Séminaires & Congrès
9, 2004, p. 155–172

SCINDEMENT D'ASSOCIATIVITÉ ET ALGÈBRES DE HOPF

par

Jean-Louis Loday

En hommage à Jean Leray

Résumé. — On montre que certaines algèbres associatives dont le produit se scinde en somme de plusieurs opérations et qui sont libres, en un certain sens, pour ces opérations, possèdent une structure d'algèbre de Hopf. On montre que l'opérade des algèbres dendriformes joue un rôle particulier dans ce contexte, puis on donne de nombreux exemples.

***Abstract* (Splitting associativity and Hopf algebras).** — We show that some associative algebras whose product splits up into the sum of several operations and are free, in a certain sense, with respect to these operations, admit a Hopf algebra structure. We show that the operad of dendriform algebras play a crucial role in this context, and we give numerous examples.

Introduction

Dans leur célèbre article sur les algèbres de Hopf, John Milnor et John Moore interprètent le théorème 8 de l'article [**Leray**] de Jean Leray de la façon suivante (*cf.* théorème 7.5 de [**MM**]) : si une algèbre commutative unitaire A possède une co-opération unitaire, *i.e.* un homomorphisme d'algèbres associatives

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$

compatible avec l'unité, alors A est libre comme algèbre associative et commutative (c'est-à-dire est une algèbre symétrique). Ce résultat peut s'étendre à d'autres types d'algèbres à condition de remplacer le produit tensoriel par la somme (colimite) dans cette catégorie d'algèbres (*cf.* Fresse [**Fr**] et Oudom [**O**]).

Le but de ce papier est, en un certain sens, de renverser la situation et de montrer que, pour certains types d'algèbres, on peut construire un coproduit sur l'algèbre libre. Dans le cas classique des algèbres associatives, l'algèbre libre sur l'espace vectoriel V

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 16A24, 16W30, 18D50.
Mots clefs. — Algèbre de Hopf, opérade, dendriforme, série génératrice, nombre de Catalan.

est l'algèbre tensorielle $T(V)$ (algèbre des polynômes non commutatifs sur une base de V). On sait que c'est aussi une algèbre de Hopf pour le coproduit construit à partir des shuffles. Comme conséquence importante de cette propriété les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie sont des algèbres de Hopf. En pratique on peut utiliser le fait que $T(V)$ est libre pour démontrer la coassociativité du coproduit shuffle sans calculs combinatoires fastidieux. Nous montrons dans ce papier que cette technique peut être étendue à certains types d'algèbres présentant un « scindement d'associativité ». Nous montrons que, lorsque certaines propriétés de cohérence existent entre les relations définissant le type d'algèbre et l'unité, alors l'algèbre libre pour ce type (dûment augmentée) est une algèbre de Hopf. Dans le cas où le type d'algèbres est défini par deux opérations dont la somme est une opération associative (scindement d'associativité), on constate que les relations doivent être combinaisons linéaires de 3 relations particulières. Celles-ci sont exactement les relations des « algèbres dendriformes ».

Dans le premier paragraphe on explique ce qu'on entend par « scindement d'associativité » et « cohérence des relations avec l'unité ». On montre le rôle primordial des algèbres dendriformes pour ce problème. Dans le deuxième paragraphe on démontre l'existence d'une structure d'algèbre de Hopf sur les algèbres libres pour les types d'algèbres satisfaisant aux conditions de cohérence. Les deux premiers paragraphes sont restreints aux types d'algèbres ayant deux opérations génératrices sans symétrie. On peut étendre le résultat à d'autres types d'algèbres, ce qu'on fait dans le troisième paragraphe, écrit avec la terminologie des opérades qui est le langage adapté dans ce domaine. L'existence du coproduit sur l'algèbre libre a pour application la généralisation de la notion de convolution.

Outre les algèbres dendriformes, il se trouve que la plupart des nouveaux types d'algèbres avec scindement d'associativité apparus dernièrement vérifient effectivement les propriétés de cohérence : algèbres 2-associatives, trigèbres dendriformes, algèbres pré-dendriformes, algèbres diptères, quadrigèbres, algèbres magmatiques. Après avoir donné la présentation de ces types d'algèbres, on indique ce qui est connu sur leur algèbre libre dans le quatrième paragraphe.

Dans le dernier paragraphe nous abordons le problème de la détermination de l'opérade des primitifs.

Je remercie María Ronco et Teimuri Pirashvili pour les nombreuses conversations et idées échangées sur le sujet, et François Lamarche pour une remarque pertinente.

Notation. — Dans ce papier K est un corps de caractéristique quelconque. Par espace ou espace vectoriel on entend un espace vectoriel sur K. Le produit tensoriel sur K des espaces V et W est noté $V \otimes W$.

1. Scindement d'associativité et cohérence unitaire

1.1. Définition. — Soit A une algèbre associative (non unitaire) dont on note $*$ le produit. On dira qu'il y a *scindement d'associativité* lorsque cette opération $*$ est somme de deux opérations :

$$x * y = x \prec y + x \succ y, \tag{0}$$

que l'on qualifie respectivement de *gauche* et *droite*, et lorsque l'associativité de $*$ est une conséquence des relations satisfaites par $\prec$ et $\succ$.

L'exemple suivant va jouer un rôle primordial dans notre problématique.

***1.2. Exemple* (algèbres dendriformes)**. — Par définition une *algèbre dendriforme* (*cf.* [**L2**]), encore appelée digèbre dendriforme, est un espace vectoriel A muni de deux opérations *gauche* et *droite* satisfaisant aux relations

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y * z), \tag{R1}$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z), \tag{R2}$$

$$(x * y) \succ z = x \succ (y \succ z), \tag{R3}$$

Par addition des relations on constate que l'opération $*$ est associative, on a donc bien scindement d'associativité.

1.3. Compatibilité entre relations et action de l'unité. — Toute algèbre associative A peut être rendue unitaire formellement en posant $A_+ = K \cdot 1 \oplus A$ (algèbre augmentée) avec le produit associatif induit par celui de A, 1 étant l'unité pour $*$. On se pose la question de savoir si, lorsque le produit associatif est scindé, on peut étendre les opérations $\prec$ et $\succ$ à tout A_+. On doit avoir $a = 1 * a = 1 \prec a + 1 \succ a$ d'une part et $a = a * 1 = a \prec 1 + a \succ 1$ d'autre part. Faisons les choix suivants pour l'action de 1 sur $a \in A$:

$$1 \prec a = 0, \quad 1 \succ a = a, \quad a \prec 1 = a, \quad a \succ 1 = 0\ . \tag{†}$$

On ne peut pas étendre $\prec$ et $\succ$ à K donc $1 \prec 1$ et $1 \succ 1$ ne sont pas définis. On voudrait que l'extension des opérations $\prec$ et $\succ$ à l'algèbre unitaire A_+ par les formules ci-dessus soit *compatible*, *i.e.* que les relations satisfaites par $\prec$ et $\succ$ soient valables sur A_+ pour autant que les termes soient définis. On dira alors que A_+ est une *algèbre augmentée.*

Dans un premier temps on suppose que les relations satisfaites par $\prec$ et $\succ$ sont quadratiques et régulières (voir paragraphe 3.1). Ceci signifie que les relations sont des combinaisons linéaires de monômes du type $(x \circ_1 y) \circ_2 z$ et du type $x \circ_1 (y \circ_2 z)$ où $\circ_1$ et $\circ_2$ sont soit $\prec$ soit $\succ$ (il y a donc 8 monômes possibles). On remarquera que les algèbres dendriformes sont de ce type. Elles ont été étudiées dans [**L2**].

