theta) \le R$ le domaine $D^{\star}_{\theta,R}$ contient le disque fermé*

$$h_{v(r)} = \left\{ w : \left| w - p(r)e^{i\theta_0(r)} \right| \le p(r)e^{-7Q}\sin^Q\theta = v(r,\theta) \right\}. \tag{17}$$

LEMME 2 ([5], P. 70). *Soit $\chi(z)$ une transformation Q-quasi-conforme du disque $K = \{z : |z| \le 1\}$ au disque $\{w : |w| \le 1\}$, telle que $\chi(0) = 0$ et soient*

$$K_1 \subset K\,, \qquad K_1^{\star} = \chi(K_1)\,,$$
$$\Lambda(K_1) = \iint_{K_1} \frac{dr}{r} d\varphi\,, \qquad \Lambda(K_1) < \infty\,.$$

Alors

$$\frac{1}{Q}\Lambda(K_1) \le \Lambda(K_1^{\star}) \le Q\Lambda(K_1)\,. \tag{18}$$

COROLLAIRE 1. *Soient les conditions du Lemme 2 vérifiées et*

$$|J(z)| = \left| \frac{d\sigma(\ln \chi(z))}{d\sigma(\ln z)} \right| = \left| \frac{z}{\chi(z)} \right|^2 |J(\chi(z))|\,.$$

Alors il existe K_1, tel que $\Lambda(K_1) = 0$, et pour $z \notin K_1$ on a l'inégalité $|J(z)| \le Q$.

Démonstration. Soit l'ensemble

$$K_1 = \{z : 0 < |z| \le 1,\ |J(z)| > Q\}\,.$$

Il est évident que l'ensemble K_1 est ouvert car J est continue dans K_1. Soit $\Lambda(K_1) > 0$. On peut supposer $\Lambda(K_1) < \infty$ car dans le cas contraire, on peut prendre une partie de K_1 qui vérifie cette relation. Nous avons

$$\Lambda\left(K_1^{\star}\right) = \iint_{K_1^{\star}} \frac{d\rho}{\rho} d\psi = \iint_{K_1} |J(z)| \frac{dr}{r} d\varphi > Q\Lambda(K_1)$$

ce qui contredit le Lemme 2. □

† $w(Q) \le e^{\pi Q}$ ([5])

LEMME 3 ([6]). *Soit F une fonction Q-quasi-conforme. Alors pour tout τ, $\frac{1}{e} < \tau < 1$ et tout a*

$$n(\tau R, a, F) \leq \frac{C(Q)}{(1-\tau)^{Q+1}} T\left(\frac{1}{\tau}R, F\right) + \frac{C(Q)}{(1-\tau)^{Q}}, \tag{19}$$

où $n(r, a, F)$ est déjà défini en (11).

LEMME 4 ([4], § 4 (4.3)). *Soit*

$$B(r, y, d) = \ln\left|\frac{r^y + |d|^y}{r^y - |d|^y}\right| + \ln^{\frac{1}{Q+1}}\left|\frac{r^y + |d|^y}{r^y - |d|^y}\right|,$$

tel que $y = \frac{\pi}{2\theta}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ (d'où $y > 2$). Alors

$$\int_R^{kR} \frac{1}{r}\left[\ln\left|\frac{r^y + |d|^y}{r^y - |d|^y}\right| + \ln^{\frac{1}{Q+1}}\left|\frac{r^y + |d|^y}{r^y - |d|^y}\right|\right] dr \leq \frac{C}{y}. \tag{20}$$

LEMME 5. *Pour tout k fixé, $k \geq 1$ et pour tout $r > 0$, on a*

$$\underline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right) \geq \frac{k^{\frac{1}{Q}}}{w^2(Q)} r\,, \ \ k \geq 1\,. \tag{21}$$

Démonstration. Soit $k \geq 1$. Pour r, $0 < r < +\infty$, on a

$$\overline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right) \geq \underline{R}\left(\underline{\rho}(r)\right).$$

