Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 43–61

UNE MINI INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE RIGIDE

par

Qing Liu

Résumé. — Ce texte a pour but de donner quelques notions de base de la géométrie analytique rigide, et d'expliquer les outils nécessaire pour comprendre l'interprétation analytique rigide de la preuve du théorème d'Harbater.

***Abstract* (A mini introduction to rigid analytic geometry).** — This short note aims to provide some basics on rigid analytic geometry, and to explain the tools we need to understand the rigid analytic proof of Harbater's theorem.

1. Introduction

Ce texte a pour but de donner quelques notions de base de la géométrie analytique rigide et d'entrevoir quelques applications. En particulier, on expliquera les outils et notions nécessaires pour comprendre l'interprétation analytique rigide de la preuve du théorème d'Harbater ([**Har**], voir aussi [**Li**]) :

Tout groupe fini est le groupe de Galois d'un revêtement de courbes algébriques $C \to \mathbb{P}^1_K$ pour tout corps complet non-archimédien K, avec C projective lisse et géométriquement connexe sur K.

Voir plus particulièrement les corollaires 4.16 et 5.10.

On fixera dans toute la suite un corps K muni d'une valeur absolue non-archimédienne $|.|$ et qui est complet pour la topologie définie par cette valeur absolue. Les exemples les plus courants sont $\mathbb{Q}_p$ le corps de nombres p-adiques, ou le corps de séries formelles $k((T))$ à coefficients dans un corps k. L'idée de la géométrie analytique rigide est d'étudier des variétés algébriques en tirant profit de la valeur absolue. C'est en quelque sorte l'analogue de la géométrie analytique complexe, mais avec des aspects beaucoup plus algébriques. Le premier succès de la théorie est sans doute la théorie d'uniformisation des courbes de Tate. Nous n'aborderons

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G22, 14H30.
Mots clefs. — Fonctions implicites, revêtement de la droite projective, GAGA.

malheureusement pas cet aspect de la théorie par manque de temps. De même, le point de vue schémas formels à la Raynaud et la théorie de Berkovich sont passés sous silence.

Tous les résultats exposés ici sont classiques et bien connus, même si leurs preuves sont parfois difficiles à trouver dans la littérature. Dans le paragraphe 2, nous donnons les premières propriétés des algèbres affinoïdes et des parties rationnelles des espaces affinoïdes. En suite, la définition générale des espaces analytiques rigides est présentée au paragraphe 3. Le paragraphe 4 est consacré à l'étude locale du faisceau structural $\mathcal{O}_X$. On y démontre notamment le théorème des fonctions implicites (théorème 4.3) et le fait que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien (proposition 4.8). L'illustration géométrique de cette dernière propriété est donnée par le corollaire 4.11. Enfin, on présente brièvement la preuve du principe GAGA (théorème 5.7) au dernier paragraphe. La plupart des énoncés des paragraphes 2 et 3 sont donnés sans démonstration. Nous encourageons le lecteur à consulter les ouvrages de base en géométrie analytique rigide ([**BGR**], [**FV**], [**Fr**]).

J'adresse mes remerciements aux organisateurs du colloque, et au referee pour sa lecture attentive du manuscrit.

2. Fonctions analytiques rigides

Soit K un corps complet non-archimédien. Toute extension algébrique L de$K$ possède un unique prolongement de la valeur absolue de K. Soit $n \geqslant 1$. On notera $\mathbb{D}^n(\overline{K})$ le polydisque (fermé) unité de dimension n. Plus précisément,

$$\mathbb{D}^n(\overline{K}) = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \overline{K}^n \mid |z_i| \leqslant 1, \forall\, i\ \}.$$

Cet ensemble est muni naturellement d'une topologie induite par la valeur absolue sur $\overline{K}$. Il faut noter que du fait que la valeur absolue est non archimédienne, la topologie est totalement discontinue sur $\mathbb{D}^n(\overline{K})$.

Comment définir les fonctions analytiques sur $\mathbb{D}^n(\overline{K})$ (ou un ouvert quelconque de $\mathbb{D}^n(\overline{K})$) ? La première idée qui vient à l'esprit est de prendre les fonctions continues et localement développables en séries entières. Si cette approche est utile pour d'autres propos (par exemples pour les équations différentielles p-adiques ou les fonctions L p-adiques), elle n'est pas adaptée à une étude algébrique. Il y a en effet trop de fonctions analytiques dans ce sens (toute fonction caractéristique d'un disque contenu dans $\mathbb{D}^n(\overline{K})$ est analytique dans ce sens). Une définition plus adaptée à l'étude géométrique est apparues au début des années soixante dans un texte de J. Tate [**Ta**].

Définition 2.1. — On appelle *algèbre de Tate* à n variables le sous-ensemble de l'ensemble des séries formelles

$$K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle := \left\{ f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu T^\nu \in K[[T_1, \ldots, T_n]] \;\middle|\; \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = 0 \right\}.$$

Ce sont les séries formelles qui convergent sur $\mathbb{D}^n(\overline{K})$. Cette K-algèbre est munie d'une norme

$$\|f\| = \max_{\nu} |a_\nu|$$

qui fait clairement de $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ une K-algèbre de Banach. Remarquons que l'on peut définir de la même façon $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ pour toute algèbre de Banach A.

Théorème 2.2. — *Soit $n \geqslant 1$. Notons $T^n = K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$. Les propriétés suivantes sont vraies.*
(a) *L'algèbre T^n est noethérienne, factorielle, de dimension de Krull n. Tout idéal de T^n est fermé.*
(b) *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de T^n, le corps $T^n/\mathfrak{m}$ est fini sur K.*
(c) *Pour tout idéal I de T^n, on a $\sqrt{I} = \cap_{\mathfrak{m}\in V(I)}\mathfrak{m}$, où $V(I)$ est l'ensemble des idéaux maximaux de T^n contenant I.*

Les ingrédients principaux pour la preuve du théorème sont le théorème de préparation et de division de Weierstrass dans T^n. Comme cas particulier de ces théorèmes, toute fonction $f(T) \in K\langle T\rangle$ se décompose de façon unique sous la forme

$$f(T) = P(T)(1 + Tg(T)), \quad P(T) \in K[T],\ g(T) \in K\langle T\rangle.$$

Ainsi, l'ensemble des zéros de f est fini dans $\mathbb{D}^1(\overline{K})$. Pour tout anneau A, notons $\mathrm{Spm}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A et $\mathbb{D}^n_K = \mathrm{Spm}(T^n)$.

Corollaire 2.3. — *Si K est algébriquement clos, alors $\mathrm{Spm}(T^n) = \mathbb{D}^n(\overline{K})$. Pour tout idéal I de T^n, on a $\mathrm{Spm}(T^n/I) = Z(I)$, où $Z(I)$ est l'ensemble des zéros communs des fonctions $f \in I$.*

C'est l'équivalent du théorème des zéros (Nullstellensatz) de Hilbert. Lorsque K n'est plus nécessairement algébriquement clos, la propriété (c) du théorème 2.2 montre que l'on peut considérer les points de $\mathbb{D}^n_K$ comme des orbites de $\mathbb{D}^n(\overline{K})$ sous l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. En particulier, on peut munir $\mathbb{D}^n_K$ de la topologie la plus fine qui rende la projection $\pi : \mathbb{D}^n(\overline{K}) \to \mathbb{D}^n_K$ continue. Pour tout idéal I de T^n, on a $\pi^{-1}(V(I)) = Z(I)$. Cela induit donc une topologie sur $V(I)$. L'inclusion $V(I) \to \mathbb{D}^n_K$ est une immersion fermée.