1.4. Proposition. — *L'extension des opérations $\prec$ et $\succ$ à l'algèbre unitaire A_+ est compatible si et seulement si les relations satisfaites par $\prec$ et $\succ$ sont des combinaisons linéaires des relations* (R1), (R2) *et* (R3) *décrites ci-dessus.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{aligned}\alpha(x \prec y) \prec z + \beta(x \prec y) \succ z + \gamma(x \succ y) \prec z + \delta(x \succ y) \succ z\\ = \alpha' x \prec (y \prec z) + \beta' x \prec (y \succ z) + \gamma' x \succ (y \prec z) + \delta' x \succ (y \succ z)\end{aligned}$$

une relation où α, β, etc, sont des scalaires. En remplaçant x, resp. y, resp. z par 1, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma = \gamma', \quad \delta = \delta',\\ \alpha = \beta', \quad \beta = \delta',\\ \alpha = \alpha', \quad \gamma = \gamma',\end{aligned}$$

respectivement. En effet, par exemple pour $x = 1$, on obtient

$$\gamma(b \prec c) + \delta(b \succ c) = \gamma'(b \prec c) + \delta'(b \succ c)$$

pour tous $b, c \in A_+$, d'où l'égalité de la première ligne.

On en déduit que la relation de départ est de la forme

$$\begin{aligned}\alpha\big((x \prec y) \prec z - x \prec (y \prec z) - x \prec (y \succ z)\big) + \gamma\big((x \succ y) \prec z - x \succ (y \prec z)\big)\\ + \beta\big((x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z - x \succ (y \succ z)\big) = 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire une combinaison linéaire des trois relations (Ri). □

On examine plusieurs types de digèbres dans le second paragraphe.

2. Structure d'algèbre de Hopf sur les algèbres libres

On considère un type d'algèbres $\mathcal{P}$ ayant deux opérations génératrices $\prec$ et $\succ$ et dont les relations sont des combinaisons linéaires de (R1), (R2) et (R3). On suppose que l'on est en présence d'un scindement d'associativité, c'est-à-dire que l'opération $*$, définie par la formule (0), est associative.

Soient A et B deux algèbres de type $\mathcal{P}$, dont on note A_+, B_+ la *$\mathcal{P}$-algèbre augmentée.*

2.1. Proposition (Cohérence). — *Les formules ci-après font de $A_+ \otimes B_+$ une $\mathcal{P}$-algèbre augmentée (l'unité étant $1 \otimes 1$) :*

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \circ (a' \otimes b') &:= (a * a') \otimes (b \circ b') \text{ si } b \in B \text{ ou } b' \in B,\\ (a \otimes 1) \circ (a' \otimes 1) &:= (a \circ a') \otimes 1,\end{aligned}$$

où $\circ = \prec$ et $\succ$ (ou une combinaison linéaire quelconque d'icelles), $a, a' \in A_+$ et $b, b' \in B_+$.

On dit alors que le choix d'action de l'unité est *cohérent* avec les relations (ainsi dans ce cas la compatibilité implique la cohérence). Il est pratique pour les calculs d'utiliser la formule (abusive)

$$(a * a') \otimes (1 \circ 1) = a \circ a' \otimes 1.$$

Démonstration. — On remarque que les formules impliquent immédiatement

$$(a \otimes b) * (a' \otimes b') = (a * a') \otimes (b * b')$$

dans tous les cas. Ainsi la structure d'algèbre associative induite est bien la structure habituelle.

Soient $a, a', a'' \in A_+$ et $b, b', b'' \in B_+$. Soit $i = 1, 2$ ou 3. On montre tout d'abord que la relation (Ri) est vérifiée pour $x = a \otimes b$, $y = a' \otimes b'$, $z = a'' \otimes b''$ dans les deux cas suivants

– l'un des éléments b, b', b'' vaut 1 et les deux autres sont dans B,

– deux des éléments b, b', b'' valent 1 et le troisième est dans B.

Les parties gauche et droite de la relation (R1) s'écrivent respectivement

$$((a \otimes b) \prec (a' \otimes b')) \prec (a'' \otimes b'') = (a * a' * a'') \otimes ((b \prec b') \prec b'')$$

et

$$(a \otimes b) \prec ((a' \otimes b') * (a'' \otimes b'')) = (a * a' * a'') \otimes (b \prec (b' * b''))$$

si $b \in B$ ou $b' \in B$. Si l'un des b, b', b'' seulement vaut 1, alors les composantes dans B_+ sont égales par la Proposition 1.4. Si $b = 1 = b''$ et $b' \in B$ les deux termes sont nuls, et sont donc égaux. Si $b' = 1 = b''$ et $b \in B$ les deux termes valent $(a * a' * a'') \otimes b$, ils sont donc égaux. Si $b = 1 = b'$ et $b'' \in B$ les parties gauche et droite s'écrivent respectivement

$$((a \otimes 1) \prec (a' \otimes 1)) \prec (a'' \otimes 1) = ((a \prec a') * a'') \otimes (1 \prec b'') = 0$$

et

$$(a \otimes 1) \prec ((a' \otimes 1) * (a'' \otimes 1)) = (a * a' * a'') \otimes (1 \prec b'') = 0$$

elles sont donc égales.

Les parties gauche et droite de la relation (R2) s'écrivent respectivement

$$((a \otimes b) \succ (a' \otimes b')) \prec (a'' \otimes b'') = (a * a' * a'') \otimes ((b \succ b') \prec b'')$$

et

$$(a \otimes b) \succ ((a' \otimes b') \prec (a'' \otimes b'')) = (a * a' * a'') \otimes (b \succ (b' \prec b'')).$$

Si l'un des b, b', b'' seulement vaut 1, alors les composantes dans B_+ sont égales par la Proposition 1.4. Si $b = 1 = b''$ et $b' \in B$ les deux termes valent $(a * a' * a'') \otimes b'$ et sont donc égaux. Si $b = 1 = b'$ et $b'' \in B$ les parties gauche et droite s'écrivent respectivement

$$((a \otimes 1) \succ (a' \otimes 1)) \prec (a'' \otimes b'') = ((a \succ a') * a'') \otimes (1 \prec b'') = 0$$

et

$$(a \otimes 1) \succ ((a' \otimes 1) \prec (a'' \otimes b'')) = (a \otimes 1) \succ ((a' * a'') \otimes (1 \prec b'')) = 0$$

elles sont donc égales. Si $b' = 1 = b''$ et $b \in B$ les parties gauche et droite s'écrivent respectivement

$$((a \otimes b) \succ (a' \otimes 1)) \prec (a'' \otimes 1) = ((a * a') \otimes (b \succ 1)) \prec (a'' \otimes 1) = 0$$

et

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \succ ((a' \otimes 1) \prec (a'' \otimes 1)) &= (a \otimes b) \succ ((a' \prec a'')) \otimes 1)\\ &= (a * (a' \prec a'')) \otimes (b \succ 1) = 0\end{aligned}$$

elles sont donc égales.