Soit D le domaine doublement connexe dans le plan z ayant pour frontières $\chi^{-1}\left(\alpha_{\underline{\rho}(r)}\right)$ et $\chi^{-1}\left(\alpha_{k\underline{\rho}(r)}\right)$ tel que $\alpha_\rho = \{w : |w| = \rho\}$ et on désigne par $M(D)$ le module de D. En utilisant l'inégalité $w(Q) \leq e^{\pi Q}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi Q}\ln k \leq M(D) &\leq \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\overline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right)}{\underline{R}\left(\underline{\rho}(r)\right)} = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\overline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right)}{\underline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right)}\frac{\overline{R}\left(\underline{\rho}(r)\right)}{\underline{R}\left(\underline{\rho}(r)\right)}\frac{\underline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right)}{\overline{R}\left(\underline{\rho}(r)\right)}\right)\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\ln\left(w(Q)w(Q)\frac{\underline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right)}{r}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(w^2(Q)\frac{\underline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right)}{r}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\underline{R}\left(k\underline{\rho}(r)\right) \geq \frac{k^{\frac{1}{Q}}}{w^2(Q)} r\,.$$

$\square$

4. Démonstration du Théorème 3

Considérons le cas où pour le nombre complexe donné a il existe δ, $0 < \delta < 1$, tel que

$$0 < \Delta_\delta(a, F) < \infty\,, \tag{22}$$

alors pour tout γ, $0 < \gamma < \delta$, on a

$$\Delta_\gamma(a, F) = +\infty\,,$$

d'où la relation (15) se vérifie trivialement.

Choisissons n'importe quel γ, $\delta \le \gamma \le 1$. Dans ce cas et d'après (22)

$$0 \le \Delta_\gamma(a, F) < +\infty\,,$$

d'où pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, t_0(a, \varepsilon) > 1$ tel que $\forall t > t_0(a, \varepsilon)$

$$m(t, a, F) \le \left(\Delta_\gamma(a, F) + \varepsilon\right) T^\gamma(t, F) = \mu(\gamma, a, \varepsilon) T^\gamma(t, F)\,. \tag{23}$$

Pour tout v, $0 < v \le v(r, \theta)$ (voir Lemme 1) et r fixé nous avons l'inégalité ([4], p. 83)

$$L(r, a, F) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|\Phi\left(pe^{i\theta_0} + ve^{i\psi}\right) - a\right|} d\psi + C(Q) \sum_{|d_k| \le r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k)\,, \tag{24}$$

où les d_k sont les solutions de l'équation $F(z) = \Phi(\chi(z)) = a$. En intégrant l'inégalité (24) par rapport à v, entre les limites $v_1 = \frac{v(r,\theta)}{2} \le v \le v_2 = v(r, \theta)$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln 2 L(r, a, F) \le & \frac{1}{2\pi}\int_{v_1}^{v_2}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|\Phi\left(pe^{i\theta_0} + ve^{i\psi}\right) - a\right|} \frac{dv}{v} d\psi \\ & + C(Q) \ln 2 \sum_{|d_k| \le r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Soit

$$D = \left\{ w :\, v_1 = \frac{v(r, \theta)}{2} \le \left| w - pe^{i\theta_0} \right| \le v_2 = v(r, \theta) \right\} \subset h_v\,, \tag{26}$$

où h_v est défini dans (17). En utilisant les définitions de $\underline{R}$, $\underline{\rho}$ on obtient

$$D^\star = \chi^{-1}(D) \subset D^{\star\star} = \left\{ \underline{R}\left(\underline{\rho}\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right) \le |z - r| \le r\sin\theta,\ z = r + te^{i\varphi} \right\}\,. \tag{27}$$

Par conséquent, pour $w = pe^{i\theta_0} + ve^{i\psi}$, des relations (25), (26) et (27), on obtient

$$\begin{aligned} L(r, a, F) \le & \frac{1}{2\pi \ln 2} \iint_D \ln^+ \frac{1}{|\Phi(w) - a|} \frac{dv}{v}\, d\psi + C(Q) \sum_{|d_k| \le r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k) \\ = & \frac{1}{2\pi \ln 2} \iint_D \ln^+ \frac{1}{|\Phi(w) - a|}\, d\sigma \left(\ln\left(w - pe^{i\theta_0}\right)\right) \\ & + C(Q) \sum_{|d_k| \le r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k) \\ = & \frac{1}{2\pi \ln 2} \iint_{D^\star} \ln^+ \frac{1}{|F(z) - a|} |J(z)|\, d\sigma\, (\ln(z - r)) \\ & + C(Q) \sum_{|d_k| \le r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k) \\ \le & \frac{1}{2\pi \ln 2} \iint_{D^{\star\star}} \ln^+ \frac{1}{|F(z) - a|} |J(z)|\, d\sigma\, (\ln(z - r)) \\ & + C(Q) \sum_{|d_k| \le r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k)\,, \end{aligned} \tag{28}$$