Définition 2.4. — Une *algèbre affinoïde* (sur K) est une K-algèbre A telle qu'il existe un homomorphisme surjectif de K-algèbres $T^n \to A$. Comme l'idéal $I := \mathrm{Ker}(T^n \to A)$ est fermé, A hérite d'une norme quotiente pour laquelle elle est complète. Notons $X = \mathrm{Spm}(A)$ qui s'identifie à $V(I)$. La topologie sur X décrite comme ci-dessus est appelée la topologie canonique de X. On peut montrer qu'elle est indépendante du choix de la présentation A sous la forme T^n/I.

Pour tout $x \in X$, on note $k(x)$ le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A correspondant à x). C'est une extension finie de K, et elle est donc munie d'une unique valeur absolue qui prolonge celle de K. Soit $f \in A$. On note $f(x)$ l'image de

f dans $k(x)$. Ainsi on peut considérer f comme une fonction $X \to \overline{K}$. Les éléments de A seront appelés *fonctions analytiques sur* X. On pose

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \sup\{x \in X \mid |f(x)|\}$$

C'est la *semi-norme spectrale* sur A. C'est une norme si et seulement si A est réduite. On note usuellement

$$A^0 = \{f \in A \mid \|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant 1\}, \quad A^{00} = \{f \in A \mid \|f\|_{\mathrm{sp}} < 1\}, \tag{1}$$

Ainsi K^0 est l'anneau de valuation de K et K^{00} est l'idéal maximal de K^0. On voit que A^0 est un sous-K^0-anneau de A, et A^{00} est un idéal de A^0.

La définition de fonctions analytiques peut se transmettre à certains ouverts de X. Soit $(\boldsymbol{f}) = (f_0, \dots, f_m)$ une famille ordonnée de fonctions analytiques sur X, sans zéro commun (ce qui équivaut à $A = \sum_{0 \leqslant i \leqslant m} f_i A$), on pose

$$R(\boldsymbol{f}) = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leqslant |f_0(x)|,\ i = 0, 1, .., m\ \}.$$

Du fait que la valeur absolue sur K est non-archimédienne, $R(\boldsymbol{f})$ est une partie ouverte de X, que l'on appelle une *partie rationnelle de* X. L'homomorphisme canonique de A dans

$$B := A\langle S_1, \dots, S_m\rangle / (S_1 f_0 - f_1, \dots, S_m f_0 - f_m)$$

induit (grâce au théorème 2.2 (c)) une application $\mathrm{Spm}(B) \to X$. On peut vérifier que cette application est injective et que son image est $R(\boldsymbol{f})$. Donc une partie rationnelle de X est encore le Spm d'une algèbre affinoïde.

Exemple 2.5. — Soit $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n) \in K^*$. Alors

$$D(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{r}) := \{x \in \mathbb{D}^n_K \mid |T_i(x)| \leqslant |r_i|,\ i = 1, \dots, n\},$$

le disque centré en 0 de rayon $\boldsymbol{r}$, est une partie rationnelle de $\mathbb{D}^n_K$. Il suffit de prendre $f_0 = 1$ et $f_i = T_i/r_i$.

Remarque 2.6. — Soient $(\boldsymbol{f}) = (f_0, \dots, f_m)$, $(\boldsymbol{g}) = (g_0, \dots, g_k)$ deux familles de fonctions analytiques sur X, chacune étant sans zéro commun sur X. Posons $(\boldsymbol{h}) = (f_i g_j)_{i,j}$ avec $h_0 = f_0 g_0$. Alors on montre facilement que $R(\boldsymbol{f}) \cap R(\boldsymbol{g}) = R(\boldsymbol{h})$ et que la réunion de deux parties rationnelles disjointes est une partie rationnelle.

Exemple 2.7. — Pour tout $a \in K$ et $r \in K^*$, on note $D(a, r)$ la partie rationnelle de $\mathbb{D}^1_K$ correspondante à $\{r, T - a\}$. Donc $D(a, r) = \mathrm{Spm}(K\langle r^{-1}(T - a)\rangle)$. Vue dans $\overline{K}$, cette partie correspond au disque fermé

$$D(a, r) = \{z \in \overline{K} \mid |z - a| \leqslant r\}.$$

Soient $a_1, \dots, a_m \in K$, $r_1, \dots, r_m \in K^*$ tels que $|a_i|, |r_i| \leqslant 1$, et $|a_i - a_j| > |r_i|$ si $i \neq j$. Alors le « *disque troué* » (voir la figure 1)

$$\{z \in \overline{K} \mid |z| \leqslant 1, |z - a_i| \geqslant |r_i|, i = 1, \dots, m\}$$

est une partie rationnelle de $\mathbb{D}^1_K$, puisque c'est l'intersection des parties rationnelles $R(\{T - a_i, r_i\})$. Si K est algébriquement clos, on peut montrer que toute partie rationnelle de $\mathbb{D}^1_K$ est de cette forme.

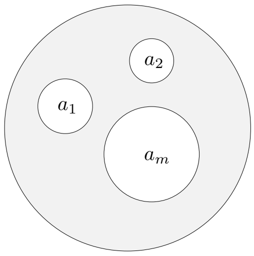

FIGURE 1

Remarque 2.8. — Il est facile de montrer à l'aide de l'exemple 2.5 que l'ensemble des parties rationnelles de X forment une base d'ouverts pour la topologie canonique.

3. Espaces analytiques rigides

L'idée de la géométrie analytique rigide est de définir les fonctions analytiques que sur des ouverts particuliers.

Définition 3.1. — Soit X un espace topologique. On appelle *topologie de Grothendieck sur* X la donnée d'une famille d'ouverts de X (*ouverts admissibles*) et d'une famille de recouvrements $\mathcal{C}ov(U)$ (*recouvrements admissibles*) pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ satisfaisant les propriétés suivantes
(1) Les parties $X, \varnothing$ sont admissibles. L'intersection de deux ouverts admissibles est admissible.
(2) Fixons un ouvert admissible U. Alors
  (2.1) $\{U\} \in \mathcal{C}ov(U)$;
  (2.2) Pour tout recouvrement admissible $\{U_i\}_i$ de U et pour tout ouvert admissible V, contenu dans U, la famille $\{V \cap U_i\}_i$ est un recouvrement admissible de V ;
  (2.3) Soit $\{U_i\}_i$ comme ci-dessus. Soit $\{U_{ij}\}_j$ un recouvrement admissible de U_i. Alors $\{U_{ij}\}_{i,j}$ est un recouvrement admissible de U.

Exemple 3.2. — Soit A une algèbre affinoïde, soit $X = \mathrm{Spm}(A)$ muni de la topologie canonique. On définit une topologie de Grothendieck sur X en prenant comme ouverts admissibles les parties rationnelles, et comme recouvrements admissibles les recouvrements dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. Notons que l'on peut être amené à définir une topologie de Grothendieck avec plus d'ouverts admissibles (voir

[**BGR**], § 9.1), notamment pour construire des espaces analytiques par recollement. Mais nous n'entrerons pas dans les détails.

Définition 3.3. — Sur un espace topologique X muni d'une topologie de Grothendieck, on définit les *préfaisceaux* et les *faisceaux* comme dans le cas d'un espace topologique habituel, sauf que l'on ne considère que les ouverts admissibles et les recouvrements admissibles. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau (pour la topologie de Grothendieck). Pour tout $x \in X$, la fibre $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ en x est la limite inductive $\varinjlim_U \mathcal{F}(U)$ sur les ouverts admissibles contenant x. On définit également les homomorphismes de (pré)faisceaux de façon naturelle (toujours sur les ouverts admissibles).