La vérification pour (R3) est en tous points analogue à celle de (R1).

Supposons maintenant que A et B satisfont à la relation (R) $:= \alpha$(R1) $+ \beta$(R2) $+ \gamma$(R3) pour des scalaires α, β, γ. Si b, b', b'' sont dans B, alors (R) est vérifiée pour $x = a \otimes b, y = a' \otimes b', z = a'' \otimes b''$ car la relation (R) est valable dans B. Si au moins l'un des b, b', b'' est dans B, alors (R) est vérifiée car, d'après les calculs précédents, la relation (Ri) est vérifiée pour tout i. Si maintenant $b = b' = b'' = 1$, alors (R) est vérifiée (toujours pour $x = a \otimes b$, $y = a' \otimes b'$, $z = a'' \otimes b''$) car la relation (R) est valable dans A.

En conclusion on a démontré que $A \otimes K \oplus K \otimes B \oplus A \otimes B$ est une algèbre de type $\mathcal{P}$, et donc $A_+ \otimes B_+$ est une $\mathcal{P}$-algèbre augmentée. □

2.2. Algèbre de Hopf connexe. — On rappelle qu'une *bigèbre* $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, *, \Delta, u, c)$ est la donnée d'une structure d'algèbre associative unitaire $(\mathcal{H}, *, u)$, d'une structure de cogèbre coassociative co-unitaire $(\mathcal{H}, \Delta, c)$ et on suppose que Δ et c sont des homomorphismes d'algèbres unitaires. On dit qu'une bigèbre est une *algèbre de Hopf* si elle possède une antipode.

Une bigèbre $\mathcal{H}$ est dite *connexe* si la filtration $F_r\mathcal{H}$ est complète, *i.e.* si $\mathcal{H} = \bigcup_r F_r\mathcal{H}$, pour $F_0\mathcal{H} := K \cdot 1$ et

$$F_r\mathcal{H} := \{x \in \mathcal{H} | \Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1 \in F_{r-1}\mathcal{H} \otimes F_{r-1}\mathcal{H}\}.$$

On montre aisément qu'une bigèbre connexe admet une antipode, donc il y a équivalence entre bigèbre connexe et algèbre de Hopf connexe.

2.3. Théorème. — *Soit $\mathcal{P}$ un type d'algèbres ayant deux opérations génératrices $\prec$ et $\succ$ et dont les relations sont des combinaisons linéaires de* (R1), (R2) *et* (R3), *l'une d'elles étant* (R1)+(R2)+(R3) *(scindement d'associativité). Alors l'algèbre libre augmentée $\mathcal{P}(V)_+$ est munie naturellement d'une structure d'algèbre de Hopf connexe.*

Démonstration. — Puisqu'il y a scindement d'associativité, l'algèbre $\mathcal{P}(V)$ est une algèbre associative et $\mathcal{P}(V)_+$ est une algèbre associative unitaire augmentée. Il nous faut donc construire la coopération Δ et démontrer ses propriétés.

D'après la proposition 2.1 l'algèbre associative $\mathcal{P}(V)_+ \otimes \mathcal{P}(V)_+$ est munie d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre augmentée.

Considérons maintenant l'application linéaire

$$\delta : V \longrightarrow \mathcal{P}(V)_+ \otimes \mathcal{P}(V)_+, \qquad v \longmapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v.$$

Il existe une et une seule extension de δ en un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres augmentées $\Delta : \mathcal{P}(V)_+ \to \mathcal{P}(V)_+ \otimes \mathcal{P}(V)_+$ car $\mathcal{P}(V)$ est la $\mathcal{P}$-algèbre libre sur V.

Puisque c'est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres augmentées, c'est, a fortiori, un morphisme d'algèbres associatives augmentées.

Il nous reste à montrer que Δ est coassociatif. Les morphismes $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta$ et $(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ étendent tous les deux l'application linéaire $V \to \mathcal{P}(V)_+{}^{\otimes 3}$ qui envoie v sur $1 \otimes 1 \otimes v + 1 \otimes v \otimes 1 + v \otimes 1 \otimes 1$. Par unicité de l'extension on déduit la coassociativité de Δ.

On a ainsi construit la structure de bigèbre. Montrons maintenant que cette bigèbre est connexe. De par sa définition l'algèbre libre $\mathcal{P}(V)$ est de la forme $\mathcal{P}(V) = \oplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(V)_n$ où $\mathcal{P}(V)_n$ est l'espace engendré linéairement par des produits quelconques de n éléments de V. Posons $\overline{\Delta}(x) = \Delta(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x = \sum x_1 \otimes x_2$. On a $\deg x = \deg x_1 + \deg x_2$. Comme $\deg x_1 \geqslant 1$ et $\deg x_2 \geqslant 1$, on a $\deg x_1 < \deg x$ et $\deg x_2 < \deg x$. Ainsi, si $x \in \mathcal{P}(V)_n$, on a $\overline{\Delta}^n(x) = 0$. Il s'en suit que $\mathcal{P}(V)_n \subset F_n \mathcal{P}(V)$. On a donc $\mathcal{P}(V)_+ = \bigcup_r F_r \mathcal{P}(V)_+$ et $\mathcal{P}(V)_+$ est une bigèbre connexe. Donc c'est une algèbre de Hopf connexe. $\square$

2.4. Remarques. — En fait $\mathcal{P}(V)_+$ a une structure plus fine que simplement celle d'une algèbre de Hopf, c'est une *$\mathcal{P}$-algèbre de Hopf*. Ceci signifie que le coproduit Δ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres augmentées.

Puisque δ est symétrique (*i.e.* $\delta = \tau \circ \delta$ où $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$), on pourrait penser que Δ est co-commutative. Il n'en est rien car, bien que τ soit un automorphisme d'algèbre associative, ce n'est pas un automorphisme d'algèbre de type $\mathcal{P}$.

2.5. Algèbres dendriformes. — On en a donné la présentation en 1.2. Dans [**L2**] on a montré que l'algèbre dendriforme libre sur un générateur, notée *Dend*(K), a pour base linéaire les arbres binaires planaires. Donc la dimension de ses composantes homogènes est

$$(1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots, c_n, \ldots)$$

où $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ est le nombre de Catalan (nombre d'arbres binaires planaires à $n+1$ feuilles).

En 1.3 on a fait un choix pour l'action de 1. Si on identifie 1 à l'arbre sans sommet interne, alors on constate que les formules de [**L2**] s'étendent sans obstruction.