et du Corollaire 1 et (28), pour $z = r + te^{i\varphi}$, on aura

(29)
$$
\begin{aligned}
L(r, a, F) \leq & \frac{Q}{2\pi \ln 2} \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|F\left(r + te^{i\varphi}\right) - a\right|} \frac{dt}{t} d\varphi \\
& + C(Q) \sum_{|d_k| \leq r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k) \\
= & \frac{Q}{2\pi \ln 2} \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} \left[\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|F(z) - a|} \frac{|d(\ln(z - r))|}{|d(\ln z)|} |d(\ln z)| \right] \frac{dt}{t} \\
& + C(Q) \sum_{|d_k| \leq r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k) \\
= & \frac{Q}{2\pi \ln 2} \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} \left[\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|F(z) - a|} |d(\ln z)| \frac{|z|}{|z - r|} \right] \frac{dt}{t} \\
& + C(Q) \sum_{|d_k| \leq r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k) \\
\leq & \frac{Q}{\ln 2} \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} m(|z|, a, F) \frac{(t + r)}{t^2} dt + C(Q) \sum_{|d_k| \leq r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k) \\
\leq & \frac{Q}{\ln 2} \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} m(t + r, a, F) \frac{(t + r)}{t^2} dt + C(Q) \sum_{|d_k| \leq r(1+\sin\theta)} B(r, y, d_k) \,.
\end{aligned}
$$

Des relations (23) et (29), on obtient

(30)
$$
\begin{aligned}
& \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} m(t + r, a, F) \frac{(t + r)}{t^2} dt \\
& \leq \left(\Delta_\gamma(a, F) + \varepsilon\right) \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} \frac{T^\gamma(t + r, F)}{t^2} (t + r) dt \\
& \leq \left(\Delta_\gamma(a, F) + \varepsilon\right) T^\gamma(r(1 + \sin\theta), F) \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} \frac{(t + r)}{t^2} dt \\
& = \mu(\gamma, a, \varepsilon) T^\gamma(r(1 + \sin\theta), F) \int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} \frac{(t + r)}{t^2} dt \,,
\end{aligned}
$$

pour tout $\varepsilon > 0$, $t > t_0(\varepsilon)$, et du Lemme 5, nous aurons

(31)
$$
\begin{aligned}
\int_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} \frac{(t + r)}{t^2} dt & = \ln \left| \frac{r\sin\theta}{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)} \right| + r \left[-\frac{1}{t} \right]_{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)}^{r\sin\theta} \\
& = \ln \left| \frac{r\sin\theta}{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)} \right| + \frac{r}{\underline{R}\left(\rho\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)\right)} - \frac{1}{\sin\theta} \\
& \leq \ln\left(2w^2(Q)\right) + 2\frac{w^2(Q)}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta} \leq C(Q)y \,,
\end{aligned}
$$

où y est déjà défini en Lemme 4.
Donc de (29), (30) et (31), on aura

$$(32)\quad L(r,a,F) \le C(Q)\mu(\gamma,a,\varepsilon)T^{\gamma}(r(1+\sin\theta),F)y + C(Q)\sum_{|d_k|\le r(1+\sin\theta)} B(r,y,d_k)\,.$$

A l'aide du Lemme 4 et la relation (32), on obtient pour tout $y > 2$ (voir Lemme 4) et $k > 1$ fixés

$$(33)\quad \begin{aligned}\int_R^{kR}\frac{L(r,a,F)}{r}dr \le & C(Q)\ln k\mu(\gamma,a,\varepsilon)T^{\gamma}(2kR,F)y\\ & + C(Q)\int_R^{kR}\frac{1}{r}\sum_{|d_k|\le r(1+\sin\theta)} B(r,y,d_k)dr\\ \le & C(Q)\ln k\mu(\gamma,a,\varepsilon)T^{\gamma}(2kR,F)y + \frac{C(Q)}{y}n(2kR,a,F)\,,\end{aligned}$$

et en utilisant le Lemme 3 et la relation (33), on obtient

$$(34)\quad \begin{aligned}\int_R^{eR}\frac{L(r,a,F)}{r}dr &\le C(Q)\mu(\gamma,a,\varepsilon)T^{\gamma}(2eR,F)y + \frac{C(Q)}{y}T\left(2e^3R,F\right)\\ &\le C(Q)\left\{\mu(\gamma,a,\varepsilon)T^{\gamma}\left(2e^3R,F\right)y + \frac{T\left(2e^3R,F\right)}{y}\right\}\,,\end{aligned}$$