Soit $X = \mathrm{Spm}(A)$. Pour toute partie rationnelle $R = R(\boldsymbol{f})$ de X, on pose

$$\mathcal{O}_X(R) = A\langle S_1, \dots, S_m\rangle/(f_0S_i - f_i)_i.$$

On montre qu'à isomorphisme près, cette algèbre ne dépend pas du choix de la famille $(\boldsymbol{f})$. Cela définit un préfaisceaux de K-algèbres $\mathcal{O}_X$ sur X. On a $\mathcal{O}_X(X) = A$. Si $X = \mathbb{D}_K^1$, et si R est le « disque troué » comme dans l'exemple 2.7, alors $\mathcal{O}_X(R)$ s'identifie aux séries

$$\sum_{k\geqslant 0} a_{0k}T^k + \sum_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{k\geqslant 0} a_{ik}\left(\frac{r_i}{T-a_i}\right)^k$$

telles que $|a_{ik}|$ tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$.

***Théorème 3.4* (Tate)**. — *Le préfaisceau $\mathcal{O}_X$ est un faisceau sur X. On a même plus : pour tout recouvrement admissible $\{U_i\}_i$ de X, le complexe de Čech*

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \to \oplus_i\mathcal{O}_X(U_i) \to \oplus_{i,j}\mathcal{O}_X(U_i\cap U_j) \to \oplus_{i,j,k}\mathcal{O}_X(U_i\cap U_j\cap U_k) \tag{2}$$

est exact.

La preuve du théorème consiste à se ramener au recouvrement admissible $\{U, V\}$, où $U = R(\{1, f\})$ et $V = R(\{f, 1\})$ pour un certain $f \in A$. Dans ce dernier cas, le complexe (2) se réduit à

$$0 \to A \to A\langle f\rangle \oplus A\langle 1/f\rangle \to A\langle f, 1/f\rangle \to 0.$$

Or ce complexe est clairement exact.

Définition 3.5. — Soit A une algèbre affinoïde, soit $X = \mathrm{Spm}(A)$. Alors $(X, \mathcal{O}_X)$ avec la topologie de Grothendieck définie plus haut est appelé un *espace affinoïde*. Si $A = T^n/I$, alors $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{\mathbb{D}_K^n,x}/I$ pour tout $x \in X$. On vérifie alors facilement que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local (voir aussi § 4).

Définition 3.6. — Un *espace analytique rigide sur K* est un espace topologique X muni d'une topologie de Grothendieck et d'un faisceau de K-algèbres $\mathcal{O}_X$ pour la topologie de Grothendieck tel que X possède un recouvrement admissible $\{U_i\}_i$ avec $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ soit isomorphe à un espace affinoïde pour tout i. En particulier, $\mathcal{O}_{X,x}$

est un anneau local pour tout $x \in X$. Un *morphisme d'espaces analytiques rigides* $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un couple $f, f^{\#}$, où $f : X \to Y$ est une application continue compatible avec les topologies de Grothendieck (i.e. l'image réciproque d'un ouvert admissible est admissible, l'image réciproque d'un recouvrement admissible est admissible) et où $f^{\#}$ est un homomorphisme de faisceaux de K-algèbres $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. On suppose de plus que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit local.

***Exemple 3.7* (Disques ouverts)**. — Soit $(r_m)_{m\geqslant 1}$ une suite d'éléments de K^* telle que $|r_m| < 1$ et que $(|r_m|)_m$ soit une suite croissante tendant vers 1. Soit $\mathbb{D}^0 := \cup_m D_m$ la réunion des parties rationnelles $D_m := R((r_m, T_1, \dots, T_n)) \subset \mathbb{D}^n_K$. Comme ensemble, c'est le polydisque ouvert de rayon 1. Définissons une topologie de Grothendieck sur $\mathbb{D}^0$. Un ouvert U est admissible si c'est un ouvert admissible d'un D_m ou s'il est égal à $\mathbb{D}^0$. Un recouvrement $\{U_i\}_i$ de U est admissible si pour tout m, $\{U_i \cap D_m\}_i$ est un recouvrement admissible de $D_m \cap U$.

Proposition 3.8. — *Soient A, B des K-algèbres affinoïdes. Alors on a une bijection canonique et fonctorielle*

$$\mathrm{Hom}_{K-\mathrm{alg}}(B, A) \simeq \mathrm{Mor}(\mathrm{Spm}(A), \mathrm{Spm}(B)).$$

Si $\phi : B \to A$ est un homomorphisme d'algèbres, le morphisme $\mathrm{Spm}(A) \to \mathrm{Spm}(B)$ *qui lui correspond envoie le point* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(A)$ *sur le point* $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$.

La proposition reste vraie en remplaçant $\mathrm{Spm}(A)$ par un espace analytique rigide quelconque X et A par $\mathcal{O}_X(X)$. Comme cas particulier, on peut prendre $B = K\langle T\rangle$. Alors $\mathrm{Hom}_{K-\mathrm{alg}}(K\langle T\rangle, \mathcal{O}_X(X))$ s'identifie aux fonctions $f \in \mathcal{O}_X(X)$ de norme spectrale $\sup_{x\in X} |f(x)| \leqslant 1$. Le morphisme $X \to \mathbb{D}^1_K$ associé à f envoie « moralement » x sur $f(x)$.

Définition 3.9. — On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est *fini* s'il existe un recouvrement admissible affinoïde $\{V_i\}_i$ de Y tel que $f^{-1}(V_i)$ soit affinoïde et que $\mathcal{O}_Y(V_i) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i))$ soit un homomorphisme fini pour tout i.

Définition 3.10. — Un *faisceau cohérent* sur un espace analytique rigide X est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ tel que pour tout couple d'ouverts admissibles affinoïdes $U \subseteq V$, l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

soit un isomorphisme. Par exemple, si $X = \mathrm{Spm}(A)$ et si M est un A-module de type fini, on montre que $U \mapsto M \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$ est un faisceau cohérent sur X (la difficulté étant de montrer que c'est un faisceau).

Un morphisme $f : X \to Y$ est fini si et seulement si $f^{-1}(V)$ est affinoïde pour tout ouvert admissible affinoïde V et si $f_*\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent. La donnée d'un morphisme fini $X \to Y$ équivaut à la donnée d'une $\mathcal{O}_Y$-algèbre cohérente.

Définition 3.11. — Soit X un espace analytique rigide. On dit que X est *connexe* s'il n'admet aucun recouvrement admissible $\{U, V\}$ avec $U \cap V = \varnothing$ et $U, V \neq \varnothing$. Cela est équivalent à dire que les seuls éléments idempotents de $\mathcal{O}_X(X)$ sont 0 et 1.

4. Étude locale et applications aux revêtements

On fixe un corps valué complet non-archimédien K. Dans cette section nous allons montrer deux résultats (4.3, 4.8) sur la structure locale des espaces analytiques.

Proposition 4.1. — *Soit X un espace analytique rigide sur K. Soit $x \in X$. Alors l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien.*

Démonstration. — Cf. [**BGR**], 7.3.2, Proposition 7.

Définition 4.2. — Soit X un espace analytique rigide sur K. On appelle *dimension de* X la borne supérieure

$$\dim X := \sup_{x \in X} \dim \mathcal{O}_{X,x},$$

où $\dim \mathcal{O}_{X,x}$ est la dimension de Krull. L'espace $\mathbb{D}^n_K$ est de dimension n. La dimension est finie lorsque X est *quasi-compact*, c'est-à-dire si X a un recouvrement admissible affinoïde fini.