Dans [**LR1**] on a construit explicitement un coproduit Δ' sur l'algèbre associative augmentée *Dend*$(K)_+$ en décrivant $\Delta'(t)$ pour tout arbre binaire planaire t par la formule de récurrence

$$\Delta'(t \vee s) = \sum t_{(1)} * s_{(1)} \otimes t_{(2)} \vee s_{(2)} + t \vee s \otimes 1.$$

Ici $\vee$ désigne le greffage des arbres et on a adopté la notation de Sweedler $\Delta'(t) = \sum t_{(1)} \otimes t_{(2)}$. Montrons que Δ' coincide avec la co-opération Δ construite en 2.3. On rappelle que $t \vee s = t \succ Y \prec s$ où Y est le générateur de $Dend(K)$. On a

$$\begin{aligned}\Delta(t \vee s) &= \Delta(t \succ Y \prec s) = \Delta(t) \succ \Delta(Y) \prec \Delta(s)\\ &= (t_{(1)} \otimes t_{(2)}) \succ (1 \otimes Y + Y \otimes 1) \prec (s_{(1)} \otimes s_{(2)})\\ &= (t_{(1)} * 1 * s_{(1)}) \otimes (t_{(2)} \succ Y \prec s_{(2)}) + (t_{(1)} * Y * s_{(1)}) \otimes (t_{(2)} \succ 1 \prec s_{(2)})\\ &= (t_{(1)} * s_{(1)}) \otimes (t_{(2)} \vee s_{(2)}) + t \vee s \otimes 1.\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\Delta = \Delta'$. En application on obtient une démonstration plus simple de la co-associativité de Δ'.

Le coproduit des algèbres dendriformes joue un rôle crucial dans le travail de M. Ronco sur une généralisation du théorème de Milnor-Moore (*cf.* [**R1**] et [**R2**]).

Une construction différente du produit et du coproduit sur les arbres planaires binaires a été donnée par Brouder et Frabetti dans [**BF**]. Le fait que ces deux algèbres sont isomorphes a été démontré par Holtkamp [**H**] et indépendamment par Foissy [**Fo**] (voir aussi [**AS**]). On trouvera dans [**A**], [**C**] et [**E**] des liens entre les algèbres dendriformes et d'autres types de structure algébrique.

2.6. Algèbres diptères. — Par définition (*cf.* [**LR2**]) les *algèbres diptères* ont deux opérations génératrices $*$ et $\succ$ vérifiant les relations

(as) $$(x * y) * z = x * (y * z)$$

(dipt) $$(x * y) \succ z = x \succ (y \succ z)$$

Il est clair que l'on peut aussi les définir par les opérations $\prec$ et $\succ$ (via la formule (0)) et les relations (R1)+(R2) et (R3).

L'avantage de la première présentation est qu'elle a un sens aussi sur les ensembles. Dans [**LR2**] on a montré que l'algèbre diptère libre sur un générateur notée $Dipt(K)$ a pour base linéaire deux copies des arbres planaires, ses composantes homogènes ont donc pour dimension

$$(1, 2, 6, 22, 90, \ldots, 2C_{n-1}, \ldots)$$

où C_n est le super-nombre de Catalan (nombre d'arbres planaires à $n+1$ feuilles). La méthode exposée ci-dessus nous a permis de construire facilement la structure d'algèbre de Hopf. Cette structure joue un rôle-clé dans la démonstration du résultat principal de [**LR2**] qui est une généralisation du théorème de Milnor-Moore au cas non-cocommutatif.

2.7. Digèbres sans nom. — Les opérations génératrices sont $\prec$ et $\succ$ et les relations sont (R1)+(R3) et (R2). On peut aussi, évidemment remplacer (R1) + (R3) par l'associativité de $*$. On trouve une structure différente de la précédente bien que l'algèbre libre sur un générateur ait les mêmes dimensions.

2.8. Digèbres associatives admissibles. — Les opérations génératrices sont $\prec$ et $\succ$ et la relation est (R1)+(R2)+(R3), c'est-à-dire l'associativité de $*$. L'algèbre libre sur un générateur a une base formée des « arbres binaires hybrides » (*cf.* [**Pa**]). En effet, si on admet que 2 est inversible, on peut changer de base d'opérations génératrices, et prendre $*$ et $\cdot$ définies par $x \cdot y := x \prec y - x \succ y$. On trouve pour dimensions de l'objet libre sur un générateur

$$(1, 2, 7, 31, 154, \dots)$$

En fait la série génératrice (*cf.* 3.1) est l'inverse pour la composition de la série $f(x) = -1 + x^2 + \frac{1}{1+x}$.

On observe que l'opération $\{x,y\} := x \prec y - y \succ x$ munit l'espace sous-jacent d'une structure d'*algèbre de Lie admissible* (*cf.* [**Re**]) car l'antisymétrisé de $\{-,-\}$ est

$$\{x,y\} - \{y,x\} = x \prec y - y \succ x - y \prec x + x \succ y = x * y - y * x = [x,y].$$

3. Opérades et algèbres de Hopf

Dans la première partie (paragraphes 1 et 2) on s'est restreint volontairement à des types particuliers d'algèbres : deux opérations génératrices binaires et des relations non-symétriques (voir ci-dessous) avec scindement d'associativité. Par la même méthode on peut étendre le théorème 2.3 à d'autres types d'algèbres ayant par exemple plusieurs opérations génératrices et/ou des relations plus générales. Afin de traiter le cas plus général il est pratique (voire nécessaire) de se placer dans le cadre des opérades algébriques. On rappelle très brièvement les rudiments de cette théorie en 3.1.

3.1. Opérades algébriques. — Soit $\mathcal{P}$ un type d'algèbres et $\mathcal{P}(V)$ la $\mathcal{P}$-algèbre libre sur l'espace vectoriel V. On suppose que $\mathcal{P}(V)$ est de la forme $\mathcal{P}(V) = \oplus_{n\geqslant 1}\mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} V^{\otimes n}$ où les $\mathcal{P}(n)$ sont des S_n-modules à droite. Le groupe symétrique S_n opère à gauche sur $V^{\otimes n}$ par permutation des variables. On considère $\mathcal{P}$ comme un endofoncteur de la catégorie des espaces vectoriels. La structure de $\mathcal{P}$-algèbre libre de $\mathcal{P}(V)$ fournit une transformation de foncteurs $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ainsi que $u : \mathrm{Id} \to \mathcal{P}$ vérifiant les axiomes d'associativité et d'unitalité usuels. Cette donnée $(\mathcal{P}, \gamma, u)$ est appelée une *opérade algébrique.* Une $\mathcal{P}$-algèbre est alors la donnée d'un espace vectoriel A et d'une application linéaire $\gamma_A : \mathcal{P}(A) \to A$ telle que $\gamma_A \circ \gamma(A) = \gamma_A \circ \mathcal{P}(\gamma_A)$ et $\gamma_A \circ u(A) = \mathrm{Id}_A$.

L'espace $\mathcal{P}(n)$ est l'espace des opérations n-aires pour les $\mathcal{P}$-algèbres. On supposera ici qu'il n'y a qu'une (à homothétie près) opération unaire, à savoir l'identité : $\mathcal{P}(1) = K \cdot \mathrm{Id}$.