telle que

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{(\mu(\gamma,a,\varepsilon))^{\frac{1}{2}}}\,, & \text{si } \gamma = 1\\ \dfrac{T^{\frac{1-\gamma}{2}}\left(2e^3R,F\right)}{(\mu(\gamma,a,\varepsilon))^{\frac{1}{2}}}\,, & \text{si } 0 < \gamma < 1\end{cases}$$

et par suite de la relation (34), on obtient

$$(35)\quad \int_R^{eR}\frac{L(r,a,F)}{r}dr \le C(Q)(\mu(\gamma,a,\varepsilon))^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1+\gamma}{2}}\left(2e^3R,F\right) = \sigma(R,\gamma,a)\,.$$

Soit

$$(36)\quad B(R) = \{r\in[R,eR]\ :\ L(r,a,F)\ge e\sigma(R,\gamma,a)\}\,.$$

Des relations (35) et (36), on trouve

$$\sigma(R,\gamma,a) \ge \int_{B(R)}\frac{L(r,a,F)}{r}dr \ge e\sigma(R,\gamma,a)\int_{B(R)}\frac{dr}{r} \ge \frac{\sigma(R,\gamma,a)}{R}\mathrm{mes}B(R)\,.$$

Donc $\mathrm{mes}B(R) \le R$ et par suite $\mathrm{mes}CB(R) \ge (e-2)R$.
En choisissant n'importe quel $r \in CB(R)$, de (36), on déduit

$$(37)\quad L(r,a,F) \le e\sigma(R,\gamma,a)\,.$$

Comme F admet un ordre inférieur fini λ, alors il existe une suite $R_n \to +\infty$, telle que

$$(38)\quad T\,(CR_n,F) \le (C)^{\lambda+1}T\,(R_n,F)\ .$$

Ainsi des relations (35) , (37) et (38), on obtient

$$\beta_{\frac{1+\gamma}{2}}(a, F) \leq C(Q, \lambda)(\mu(\gamma, a, \varepsilon))^{\frac{1}{2}} = C(Q, \lambda)\left(\Delta_\gamma(a, F) + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Etant donné que $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors on trouve la relation (15). Pour terminer la démonstration du Théorème 3, il reste à étudier le cas où la relation (22) n'est pas vérifiée pour n'importe quel δ, $0 < \delta < 1$. Dans ce cas nous avons deux possibilités. Premièrement, pour tout γ, $0 < \gamma < 1$, $\Delta_\gamma(a, F) = 0$. Dans ce cas on répète la même démonstration précédente avec $\mu(\gamma, a, \varepsilon) = \varepsilon$. Deuxièmement, pour tout γ, $0 < \gamma < 1$, $\Delta_\gamma(a, F) = +\infty$. Dans ce cas la relation (15) est triviale. Ceci achève la démonstration du Théorème 3.

Références

[1] PETRENKO V.P., *The growth of meromorphic functions*, Vishcha Shkola, Kharkov 1978, 136.

[2] BELAÏDI B., DERKATCH V.S., *Sur la structure de l'ensemble $\Omega_\alpha(F)$ pour les fonctions Q-quasi-conformes*, Viniti 1990, N^0 1856-B90.

[3] PETRENKO V.P., *The study of the structure of the set of positive deviations of meromorphic functions*, Part I, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. **33** 6 (1969), 1330–1348.

[4] PETRENKO V.P., *The growth of Q-pseudomeromorphic functions*, Sibirsk. Matem. Zh. **15** 1 (1974), 78-89.

[5] MORI A., *On quasi-conformality and pseudo-analyticity*, Trans. Amer. Math. Soc. **84** 1 (1957), 56–77.

[6] DERKATCH V.S., PETRENKO V.P., *The relation between $\beta_\alpha(a, F)$ et $\Delta_\alpha(a, \Phi)$ of Q-pseudoméromorphic functions*, Ukr. Math. J. **30** 3 (1978), 357–362.

AMS Subject Classification : 30D35, 30D60.

Benharrat BELAÏDI
Département de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure en Sciences Fondamentales de Mostaganem
B. P 227 Mostaganem-Algérie

Lavoro pervenuto in redazione il 5.5.1998.