***Théorème 4.3* (Fonctions implicites)**. — *Soit $\mathbf{0}$ l'origine du polydisque $\mathbb{D}^n_K$. Soient $f_1, \dots, f_r \in K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$ des fonctions s'annulant en $\mathbf{0}$ telles que la matrice*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(\mathbf{0})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \tag{3}$$

soit inversible. Alors il existe $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)$ avec $0 < |r_i| \leqslant 1$ tel que sur la partie rationnelle $D(\mathbf{0}, \boldsymbol{r})$ (voir exemple 2.5), on ait

$$\mathcal{O}_{\mathbb{D}^n_K}(D(\mathbf{0}, \boldsymbol{r})) = K\langle g_1, \dots, g_r, S_{r+1}, \dots, S_n\rangle,$$

où $g_i = f_i/\lambda_i$ avec $\lambda_i \in K$ de $|\lambda_i| = \|f_i|_{D(\mathbf{0},\boldsymbol{r})}\|$ et $S_j = T_j/r_j$. Autrement dit, dans un petit disque contenant $\mathbf{0}$, les fonctions $f_1, \dots, f_r, T_{r+1}, \dots, T_n$, à multiplication par un scalaire près, forment un système de paramètres.

Démonstration. — On se ramène aisément à $r = 1$. Notons $f = f_1$. Pour tout $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $|\nu| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \nu_i$. Quitte à appliquer un automorphisme de $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$, on peut supposer que

$$f = aT_1 + \sum_{|\nu| \geqslant 2} \alpha_\nu T^\nu, \quad a, \alpha_\nu \in K^*$$

Soit $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ avec $|r_i|$ suffisamment petits de sorte que $|ar_1| > |\alpha_\nu \boldsymbol{r}^\nu|$ pour tout $|\nu| \geqslant 2$. Alors $\|f|_{D(\mathbf{0},\boldsymbol{r})}\| = |ar_1|$. Soient $g = f/(ar_1)$, $S_i = T_i/r_i$, alors

$$g = S_1 + \sum_{|\nu| \geqslant 2} \beta_\nu S^\nu, \quad |\beta_\nu| < 1.$$

Soit $A = K\langle S_2, \ldots, S_n\rangle$. Alors $g = S_1 + \sum_{i \geqslant 1} a_i S_1^i$ avec $a_i \in A$, et $\|a_i\| < 1$. En vertu d'un lemme d'approximation (lemme 4.4), on a $S_1 \in A\langle g\rangle = K\langle g, S_2, \ldots, S_n\rangle$. Ce qui implique que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{D}_K^n}(D(\mathbf{0}, \boldsymbol{r})) = K\langle S_1, .., S_n\rangle = K\langle g, S_2, \ldots, S_n\rangle.$$

Lemme 4.4. — *Soient $(A, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach, S une indéterminée. Soit g un élément de $A\langle S\rangle$ de la forme :*

$$g = S + \sum_{i \geqslant 1} a_i S^i, \quad \|a_i\| < 1.$$

Alors $A\langle S\rangle = A\langle g\rangle$.

Démonstration. — L'algèbre $A\langle S\rangle$ est une algèbre de Banach pour la norme

$$\Big\| \sum_{i \geqslant 0} b_i S^i \Big\| := \max_{i \geqslant 0}\{\|b_i\|\}.$$

Pour tout $i \geqslant 1$, on a $g^i = S^i + \delta_i(S)S^i$, avec $\|\delta_i(S)\| \leqslant \delta := \max_{j \geqslant 1}\{\|a_j\|\}$. Il suit que

$$g - \sum_{i \geqslant 1} a_i g^i = S + \sum_{i \geqslant 1} a_i \delta_i(S) S^i = S + \sum_{i \geqslant 1} a_{i,2} S^i, \quad \|a_{i,2}\| \leqslant \delta^2.$$

On construit ainsi de proche en proche deux suites $P_m(S) \in A\langle S\rangle$ et $g_m \in A\langle g\rangle$ avec

$$\|P_m(S)\| \leqslant \delta^m, \quad g_{m+1} - g_m = \sum_{i \geqslant 1} a_{i,m} g^i, \quad \|a_{i,m}\| \leqslant \delta^m,$$

et telles que $g_1 = g$, $P_1(S) = \sum_{i \geqslant 1} a_i S^i$, et $g_m = S + P_m(S)$. Cela implique bien que $S \in A\langle g\rangle$.

Définition 4.5. — On dit qu'un espace analytique rigide X est *régulier* en un point $x \in X$ si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier. Ou autrement dit, si l'on a

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim_{k(x)} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$$

où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et où $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Par exemple, $\mathbb{D}_K^n$ est régulier en tous ses points. Si $x \in X(K)$, alors le critère jacobien s'applique.

Corollaire 4.6. — *Soit X un espace analytique rigide sur K. Soit $x \in X(K)$. Alors X est régulier en x si et seulement s'il existe un ouvert admissible $U \ni x$ tel que $U \simeq \mathbb{D}_K^d$. De plus on aura $d = \dim \mathcal{O}_{X,x}$.*

Démonstration. — Supposons x régulier. Le critère jacobien montre que dans un voisinage ouvert U de x, on peut écrire $U = \mathrm{Spm}(K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_r))$ avec x correspondant à $\mathbf{0}$ et les f_i vérifiant les hypothèses du théorème 4.3. Il suit du même théorème que quitte à prendre un voisinage plus petit, on a $U = \mathrm{Spm}\, K\langle S_{r+1}, \ldots, S_n\rangle \simeq \mathbb{D}_K^{n-r}$. D'où le corollaire.

Définition 4.7. — Soit A un anneau local de corps résiduel k. On dit que A est *hensélien* si pour tout polynôme unitaire $P(T) \in A[T]$ dont l'image canonique $\tilde{P}(T) \in k[T]$ se décompose en produit de deux polynômes $q(T), r(T) \in k[T]$ unitaires et premiers entre eux, il existe $Q(T), R(T) \in A[T]$ unitaires et tels que $P(T) = Q(T)R(T)$, $\tilde{Q}(T) = q(T)$, $\tilde{R}(T) = r(T)$. Cette propriété est équivalente à dire que toute A-algèbre finie est somme directe de A-algèbres locales. Il est bien connu que tout anneau local complet est hensélien.

Proposition 4.8. — *Soit X un espace analytique rigide. Alors pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien.*

Lemme 4.9. — *Soit $f \in \mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X,x}$. Soit $\pi \in K^*$. Alors il existe un voisinage ouvert admissible U de x tel que $f \in \mathcal{O}_X(U)$ et que $\|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant |\pi|$.*

Démonstration. — Soit V un voisinage ouvert admissible affinoïde de x tel que $f \in \mathcal{O}_X(V)$. Alors x appartient à la partie rationnelle $U := \{z \in V \mid |f(z)| \leqslant |\pi|\}$. Par construction, $\|f|_U\|_{\mathrm{sp}} \leqslant |\pi|$.

Fixons la notation suivante : si D est une algèbre affinoïde munie d'une norme de Banach $\|.\|$ ($= |.|$ si D est un corps), pour tout $P(T) = \sum_{i \geqslant 0} a_i T^i \in D[T]$, on posera

$$\|P(T)\| = \max_i \{\|a_i\|\}.$$

Montrons maintenant la proposition 4.8. Comme le quotient d'un anneau hensélien est hensélien, on peut supposer que $X = \mathbb{D}_K^n$ (nous utiliserons juste le fait que la semi-norme spectrale est une norme dans ce cas-là). Notons $A = \mathcal{O}_{X,x}$. Soient $P(T)$, $q(T)$, $r(T)$ comme dans la définition 4.7. On peut relever arbitrairement $q(T)$ et $r(T)$ en des polynômes unitaires $Q_0(T), R_0(T) \in A[T]$. Par une homothétie $T \mapsto aT$ convenable, on peut supposer que $\|\tilde{P}\| = 1$. Il suit que $\|q(T)\| = \|r(T)\| = 1$. Il existe $u(T), v(T) \in k(x)[T]$ tels que

$$1 = q(T)u(T) + r(T)v(T), \quad \deg u(T), \deg v(T) \leqslant d := \deg P(T).$$