On supposera aussi que toutes les opérations sont engendrées (par composition) par des opérations binaires, c'est-à-dire une famille de générateurs linéaires de $\mathcal{P}(2)$. On dira alors que l'opérade est *binaire*. Si les relations entre opérations sont conséquences de relations ne faisant intervenir que des monômes à 2 opérations, on dira que l'opérade est *quadratique*.

Si les opérations binaires n'ont pas de symétrie et que dans les relations, les variables x, y et z apparaissent toujours dans le même ordre, on dira alors que l'opérade est *régulière*. L'espace $\mathcal{P}(n)$ est alors de la forme $\mathcal{P}_n \otimes K[S_n]$ où $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel et, en tant que S_n-module, $\mathcal{P}(n)$ est une somme de représentations régulières. La famille des $\mathcal{P}_n$ munie de la composition est appelée une opérade non-symétrique. Dans ce cas l'algèbre libre, et donc l'opérade régulière, sont entièrement déterminées par l'algèbre libre sur un générateur $\mathcal{P}(K) = \oplus_{n\geqslant 1}\mathcal{P}_n$.

On dira qu'il y a *scindement d'associativité* si $\mathcal{P}(2)$ contient une opération, notée $(x, y) \mapsto x * y$, qui est associative. Dans ce cas on peut toujours trouver une base de l'espace $\mathcal{P}(2)$ telle que la somme des vecteurs de base soit l'opération $*$. Les exemples des paragraphes 1 et 2 sont des opérades binaires quadratiques régulières avec scindement d'associativité.

La *série génératrice* de l'opérade $\mathcal{P}$ est la fonction

$$f^{\mathcal{P}}(x) := \sum (-1)^n \frac{\dim \mathcal{P}(n)}{n!} x^n.$$

Si l'opérade est régulière on a $f^{\mathcal{P}}(x) := \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \dim \mathcal{P}_n x^n$. Dans les exemples de ce papier c'est la série $(\dim \mathcal{P}_n)_{n\geqslant 1}$ que l'on donne.

Les opérades les plus intéressantes sont celles qui sont « de Koszul ». Une condition nécessaire pour la Koszulité est que l'inverse, pour la composition, de la série génératrice soit aussi une série à coefficients entiers alternés.

3.2. Actions de l'unité, compatibilité et cohérence. — Soit $\mathcal{P}$ une opérade binaire quadratique. Par *action de l'unité* on entend le choix de deux applications linéaires

$$\alpha : \mathcal{P}(2) \longrightarrow \mathcal{P}(1) = K, \qquad \beta : \mathcal{P}(2) \longrightarrow \mathcal{P}(1) = K,$$

qui permettent de donner un sens à $a \circ 1$ et $1 \circ a$ respectivement pour toute opération $\circ \in \mathcal{P}(2)$ et tout $a \in A$ où A est une $\mathcal{P}$-algèbre :

$$a \circ 1 = \alpha(\circ)(a), \qquad 1 \circ a = \beta(\circ)(a).$$

Lorsque l'opérade $\mathcal{P}$ est avec scindement d'associativité on suppose que l'on fait le choix $a * 1 = a = 1 * a$ pour $*$, c'est-à-dire $\alpha(*) = \mathrm{Id} = \beta(*)$.

On dira que le choix d'action de l'unité est *compatible* avec les relations de $\mathcal{P}$ si les relations sont encore valables sur $A_+ := K \cdot 1 \oplus A$ pour autant que les termes soient définis.

Considérons l'espace $A \otimes K \cdot 1 \oplus K \cdot 1 \otimes B \oplus A \otimes B$ où A et B sont des $\mathcal{P}$-algèbres. En utilisant le choix d'action de l'unité on étend les opérations binaires $\circ \in \mathcal{P}(2)$ à cet espace en posant, comme en 2.1 :

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \circ (a' \otimes b') &:= (a * a') \otimes (b \circ b') \quad \text{si } b \in B \text{ ou } b' \in B,\\ (a \otimes 1) \circ (a' \otimes 1) &:= (a \circ a') \otimes 1 \quad \text{sinon.}\end{aligned}$$

On dira que le choix d'action de l'unité est *cohérent* avec les relations de $\mathcal{P}$ si $A \otimes K \cdot 1 \oplus K \cdot 1 \otimes B \oplus A \otimes B$ muni de ces opérations est une $\mathcal{P}$-algèbre.

Observons qu'une condition nécessaire pour la cohérence est la compatibilité. Dans certains cas, compatibilité entraîne cohérence (*cf.* Proposition 1.4) mais ce n'est pas toujours vrai.

Si C_+ est une autre $\mathcal{P}$-algèbre augmentée, on vérifie que $(A_+ \otimes B_+) \otimes C_+$ et $A_+ \otimes (B_+ \otimes C_+)$ ont la même structure de $\mathcal{P}$-algèbre augmentée.

3.3. Théorème. — *Soit $\mathcal{P}$ une opérade binaire quadratique non symétrique. Toute action de l'unité cohérente avec les relations de $\mathcal{P}$ permet de munir la $\mathcal{P}$-algèbre libre augmentée $\mathcal{P}(V)_+$ d'une co-opération co-associative (i.e. un coproduit)*

$$\Delta : \mathcal{P}(V)_+ \longrightarrow \mathcal{P}(V)_+ \otimes \mathcal{P}(V)_+$$

qui est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres augmentées.

En particulier s'il y a scindement d'associativité, $\mathcal{P}(V)_+$ est une algèbre de Hopf connexe.

Démonstration. — L'action de l'unité permet, grâce à l'hypothèse de cohérence, de munir $\mathcal{P}(V)_+ \otimes \mathcal{P}(V)_+$ d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre augmentée. Le coproduit Δ est l'unique morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres augmentées qui étend l'application linéaire $v \mapsto 1 \otimes v + v \otimes 1$. Le reste de la démonstration est le même que pour le théorème 2.3. $\square$

Remarque. — Sous l'hypothèse « régulière » la première formule de 2.1 munit $A \otimes B$ d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre. Sans cette hypothèse, ce n'est plus automatique, mais il arrive encore parfois que ce soit vrai. Dans ce cas le théorème 3.3 est encore valable (*cf.* exemple 4.1).

3.4. Convolution opéradique. — Soit $\mathcal{P}$ une opérade binaire quadratique régulière munie d'une action cohérente de l'unité. On va montrer que, comme dans le cas associatif on peut munir l'espace des endomorphismes de la $\mathcal{P}$-algèbre libre de produits de convolution.

3.5. Proposition. — *Pour tout espace vectoriel V l'espace* $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{P}(V)_+, \mathcal{P}(V)_+)$ *est muni d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre unitaire.*

Démonstration. — Soit $\mu \in \mathcal{P}(2)$ une opération génératrice. Pour tout couple d'applications linéaires $f, g : \mathcal{P}(V)_+ \to \mathcal{P}(V)_+$ on définit $\overline{\mu}(f,g) : \mathcal{P}(V)_+ \to \mathcal{P}(V)_+$ par la formule suivante :

$$\overline{\mu}(f,g) := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

Il est immédiat de vérifier que les relations satisfaites par les opérations génératrices μ de l'opérade $\mathcal{P}$ sont aussi satisfaites par les opérations $\overline{\mu}$. Donc $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{P}(V)_+, \mathcal{P}(V)_+)$ est une $\mathcal{P}$-algèbre unitaire. □

3.6. Remarque. — Dans le cas des algèbres associatives, *i.e.* $\mathcal{P} = \mathbf{As}$ et $\mu = *$, l'opération $\overline{\mu}$ est la convolution classique.

4. Exemples

4.1. Algèbres de Zinbiel. — Supposons donnée une seule opération $\succ$. On choisit pour action de 1 les formules suivantes :

$$1 \succ x = x, \qquad x \succ 1 = 0.$$

On montre, comme dans la proposition 1.4, que l'unique relation possible pour avoir cohérence est

$$(x \succ y + y \succ x) \succ z = x \succ (y \succ z).$$

Les algèbres définies par $\succ$ et cette relation sont les *algèbres de Zinbiel* (*cf.* [**L1**]), qui sont duales, au sens opéradique, des algèbres de Leibniz. On constate que l'opération $*$ définie par $x * y = x \succ y + y \succ x$ est associative. On peut montrer (*cf.* loc.cit.) que l'algèbre de Zinbiel libre augmentée est l'algèbre des shuffles $T^{sh}(V)$ (*i.e.* $T(V)$ en tant qu'espace vectoriel, mais avec le produit shuffle). La structure d'algèbre de Hopf donnée par notre méthode n'est rien d'autre que la structure connue : Δ est la déconcaténation. La preuve consiste à identifier $x_1x_2x_3 \ldots x_n$ à $(\ldots((x_1 \succ x_2) \succ x_3) \ldots x_n)$ et raisonner par récurrence.

4.2. Algèbres pré-dendriformes. — Par définition une *algèbre pré-dendriforme* a 3 opérations $\prec, \succ, *$ qui satisfont à 4 relations :

(R0) $$(x * y) * z = x * (y * z),$$

(R1) $$(x \prec y) \prec z = x \prec (y * z),$$

(R2) $$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$

(R3) $$(x * y) \succ z = x \succ (y \succ z).$$

L'opérade associée est donc binaire quadratique régulière avec scindement d'associativité. On obtient les algèbres dendriformes comme quotient en introduisant la relation de symétrie

$$x * y = x \prec y + x \succ y,$$

car sous cette condition la relation (R0) devient égale à (R1)+(R2)+(R3).

L'opérade des algèbres prédendriformes a pour dimension des parties homogènes

$$(1, 3, 14, 80, 510, \dots),$$

dont la série génératrice alternée est l'inverse pour la composition de

$$-x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots = -1 - x + \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Si on prend les mêmes conventions que dans le paragraphe 1, à savoir

$$1 \prec a = 0,\ 1 \succ a = a,\ a \prec 1 = a,\ a \succ 1 = 0,\ 1 * a = a = a * 1,$$

on constate immédiatement que les quatre relations (R0) à (R3) sont compatibles. En fait ce choix est même cohérent avec les relations et donc l'algèbre pré-dendriforme libre augmentée, $\mathit{preDend}(V)_+$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf par le théorème 3.3.

La version cogèbre des relations ci-dessus joue un rôle primordial dans le travail de P. Leroux [**Le1, Le2**].

***4.3. Remarque* (due à F. Lamarche)**. — Les formules (R0) à (R3) se rencontrent dans le contexte des foncteurs adjoints de la manière suivante. Soit $(\mathcal{C}, *, I)$ une catégorie monoïdale de produit associatif $*$ et d'unité I. Supposons que, pour tout objet C de $\mathcal{C}$, le foncteur $C * - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ait un adjoint à droite, que l'on note $- \prec C$, et que le foncteur $- * C : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ait aussi un adjoint à droite que l'on note $C \succ -$. On a donc :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C * A, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X \prec C), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A * C, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C \succ X).$$

Alors, en évaluant de plusieurs manières l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A * B * C, X)$, on trouve précisément les relations (R1), (R2) et (R3). Par exemple on a d'une part

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A * B * C, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, (B * C) \succ X)$$

et d'autre part

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A * B * C, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A * B, C \succ X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \succ (C \succ X)),$$

ce qui donne la relation (R3).

4.4. Trigèbres dendriformes [LR3]. — On se donne trois opérations $\prec, \succ$ et $\cdot$ et sept relations :

$$\begin{cases} (x \prec y) \prec z = x \prec (y * z), \\ (x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z), \\ (x * y) \succ z = x \succ (y \succ z), \end{cases} \qquad \begin{cases} (x \succ y) \cdot z = x \succ (y \cdot z), \\ (x \prec y) \cdot z = x \cdot (y \succ z), \\ (x \cdot y) \prec z = x \cdot (y \prec z), \end{cases}$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$

où $x * y := x \prec y + x \succ y + x \cdot y$.

L'opérade des trigèbres dendriformes, notée *Tridend*, est binaire, quadratique, régulière, avec scindement d'associativité.

On étend ces opérations à l'unité par les choix suivants

$$1 \prec a = 0,\ 1 \succ a = a,\ a \prec 1 = a,\ a \succ 1 = 0,\ 1 \cdot a = 0 = a \cdot 1.$$

Il s'ensuit que l'on a bien $1 * a = a = a * 1$.

On peut montrer que ces choix sont cohérents avec les relations. Ainsi la trigèbre dendriforme libre unitaire $\mathit{Tridend}(V)_+$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf. Rappelons que $\mathit{Tridend}(V)$ se décrit explicitement à l'aide des arbres planaires (*cf.* [**LR3**]). La dimension de ses parties homogènes est donc donnée par le super-nombre de Catalan C_n :

$$(1, 3, 11, 45, 197, \ldots, C_{n-1}, \ldots).$$

On peut expliciter Δ sur les arbres planaires comme en 2.5 en utilisant les formules

$$x^0 \vee \cdots \vee x^k = (x^0 \vee \cdots \vee x^{k-1}) \cdot (Y \prec x^k),\ \text{si } k > 1 \text{ ou } k = 1 \text{ et } x^0 \neq |,$$
$$| \vee x = Y \prec x.$$

On constate que les éléments qui s'écrivent $\omega \cdot \theta$ avec ω et θ éléments primitifs de $\mathcal{P}(V)$ sont aussi des éléments primitifs.