On relève $u(T), v(T)$ respectivement en $U(T), V(T) \in A[T]$ de même degré que $u(T)$ et $v(T)$ respectivement. Les polynômes $P(T) - Q_0(T)R_0(T)$, et $1 - (Q_0(T)U(T) +$

$R_0(T)V(T))$ sont à coefficients dans $\mathfrak{m}_x$. Fixons $\pi \in K^*$ et $\lambda \in K^*$ tels que

$$|\pi| \leqslant |\lambda^3| < 1, \quad |\lambda| \leqslant \min\{\|u(T)\|^{-1}, \|v(T)\|^{-1}\}.$$

En vertu du lemme 4.9, il existe un voisinage admissible affinoïde Z de x tel que l'on ait

$$P(T) = Q_0(T)R_0(T) + \pi P_0(T), \quad P_0(T) \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T],\ \deg P_0(T) \leqslant d,$$

où $\mathcal{O}_X(Z)^0$ est l'anneau des fonctions $f \in \mathcal{O}_X(Z)$ telles que $\|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant 1$ (voir (1) après 2.4).

$$(4) \qquad 1 = Q_0(T)U(T) + R_0(T)V(T) + \lambda W(T), \quad W(T) \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T],$$

et $\lambda U(T), \lambda V(T) \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T]$. Multiplions (4) par $P_0(T)$:

$$P_0 = Q_0UP_0 + R_0VP_0 + \lambda WP_0.$$

Comme $R_0(T) \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T]$ est unitaire, on peut effectuer une division euclidienne dans $\mathcal{O}_X(Z)^0[T]$:

$$\lambda UP_0 = R_0H_1 + H_2, \quad WP_0 = R_0H_3 + H_4$$

avec $H_i \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T]$, $\deg H_2 \leqslant \deg R_0$, $\deg H_4 \leqslant d$ et $\tilde{H}_i(T) = 0$ car $\tilde{P}_0(T) = 0$. Il suit que

$$P_0 = Q_0\lambda^{-1}H_2 + R_0B_1 + \lambda H_4, \quad B_1 \in \mathcal{O}_X(Z)[T].$$

Les conditions sur les H_i impliquent que $\lambda B_1 \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T]$, que $\deg B_1 \leqslant d - \deg R_0 \leqslant d$ et que $\tilde{B}_1(T) = 0$. En résumé, on peut écrire

$$P_0 = Q_0A_1 + R_0B_1 + \lambda P_1$$

avec $\lambda A_1, \lambda B_1, P_1 \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T]$, de degré $\leqslant d$ et nuls dans $k(x)[T]$. Posons

$$Q_1(T) = Q_0(T) + \pi B_1(T), \quad R_1(T) = R_0(T) + \pi A_1(T).$$

Alors

$$\|Q_1 - Q_0\|,\ \|R_1 - R_0\| \leqslant |\lambda^{-1}\pi|,\ P = Q_1R_1 + \pi\lambda P_1.$$

Notons que l'équation (4) donne

$$1 = Q_1U + R_1V + \lambda W_1, \quad W_1 \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T]$$

(on utilise l'hypothèse $|\pi| \leqslant |\lambda^3|$ ici). On construit ainsi de proche en proche des suites d'éléments $Q_m, R_m, P_m \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T]$, de degrés bornés par d, et tels que

$$\|Q_{m+1} - Q_m\|,\ \|R_{m+1} - R_m\| \leqslant |\pi\lambda^{m-1}|, \quad \tilde{Q}_m(T) = q(T),\ \tilde{R}_m(T) = r(T)$$

et

$$P = Q_mR_m + \pi\lambda^mP_m.$$

Comme $\mathcal{O}_X(Z)^0$ est complet et que les Q_m, R_m sont de degrés bornés par d, il existe des limites $Q(T), R(T) \in \mathcal{O}_X(Z)^0[T]$ avec $P(T) = Q(T)R(T)$ et $\tilde{Q}(T) = q(T)$, $\tilde{R}(T) = r(T)$. Ce qui prouve la proposition.

Remarque 4.10. — On peut aussi utiliser le théorème des fonctions implicites pour en déduire que $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien. Voir [**Ray**], VII.4.

Corollaire 4.11. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini d'espaces analytiques rigides. Soient $y \in Y$ et $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors il existe un voisinage ouvert admissible V de y tel que $f^{-1}(V)$ soit réunion disjointe de n ouverts admissibles $U_1, \dots, U_n$ tels que $x_i \in U_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Démonstration. — Par hypothèse, $\mathcal{A} := f_*\mathcal{O}_x$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_Y$-algèbres, et $\mathcal{A}_y$ est fini sur $\mathcal{O}_{Y,y}$. Soit V_0 un voisinage affinoïde de y. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) = \mathcal{A}(V_0) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V_0)} k(y) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_0)) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V_0)} k(y)\\ \simeq \oplus_{1\leqslant i\leqslant n}(\mathcal{O}_{X,x_i}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x_i}).\end{aligned}$$

Ainsi les idéaux maximaux de $\mathcal{A}_y$ correspondent canoniquement aux points $x_1, \dots, x_n$. Notons B_i le localisé de $\mathcal{A}_y$ en l'idéal maximal correspondant à x_i. Comme $\mathcal{O}_{Y,y}$ est hensélien, l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{A}_y \longrightarrow \oplus_{1\leqslant i\leqslant n} B_i$$

est un isomorphisme. Soit $e_i \in \mathcal{A}_y$ tel que son image dans B_j soit 1 si $j = i$ et 0 sinon. C'est donc un élément idempotent de $\mathcal{A}_y$. On a aussi les relations

$$e_1 + \cdots + e_n = 1; \quad e_ie_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

Il existe un voisinage ouvert affinoïde V de y tel que les e_i se relèvent en des éléments $h_i \in \mathcal{A}(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ vérifiant les relations

$$h_i^2 = h_i; \quad h_1 + \cdots + h_n = 1; \quad h_ih_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \tag{5}$$

Posons $U_i = \{x \in f^{-1}(V) \mid h_i(x) = 1\}$. C'est une partie rationnelle de $f^{-1}(V)$. Les relations (5) impliquent que $f^{-1}(V)$ est la réunion disjointe des U_i. Enfin $x_i \in U_i$ par définition de h_i.

Remarque 4.12. — Le corollaire dit que l'on peut séparer les points x_i par des voisinages ouverts deux à deux disjoints pourvu que l'on se restreint au-dessus d'un voisinage assez petit de y. Ceci est impossible avec les ouverts de Zariski en géométrie algébrique.

Remarque 4.13. — On peut montrer dans la proposition ci-dessus que si V est connexe et assez petit, alors les U_i sont connexes.

Corollaire 4.14. — *Conservons les notations ci-dessus. Alors l'homomorphisme canonique $(f_*\mathcal{O}_X)_y \to \oplus_{1\leqslant i\leqslant n}\mathcal{O}_{X,x_i}$ est un isomorphisme.*

Définition 4.15. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini. On dit que f est *plat de degré* $n \geqslant 1$ si $f_*\mathcal{O}_X$ est localement libre de rang n sur Y. On dit que f est *étale algébrique* si l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est plat et non-ramifié pour tout $x \in X$.

Corollaire 4.16. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini plat de degré n. Soit $y \in Y$ tel que $f^{-1}(y)$ soit constitué de n points distincts. Alors il existe un voisinage ouvert admissible V de y tel que $f^{-1}(V)$ soit réunion disjointes de n ouverts admissibles $U_1, ..., U_n$ et que $f|_{U_i} : U_i \to V$ soit un isomorphisme.*

Démonstration. — Soient $V, U_1, ..., U_n$ comme dans le corollaire 4.11. Alors $f_i := f|_{U_i}$ est fini, plat, et $\deg f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg f_i$. Il suit que f_i est de degré 1, donc f_i est un isomorphisme.

Remarque 4.17. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini, étale algébrique. Soit $y \in Y$ un point tel que pour $f^{-1}(y) \subset X(K)$ (c'est toujours vrai si K est algébriquement clos). Alors il existe un voisinage $V \ni y$ tel que $f^{-1}(V)$ soit isomorphe à la réunion disjointe de n copies de V, où n est le cardinal de $f^{-1}(y)$. C'est l'équivalent de l'assertion *un revêtement algébrique est une fibration topologique* concernant les morphismes de variétés algébriques sur $\mathbb{C}$.

En effet, f est plat d'un certain degré m au-dessus d'un voisinage de y. Soient $x_1, \dots, x_n$ les points de $f^{-1}(y)$. Alors on a des isomorphismes canoniques

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \simeq \oplus_{1 \leqslant i \leqslant n}(\mathcal{O}_{X,x_i}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x_i}) \simeq \oplus_{1 \leqslant i \leqslant n} k(x_i),$$

le premier est général pour les morphismes finis, le second provient de l'hypothèse f non-ramifié. Comme le membre de gauche est de dimension m sur $k(y)$, on en déduit que $n = m$. Il suffit maintenant d'appliquer le corollaire 4.16.

5. Analytification de variétés algébriques

Soit K un corps complet non-archimédien. Toute variété algébrique Z sur K peut être munie canoniquement d'une structure d'espace analytique rigide, ainsi que les morphismes de variétés algébriques ainsi que les faisceaux cohérents. Par variété algébrique sur un corps, nous entendons un schéma Z de type fini sur ce corps. Dans la pratique, seuls les points fermés de Z interviennent.

***Exemple 5.1* (Espaces affines)**. — L'exemple de variété algébrique le plus simple est celui de l'espace affine $Z := \mathbb{A}^n_K$. Si K est algébriquement clos, alors $Z(K) = K^n$ est la réunion de polydisques de rayons tendant vers l'infini. Comme on a une structure d'espace analytique rigide sur chaque polydisque, cela permet de définir une structure analytique sur Z.

Procédons maintenant de façon plus rigoureuse. Le corps K n'est pas nécessairement algébriquement clos. Soit $(r_m)_m$ une suite d'éléments de K^* avec $(|r_m|)_m$ croissante et tendant vers l'infini. Soit

$$D_m := \operatorname{Spm} K\langle r_m^{-1}T_1, \dots, r_m^{-1}T_n\rangle.$$

L'homomorphisme canonique $K[T_1, \dots, T_n] \to K\langle r_m^{-1}T_1, \dots, r_m^{-1}T_n\rangle$ induit une application $\pi_m : D_m \to \mathbb{A}^n_K$. On vérifie à l'aide du corollaire 2.3 que π_m est injective et continue. On identifie D_m à son image $\pi_m(D_m)$. Alors ensemblistement Z est la réunion croissante des D_m. De plus, D_m est une partie rationnelle de D_{m+1}. Notons X l'espace topologique Z muni de la topologie induite par celle des D_m. Définissons une topologie de Grothendieck sur X. On dira qu'un ouvert de X est admissible si c'est un ouvert admissible d'un D_m ou s'il est égal à X. Un recouvrement $\{U_i\}_i$ d'un ouvert admissible U est admissible si $\{D_m \cap U_i\}_i$ est un recouvrement admissible de $U \cap D_m$ pour tout m. En particulier, $\{D_m\}_m$ est un recouvrement admissible de X. Les faisceaux structuraux $\mathcal{O}_{D_m}$ se recollent en un faisceau $\mathcal{O}_X$ sur X. Par construction, $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace analytique rigide sur K, que l'on notera Z^{an}.

On peut raffiner la topologie de Grothendieck sur X de sorte que les ouverts de Zariski de Z soient aussi des ouverts admissibles ([**BGR**], Chap. 9). Le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ s'étend à cette topologie de Grothendieck. Ainsi, si l'on munit Z de la topologie de Grothendieck où les ouverts admissibles sont tous les ouverts de Zariski et où les recouvrements admissibles sont tous les recouvrements par des ouverts de Zariski, alors l'application identité $\pi : X \to Z$ est une application continue compatible avec la topologie de Grothendieck. On a clairement un morphisme d'espaces topologiques annelés $i : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ (grosso modo, les fonctions polynomiales sont des fonctions analytiques rigides).

***Exemple 5.2* (Variétés affines)**. — Si V est une variété affine sur K, alors V est définie par un idéal I dans un espace affine $\mathbb{A}^n_K$. Avec les notations ci-dessus, on a $V = \cup_{m \geqslant 1}(V \cap D_m)$. Or $V \cap D_m$ est un espace affinoïde

$$V \cap D_m = \mathrm{Spm}(K\langle r_m^{-1}T_1, \ldots, r_m^{-1}T_n\rangle / I).$$

On munit donc V d'une structure d'espace analytique rigide de la même façon que ci-dessus. Notons cet espace rigide V^{an}. On a toujours un morphisme d'espaces topologiques annelés $\pi : (V^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to (V, \mathcal{O}_V)$, quitte à raffiner la topologie de Grothendieck sur V^{an}.

Proposition 5.3. — *Soit Z une variété algébrique sur K. Alors il existe un unique couple (Z^{an}, π), où Z^{an} est un espace analytique rigide sur K, π est un morphisme d'espaces topologiques $Z^{\mathrm{an}} \to Z$ (avec topologies de Grothendieck. Celle de Z coïncide avec la topologie de Zariski) vérifiant la propriété universelle suivante :*

> *Pour tout espace analytique rigide X et pour tout morphisme d'espaces topologiques annelés $f : X \to Z$, il existe un unique morphisme $\tilde{f} : X \to Z^{\mathrm{an}}$ tel que $f = \pi \circ \tilde{f}$.*

Démonstration. — L'unicité résulte de propriété universelle. Pour l'existence, on montre d'abord que le couple (Z^{an}, π) défini dans l'exemple 5.2 vérifie la propriété universelle. Dans le cas général, on écrit Z comme réunion d'ouverts affines Z_i. L'unicité de Z_i^{an} permet de recoller les Z_i^{an} pour obtenir Z^{an}.

L'espace analytique Z^{an} est appelé *analytifié de* Z. Une fois que l'on a compris l'analytification des variétés algébriques, le même procédé s'applique aux morphismes de variétés algébriques. Nous ne détaillerons pas la définition.

***Exemple 5.4* (Espaces projectifs)**. — Soit $Z = \mathbb{P}^n_K$. Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, notons Z_i l'ouvert principal $D_+(T_i)$ de Z. Il correspond aux points de coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_n)$ avec $x_i \neq 0$. C'est une variété affine :

$$Z_i = \operatorname{Spec} K[T_0/T_i, T_1/T_i, \ldots, T_n/T_i]$$

et on $Z = \cup_{0 \leqslant i \leqslant n} Z_i$. L'espace analytique Z^{an} est réunion des $n+1$ espaces affinoïdes

$$X_i := \{x \in Z_i^{\mathrm{an}} \mid |(T_j/T_i)(x)| \leqslant 1,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}.$$

C'est un polydisque unité de dimension n.