4.5. Algèbres 2-associatives [LR2] [Pi]. — On se donne 2 opérations associatives $*$ et $\cdot$ et pas d'autres relations. L'opérade des algèbres 2-associatives, notée $2as$, est binaire, quadratique, régulière. L'algèbre libre sur un générateur est, comme pour les algèbres diptères, de dimension $2C_{n-1}$ en dimension $n \geqslant 2$. Ici on va modifier quelque peu notre construction de Δ. On fait le choix d'actions de 1 suivant : $1 * a = a = a * 1$ et $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ et on met sur le produit tensoriel de deux algèbres les produits diagonaux classiques. Il y a alors une et une seule co-opération unitaire

$$\Delta : 2as(V)_+ \longrightarrow 2as(V)_+ \otimes 2as(V)_+$$

qui vérifie

$$\begin{cases} \Delta(x * y) = \Delta(x) * \Delta(y), \\ \Delta(x \cdot y) = (x \otimes 1) \cdot \Delta(y) + \Delta(x) \cdot (1 \otimes y) - x \otimes y, \end{cases}$$

et $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$ pour $v \in V$. On vérifie que cette co-opération est co-associative, co-unitaire, et est un morphisme pour $*$, donc $(2as(V), *, \Delta)$ est une algèbre de Hopf. Sa partie primitive est étudiée dans [**LR2**].

La relation satisfaite entre la co-opération Δ et l'opération $\cdot$ est appelée *relation de Hopf infinitésimale unitaire*. La situation typique est le cas du module tensoriel $T(V)$ équipé de $\cdot$ = concaténation et de Δ = déconcaténation.

Il y a de nombreux exemples intéressants de quotient de cette opérade, c'est-à-dire des opérades obtenues en rajoutant des relations. Par exemple si on rajoute la relation

$$(x * y) \cdot z = x * (y \cdot z),$$

on obtient une opérade très similaire à l'opérade des algèbres dendriformes. En fait ces deux opérades sont reliées par une homotopie. Donc l'algèbre libre sur un générateur est aussi indexée par les arbres binaires planaires (*cf.* [**Pi**]). Cette opérade est binaire, quadratique, régulière. On obtient une structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre libre.

4.6. Quadrigèbres [**AL**]. — On se donne 4 opérations $\searrow$, $\nearrow$, $\nwarrow$ et $\swarrow$ et on note

$$x \succ y := x \nearrow y + x \searrow y,$$
$$x \prec y := x \nwarrow y + x \swarrow y,$$
$$x \vee y := x \searrow y + x \swarrow y,$$
$$x \wedge y := x \nearrow y + x \nwarrow y.$$

ainsi que

$$x * y := x \searrow y + x \nearrow y + x \nwarrow y + x \swarrow y, = x \succ y + x \prec y = x \vee y + x \wedge y.$$

Puis on se donne 9 relations :

$$\begin{array}{lll} (x \nwarrow y) \nwarrow z = x \nwarrow (y * z), & (x \nearrow y) \nwarrow z = x \nearrow (y \prec z), & (x \wedge y) \nearrow z = x \nearrow (y \succ z), \\ (x \swarrow y) \nwarrow z = x \swarrow (y \wedge z), & (x \searrow y) \nwarrow z = x \searrow (y \nwarrow z), & (x \vee y) \nearrow z = x \searrow (y \nearrow z), \\ (x \prec y) \swarrow z = x \swarrow (y \vee z), & (x \succ y) \swarrow z = x \searrow (y \swarrow z), & (x * y) \searrow z = x \searrow (y \searrow z). \end{array}$$

L'opérade des quadrigèbres, notée $\mathcal{Q}$, est binaire, quadratique et régulière. On conjecture que sa série génératrice est l'inverse de la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n n^2 x^n = \frac{x(-1+x)}{(1+x)^3}$ pour la composition, ce qui donnerait pour dimensions des composantes homogènes de la quadrigèbre libre sur un générateur :

$$(1, 4, 23, 156, 1162, \ldots)$$

On étend les quatre produits à l'unité avec les choix suivants :

$$a \nwarrow 1 = a, \quad 1 \searrow a = a$$

et tous les autres produits avec 1 sont nuls. Ainsi on a

$$a \prec 1 = a,\ 1 \succ a = a,\ a \wedge 1 = a,\ 1 \vee a = a,\ a * 1 = a = 1 * a,$$

et les autres produits nuls. On vérifie immédiatement que les 9 relations sont compatibles avec ces choix. On peut montrer qu'elles sont même cohérentes et on en déduit que l'algèbre libre augmentée $\mathcal{Q}(V)_+$ est une algèbre de Hopf.

Lorsque les 4 opérations génératrices satisfont aux propriétés de symétrie

$$x \nwarrow y = y \searrow x, \quad x \swarrow y = y \nearrow x,$$

on dit que les quadrigèbres sont *commutatives*. Nos choix sont compatibles avec ces relations de symétrie car $a \nwarrow 1 = a = 1 \searrow a$ et tous les autres termes contenant 1 sont nuls. On a donc une structure d'algèbre de Hopf sur la quadrigèbre commutative libre augmentée.

4.7. Algèbres magmatiques [**GH**]. — Donnons-nous une opération binaire, notée $(x, y) \mapsto x \cdot y$, sans aucune relation. L'algèbre libre sur un générateur admet évidemment les arbres binaires planaires pour base linéaire. Elle a donc pour dimensions (*cf.* 2.5) :

$$(1, 1, 2, 5, 14, \ldots, c_{n-1}, \ldots).$$

Ce cas est un peu différent des précédents puisqu'on n'a plus de scindement d'associativité. Prenons le choix d'action de l'unité usuel : $1 \cdot a = a = a \cdot 1$. On vérifie immédiatement que les conditions de cohérence sont vérifiées et on peut appliquer le théorème 3.3. L'intérêt de ce cas réside dans la nature des éléments primitifs définis par le coproduit (voir paragraphe suivant).

Une variante de l'opérade magmatique est l'opérade *magmatique commutative* où l'on suppose de plus que $a \cdot b = b \cdot a$ pour tous éléments a et b. On a encore cohérence dans ce cas.

Un autre quotient intéressant de l'opérade magmatique est l'opérade des algèbres pre-Lie (*cf.* [**CL**]), qui sont caractérisées par la relation :

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot y - x \cdot (z \cdot y).$$

La cohérence est valide dans ce cas bien que l'opérade ne soit pas régulière.

4.8. Opérades ensemblistes et arithmétique. — Lorsque l'opérade algébrique provient d'une opérade ensembliste, c'est-à-dire bien définie sur la catégorie des ensembles, on peut construire une arithmétique sur l'objet ensembliste libre. Observons que plusieurs des opérades présentées dans les sections précédentes sont ensemblistes (algèbres diptères, algèbres pré-dendriformes, algèbres 2-associatives, algèbres magmatiques). On se sert de l'opération associative pour construire l'addition, et de la composition dans l'algèbre libre pour construire la multiplication. Pour l'opérade *As* c'est tout simplement l'arithmétique sur $\mathbb{N}$. Pour l'opérade magmatique (*cf.* 4.7) c'est l'arithmétique sur les arbres planaires binaires évoquée dans [**B**]. Même quand l'opérade n'est pas ensembliste on peut parfois construire une arithmétique grâce à un bon choix de base linéaire de l'algèbre libre. C'est ce qui est fait dans [**L3**] pour les digèbres dendriformes et les trigèbres dendriformes.