Proposition 5.5. — *Soit Z une variété algébrique sur K. Alors les propriétés suivantes sont vraies.*
(a) *Pour tout $z \in Z$, l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{Z,z} \to \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}},z}$ induit un isomorphisme des complétés formels $\widehat{\mathcal{O}}_{Z,z} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{Z^{\mathrm{an}},z}$ pour la topologique $\mathfrak{m}_z$-adique.*
(b) $\dim Z = \dim Z^{\mathrm{an}}$.
(c) *Z est régulière si et seulement si Z^{an} est régulier.*

Démonstration

(a) La propriété étant locale, on peut supposer Z affine, isomorphe à une sous-variété fermée $V(I)$ d'un espace affine $W = \mathbb{A}^n_K$. Alors

$$\mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{W,z}/I, \quad \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}},z} = \mathcal{O}_{W^{\mathrm{an}},z}/I.$$

Il suffit donc de montrer la propriété pour $Z = \mathbb{A}^n_K$. Si z est un point rationnel, on peut supposer que c'est l'origine $(0, \ldots, 0)$ quitte à changer de coordonnées. Alors

$$\widehat{\mathcal{O}}_{Z,z} \simeq K[[T_1, ..., T_n]] \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{Z^{\mathrm{an}},z}.$$

Dans le cas général, la preuve est un peu plus longue mais pas plus difficile. On montre que Z et Z^{an} ont le même corps résiduel en z et que l'idéal maximal $\mathfrak{m}_z$ de $\mathcal{O}_{Z,z}$ engendre l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}},z}$.

(b) et (c) résultent directement de (a) car la dimension et la régularité sont des propriétés des anneaux locaux $\mathcal{O}_{Z,z}$ et $\mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}},z}$ et que ces propriétés se lisent dans le complété formel.

Définition 5.6. — Soit Z une variété algébrique sur K. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Z. Considérons $\pi^*\mathcal{F}$, où π est le morphisme canonique $Z^{\mathrm{an}} \to Z$. C'est un faisceau cohérent sur Z^{an}, appelé *analytifié de* $\mathcal{F}$ et noté $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$. Si R est un ouvert admissible affinoïde de Z^{an}, contenu dans un ouvert affine V de Z, alors

$$\mathcal{F}^{\mathrm{an}}(R) = \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_Z(V)} \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}(R).$$

Soit $f : W \to Z$ un morphisme fini de variétés algébriques sur K. Alors $f^{\mathrm{an}} : W^{\mathrm{an}} \to Z^{\mathrm{an}}$ est un morphisme fini d'espaces analytiques. De plus, on a canoniquement $f^{\mathrm{an}}_* \mathcal{O}_{W^{\mathrm{an}}} = (f_* \mathcal{O}_W)^{\mathrm{an}}$.

***Théorème 5.7* (GAGA).** — [(1)] *Soit Z une variété projective sur K. Alors les propriétés suivantes sont vraies.*
(a) *Pour tout $q \geqslant 0$, et pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur Z, l'homomorphisme canonique*

$$H^q(Z, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}})$$

est un isomorphisme.
(b) *Pour tout couple de faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur Z, l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{G}^{\mathrm{an}})$$

est un isomorphisme.
(c) *Soit $\mathcal{F}'$ un faisceau cohérent sur Z^{an}. Il existe un unique faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur Z tel que $\mathcal{F}^{\mathrm{an}} \simeq \mathcal{F}'$.*

Démonstration. — La preuve est essentiellement la même que celle de Serre pour les espaces analytiques complexes [**Se**]. La preuve complète est dans la thèse [**Ko**]. Cette référence n'étant pas toujours facile à trouver, voici les principes de la démonstration.

(a) Par des raisonnements standard, on se ramène au cas où $Z = \mathbb{P}^n_K$ est un espace projectif. On a alors un homomorphisme surjectif $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{F}$, où $\mathcal{T}$ est une somme directe finie de twists $\mathcal{O}_Z(m_1), \ldots, \mathcal{O}_Z(m_r)$, $m_i \in \mathbb{Z}$. Comme Z est recouvert par $n+1$ ouverts admissibles affinoïdes, on a $H^{n+1}(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}) = 0$. Soit $\mathcal{G} = \mathrm{Ker}\varphi$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H^n(Z, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^n(Z, \mathcal{T}) & \longrightarrow & H^n(Z, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \\
H^n(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{G}^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & H^n(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{T}^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & H^n(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les lignes horizontales sont exactes. Par un calcul direct (récurrence sur n et m), on montre que (a) est vrai pour tout $q \geqslant 0$ et pour tout twist $\mathcal{O}_Z(m)$. Donc β est un isomorphisme et γ est surjectif. Appliquant ce résultat au faisceau $\mathcal{G}$, on obtient la surjectivité de α et donc l'injectivité de γ. On continue le raisonnement avec la suite exacte $H^{n-1}(Z, \mathcal{T}) \to H^{n-1}(Z, \mathcal{F}) \to H^n(Z, \mathcal{G})$ et son pendant analytique et ainsi de suite.

(b) Par la platitude de $\pi : Z^{\mathrm{an}} \to Z$, on a un isomorphisme de faisceaux cohérents

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^{\mathrm{an}} \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{G}^{\mathrm{an}}).$$

Il suffit maintenant d'appliquer (a) au faisceau cohérent $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ avec $q = 0$.

(1) Géométrie algébrique et géométrie analytique.

(c) L'unicité de $\mathcal{F}$ résulte de (b). Son existence est la partie la plus longue de la preuve du théorème. Elle se fait par récurrence sur $\dim Z$. Fixons un faisceau très ample $\mathcal{O}_Z(1)$ sur Z associé à une immersion fermée $Z \to \mathbb{P}_K^N$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, posons

$$\mathcal{F}'(m) := \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{Z^{\rm an}}} \mathcal{O}_Z(m)^{\rm an}.$$

On dira qu'un faisceau analytique cohérent est *algébrique* s'il satisfait l'assertion (c). Supposons que tout faisceau analytique cohérent sur toute (analytification de) variété algébrique projective de dimension $< \dim Z$ est algébrique. Nous allons montrer successivement que :

(α) *Pour tout $z \in Z^{\rm an}$, il existe m tel que $\mathcal{F}'(m)$ soit engendré par ses sections globales en z ;*

(β) *Le faisceau $\mathcal{F}'$ est quotient d'une somme directe finie $\oplus_i \mathcal{O}_{Z^{\rm an}}(m_i)$;*

(γ) *$\mathcal{F}'$ est algébrique.*

Nous aurons besoin du théorème de Kiehl suivant.

***Théorème 5.8* (Kiehl, [Ki]).** — *Soit X un espace analytique rigide propre sur K (par exemple l'analytification d'une variété algébrique projective sur K), soit $\mathcal{F}'$ un faisceau cohérent sur X. Alors pour tout $p \geqslant 0$, le groupe de cohomologie $H^p(X, \mathcal{F}')$ est de dimension finie sur K.*

Suite de la démonstration du théorème 5.7. — Montrons la propriété (α). Soit $z \in Z^{\rm an}$. Soit $k(z)$ le corps résiduel de $Z^{\rm an}$ en z. C'est aussi le corps résiduel de Z en z. Il est facile de voir qu'il existe une hypersurface H' de $\mathbb{P}_K^N$ de degré $d = [k(z) : K]$, telle que $z \in H := H' \cap Z$ et que $\dim H < \dim Z$. Considérons la suite exacte

$$0 \to (\mathcal{O}_Z(-H))^{\rm an} \to \mathcal{O}_{Z^{\rm an}} \to \mathcal{O}_{H^{\rm an}} \to 0$$