5. L'opérade des primitifs

Soit $\mathcal{P}$ une opérade binaire quadratique pour laquelle, après avoir fait un choix d'action de l'unité, on a réussi à construire une co-opération co-associative sur l'algèbre libre augmentée :

$$\Delta : \mathcal{P}(V)_+ \longrightarrow \mathcal{P}(V)_+ \otimes \mathcal{P}(V)_+$$

On peut alors définir l'espace des éléments primitifs par

$$\operatorname{Prim} \mathcal{P}(V) = \{x \in \mathcal{P}(V) | \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\}.$$

Lorsque Δ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres augmentées, on peut montrer que la composition d'éléments primitifs est encore un élément primitif. Donc $\operatorname{Prim} \mathcal{P}(V)$ est l'algèbre libre d'un certaine opérade $\operatorname{Prim} \mathcal{P}$.

Le jeu consiste maintenant à trouver quelle est cette opérade dans les cas qui nous intéressent. L'outil principal est l'*idempotent Eulérien* dans le cas cocommutatif et l'*idempotent de Ronco* dans le cas non-cocommutatif (*cf.* [**R1**] et [**R2**]). Voici quelques réponses :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Prim} As &= Lie \\
\operatorname{Prim} Com &= Vect \\
\operatorname{Prim} Dend &= \text{opérade des algèbres braces, } cf. \text{ [}\mathbf{R1}\text{]}, \\
\operatorname{Prim} Dipt &= \text{opérade des } B_\infty\text{-algèbres, } cf. \text{ [}\mathbf{LR2}\text{]}, \\
\operatorname{Prim} 2as &= \text{opérade des } B_\infty\text{-algèbres, } cf. \text{ [}\mathbf{LR2}\text{]}.
\end{aligned}$$

Dans le cas des algèbres magmatiques (*cf.* 4.7), les premiers calculs ont été faits par Gerritzen et Holtkamp [**GH**]. L'opérade $\operatorname{Prim} Mag$ dont l'algèbre libre est la partie primitive de l'algèbre magmatique libre possède au moins une opération binaire antisymétrique, notons la $[-,-]$, et une opération ternaire, notons-la $as(-,-,-)$ car si x, y et z sont primitifs, alors il en est de même de $[x,y] := x\cdot y - y\cdot x$ et de $as(x,y,z) := (x\cdot y)\cdot z - x\cdot(y\cdot z)$. Ces deux opérations génératrices sont liées par la relation

$$\begin{aligned}
as(x,y,z) + as(y,z,x) + as(z,x,y) - as(x,z,y) - as(y,x,z) - as(z,y,x)& \\
= [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]&
\end{aligned}$$

qu'on pourrait appeler la *relation de Jacobi non-associative*. Mais il est montré dans [**GH**] que ce n'est pas suffisant, et qu'il y a d'autres générateurs, par exemple l'élément de l'algèbre magmatique libre

$$as(x,y,z\cdot t) - z\cdot as(x,y,t) - as(x,y,z)\cdot t$$

est primitif, mais n'est pas engendré par les opérations crochet et associateur.

Références

[A] M. Aguiar – « Pre-Poisson algebras », *Letter Math. Phys.* **54** (2000), p. 263–277.

[AL] M. Aguiar & J.-L. Loday – « Quadri-algebras », *J. Pure Appl. Algebra* **191** (2004), p. 205–221.

[AS] M. Aguiar & F. Sottile – « The Structure of the Loday-Ronco Hopf algebra of trees », preprint, 2004.

[B] V. Blondel – « Une famille d'opérations sur les arbres binaires », *C. R. Acad. Sci. Paris* **321** (1995), p. 491–494.

[BF] C. Brouder & A. Frabetti – « QED Hopf algebras on planar binary trees », *J. Algebra* (2003), p. 298–322.

[C] F. Chapoton – « Construction de certaines opérades et bigèbres associées aux polytopes de Stasheff et hypercubes », *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), p. 63–74.

[CL] F. Chapoton & M. Livernet – « Pre-Lie algebras and the rooted trees operad », *Intern. Math. Res. Not.* **8** (2001), p. 395–408.

[E] K. Ebrahimi-Fard – « Loday-type algebras and the Rota-Baxter relations », *Letter Math. Phys.* **61** (2002), p. 139–147.

[Fo] L. Foissy – « Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés. II », *Bull. Sci. Math.* **126** (2002), p. 249–288.

[Fr] B. Fresse – « Cogroups in algebras over an operad are free algebras », *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), no. 4, p. 637–676.

[GH] L. Gerritzen & R. Holtkamp – « Hopf co-addition for free magma algebras and the non-associative Hausdorff series », *J. of Algebra* **265** (2003), p. 264–284.

[H] R. Holtkamp – « Comparison of Hopf algebras on trees », *Arch. Math. (Basel)* **80** (2003), p. 368–383.

[Leray] J. Leray – « Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations », *J. Math. Pures Appl.* **24** (1945), p. 95–167.

[Le1] P. Leroux – « Coassociativity breaking and oriented graphs », preprint, ArXiv : `math.QA/0204342`, 2002.

[Le2] ———, « From entangled codipterous coalgebras to coassociative manifolds », preprint, ArXiv : `math.QA/0301080`, 2003.

[L1] J.-L. Loday – « Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras », *Math. Scand.* **77** (1995), no. 2, p. 189–196.

[L2] ———, « Dialgebras », in *Dialgebras and related operads*, Lecture Notes Math., vol. 1763, Springer, Berlin, 2001, p. 7–66.

[L3] ———, « Arithmetree », *J. of Algebra* **258** (2002), no. 1, p. 275–309.

[LR1] J.-L. Loday & M. Ronco – « Hopf algebra of the planar binary trees », *Adv. Math.* **139** (1998), p. 293–309.

[LR2] ———, « Algèbres de Hopf colibres », *C. R. Acad. Sci. Paris* **337** (2003), p. 153–158.

[LR3] ———, « Trialgebras and families of polytopes », *Contemp. Math.* **346** (2004), p. 369–398.

[MM] J. W. Milnor & J. C. Moore – « On the structure of Hopf algebras », *Ann. of Math.* **81** (1965), p. 211–264.

[O] J.-M. Oudom – « Théorème de Leray dans la catégorie des algèbres sur une opérade », *C. R. Acad. Sci. Paris* **329** (1999), p. 101–106.

[Pa] J. M. Pallo – « On the listing and random generation of hybrid binary trees », *Intern. J. Computer Math.* **50** (1994), p. 135–145.

[Pi] T. Pirashvili – « Sets with two associative operations », *Cent. Eur. J. Math.* **2** (2003), p. 169–183.

[Re] E. Remm – « Opérades Lie-admissibles », *C. R. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), p. 1047–1050.

[R1] M. Ronco – « Primitive elements in a free dendriform algebra », in *New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999)*, Contemp. Math., vol. 267, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, p. 245–263.

[R2] ———, « Eulerian idempotents and Milnor-Moore theorem for certain non-cocommutative hopf algebras », *J. Algebra* **254** (2002), no. 1, p. 152–172.

J.-L. Loday, Institut de Recherche Mathématique Avancée, CNRS et Université Louis Pasteur, 7 rue R. Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex France • *E-mail :* `loday@math.u-strasbg.fr`
Url : `www-irma.u-strasbg.fr/~loday/`