On a $\mathcal{O}_Z(-H) \simeq \mathcal{O}_Z(-d)$. En tensorisant cette suite exacte par $\mathcal{F}'$, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}' \to \mathcal{F}'(-d) \to \mathcal{F}' \to \mathcal{G}' \to 0$$

où $\mathcal{H}' = \mathcal{T}or^1_{\mathcal{O}_{Z^{\rm an}}}(\mathcal{O}_{H^{\rm an}}, \mathcal{F}')$, et $\mathcal{G}' = \mathcal{F}'|_{H^{\rm an}}$. Ce sont des faisceaux cohérents sur $H^{\rm an}$. Notons $\mathcal{A}'$ l'image de $\mathcal{F}'(-d)$ dans $\mathcal{F}'$. Comme $\mathcal{O}_{Z^{\rm an}}(m)$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{Z^{\rm an}}$, on obtient des suites exactes

$$0 \to \mathcal{H}'(m+d) \to \mathcal{F}'(m) \to \mathcal{A}'(m+d) \to 0 \tag{6}$$

$$0 \to \mathcal{A}'(m+d) \to \mathcal{F}'(m+d) \to \mathcal{G}'(m+d) \to 0. \tag{7}$$

Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{H}'$ est algébrique, isomorphe à un $\mathcal{H}^{\rm an}$. Donc pour m assez grand, on a d'après (b) :

$$H^2(H^{\rm an}, \mathcal{H}'(m+d)) \simeq H^2(H, \mathcal{H}(m+d)) = 0.$$

De même $H^1(H^{\mathrm{an}}, \mathcal{G}'(m+d)) = 0$ pour tout m assez grand. Il existe donc $m_0 \in \mathbb{Z}$ tel que les suites exactes de cohomologie de (6) et de (7) induisent des homomorphismes canoniques surjectifs

$$H^1(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}'(m)) \longrightarrow H^1(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{A}'(m+d)), \tag{8}$$

$$H^1(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{A}'(m+d)) \longrightarrow H^1(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}'(m+d)) \tag{9}$$

pour tout $m \geqslant m_0$. En particulier la suite $\dim_K H^1(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}'(m_0+nd))$, $n \geqslant 0$, est décroissante. D'après le théorème 5.8, $\dim_K H^1(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}'(m_0))$ est finie, donc la suite est stationnaire à partir d'un $n_0 \geqslant 0$. Par conséquent, l'homomorphisme (9) est un isomorphisme pour tout m de la forme $m = m_0 + nd$, $n \geqslant n_0$. Donc l'homomorphisme canonique

$$H^0(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}'(m_0+nd)) \longrightarrow H^0(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{G}'(m_0+nd))$$

est surjectif pour tout $n > n_0$. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{G}'$ est algébrique, donc $\mathcal{G}'(m_0+nd)$ est engendré par ses sections globales pour n assez grand. Par Nakayama, cela implique que pour n assez grand, $\mathcal{F}'(m_0+nd)$ est engendré par ses sections globales en z. Cela démontre (α).

(β) Pour tout $z \in Z^{\mathrm{an}}$, il existe d'après (α) des entiers $m_z \in \mathbb{Z}$, $n_z \geqslant 1$ et un homomorphisme $\mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}^{n_z} \to \mathcal{F}'(-m_z)$ qui soit surjectif en z. Ce qui revient à dire que $\mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}(m_z)^{n_z} \to \mathcal{F}'$ est surjectif en z. On a donc un homomorphisme surjectif

$$\varphi : \ \oplus_{z\in Z^{\mathrm{an}}} \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}(m_z)^{n_z} \longrightarrow \mathcal{F}'$$

de faisceaux quasi-cohérents sur Z^{an}. Soit U un ouvert affinoïde de Z^{an}. La catégorie des faisceaux cohérents sur U étant équivalente à celle des modules de type fini sur $\mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}(U)$ (qui est noethérien), on en déduit que l'image par $\varphi|_U$ d'une somme directe *finie* du membre de gauche est égale à $\mathcal{F}'|_U$. Comme Z^{an} est quasi-compact (i.e. admet un recouvrement admissible fini affinoïde), la même assertion est vraie sur Z^{an}, ce qui prouve (β).

(γ) D'après (β), il existe un homomorphisme surjectif $\varphi : \mathcal{K}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{F}'$ avec $\mathcal{K}$ cohérent sur Z. En appliquant le même résultat à $\ker \varphi$, on obtient une suite exacte

$$\mathcal{K}_1^{\mathrm{an}} \to \mathcal{K}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{F}' \to 0.$$

D'après (b), $\mathcal{K}_1^{\mathrm{an}} \to \mathcal{K}^{\mathrm{an}}$ est algébrique, donc $\mathcal{F}'$ est l'analytification du conoyau de $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}$. Par conséquent $\mathcal{F}'$ est bien algébrique, et la preuve du théorème 5.7 est achevé.

Remarque 5.9. — Lorsque $Z = \mathbb{P}^1_K$, il y a une preuve plus simple du théorème 5.7. Voir [**MM**], § V.1.4. Combiné avec le théorème d'image directe (*cf.* [**Ki**]), cela implique le théorème 5.7 (c) pour les courbes algébriques projectives sur K.

Corollaire 5.10. — *Soit Z une variété projective sur K, soit $g : X \to Z^{\mathrm{an}}$ un morphisme fini d'espaces analytiques rigides. Alors il existe une variété algébrique W sur*

K et un morphisme algébrique $f : W \to Z$ tels que $W^{\mathrm{an}} = X$ et que $g = f^{\mathrm{an}}$. De plus, si X est régulier connexe de dimension 1, alors il en est de même pour W.

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}' = g_*\mathcal{O}_X$. C'est un faisceau cohérent sur Z^{an}. D'après le théorème 5.7 (c), c'est l'analytifié d'un faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$. Montrons que la structure d'algèbre sur $\mathcal{F}'$ se transpose sur $\mathcal{F}$. La loi de composition sur $\mathcal{F}'$ est un homomorphisme de faisceaux cohérents $\varphi : \mathcal{F}' \times \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'$. D'après le théorème 5.7 (b), c'est l'analytifié d'un homomorphisme algébrique $\psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. On vérifie sans difficulté que cela induit une structure d'algèbre sur $\mathcal{F}$. Par suite, il existe un unique morphisme de variétés algébriques $f : W \to Z$ tel que $f_*\mathcal{O}_W = \mathcal{F}$. Du fait que $f_*^{\mathrm{an}}\mathcal{O}_{W^{\mathrm{an}}} = (f_*\mathcal{O}_W)^{\mathrm{an}}$, on a $W^{\mathrm{an}} = X$ et $f^{\mathrm{an}} = g$.

Si X est régulier connexe de dimension 1, alors W est régulière de dimension 1 d'après la proposition 5.5. Enfin W est connexe d'après le théorème 5.7 (a).

Références

[BGR] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, Reinhold Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Grund. der math. Wiss. **261**, Springer Verlag, (1984).

[FV] Jean Fresnel, Marius van der Put, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in Math., **18** Birkaüser, (1981).

[Fr] Jean Fresnel, *Géométrie analytique rigide*, polycopié Université Bordeaux 1 (1984).

[Har] David Harbater, *Galois Coverings of the Arithmetic Line*, Lectures Notes in Math., **1240** (1987), 165–195.

[Ki] Reinhardt Kiehl, *Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Invent. Math. **2** (1967) 191–214.

[Ko] Ursula Köpf, *Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen*, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 2. Serie. Heft **7** (1974).

[Li] Qing Liu, *Tout groupe fini est un groupe de Galois sur $\mathbb{Q}_p(T)$, d'après Harbater*, Recent Developments in the Inverse Galois Problem, ed. M. Fried, AMS Contemporary Math. series bf 186, (1995), 261–265.

[MM] Gunter Malle, B. Heinrich Matzat, *Inverse Galois Theory*, Springer Monographs in Math. (1999).

[Ray] Michel Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Math., **169** (1970).

[Se] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, **6** (1955–1956), 1–42.

[Ta] John Tate, *Rigid analytic spaces*, Private notes (1962). Reprinted in Inv. Math. **12** (1971), 257–289.

Q. Liu, CNRS, Laboratoire A2X, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, F-33405 Talence cedex, France • *E-mail :* `liu@math.u-bordeaux.fr`