Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 512.54

ШИРИНА СТЕПЕНИ СВОБОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ СТУПЕНИ ДВА

Е. Г. Смирнова

Аннотация: Вычислена ширина произвольной степени N_{n2}^t свободной нильпотентной группы N_{n2} конечного ранга $n \geq 2$ ступени 2. Доказано, что для четного t она равна $2[n/2]+1$, а для нечетного t равна 1. Библиогр. 16.

Введение

Пусть G — произвольная группа, wG — ее вербальная подгруппа, определенная словом w. *Шириной* $\mathrm{wid}(g, w)$ *элемента* $g \in wG$ *относительно слова* w назовем наименьшее число l такое, что g представим как произведение l значений слов $w^{\pm 1}$ в группе G. Определим ширину произвольного подмножества $M \subseteq wG$ как $\mathrm{wid}(M, w) = \max\limits_{g \in M} \mathrm{wid}(g, w)$. Заметим, что $\mathrm{wid}(M, w)$ может быть бесконечной. Понятие ширины вербальной подгруппы wG идет от Ф. Холла. Термин «ширина», как и приведенное выше обозначение, ввел Ю. И. Мерзляков в [1] (см. также [2, § 12]). Зарубежные авторы используют также термины «эллиптическая» для вербальных подгрупп конечной ширины и «параболическая» для вербальных подгрупп бесконечной ширины.

Через N_{nk} будем обозначать свободную нильпотентную группу ранга n ступени k, а через M_n — свободную метабелеву группу ранга n. Пусть $\mathscr{A}$ обозначает многообразие всех абелевых групп, $\mathscr{N}_k$ — многообразие всех нильпотентных групп ступени не больше чем k, $\mathscr{P}$ — класс всех полициклических групп и $\mathscr{F}$ — класс всех конечных групп. Через $\mathscr{C}\mathscr{D}$ обозначим произведение классов групп $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, т. е. класс всех групп, являющихся расширениями групп из класса $\mathscr{C}$ с помощью групп из класса $\mathscr{D}$, через (x, y) — коммутатор $x^{-1}y^{-1}xy$.

Приведем основные известные результаты о ширине вербальных подгрупп.

1. *Ширина* $\mathrm{wid}(M_n', (x, y))$ *коммутанта свободной метабелевой группы конечного ранга* n *конечна, а бесконечного ранга бесконечна.*

Первое утверждение фактически доказано А. И. Мальцевым в [3], второе следует из результатов работ [4–6].

2. *Ширина произвольной вербальной подгруппы* wG *алгебраической группы матриц* G *конечна.*

Это теорема Ю. И. Мерзлякова [1] (см. также [2]).

3. *Если* $G \in \mathscr{A}\mathscr{N}_k$ *— конечно порожденная группа, то любая ее вербальная подгруппа* wG *имеет конечную ширину.*

Этот результат принадлежит Строуду — ученику Ф. Холла, погибшему вскоре после защиты диссертации [7], в которой есть его доказательство. Оно

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–00932).

© 2000 Смирнова Е. Г.

известно специалистам. Основным утверждением в нем является теорема (ее можно найти в [8]), согласно которой некоторый член нижнего центрального ряда группы G пересекается с ее центром по единице. Автора познакомил с теоремой Строуда профессор В. А. Романьков.

4. *Если $G \in \mathscr{A}\mathscr{C}$ — конечно порожденная разрешимая группа, где $\mathscr{C}$ — класс, в котором каждая конечно порожденная группа удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп, то ее коммутант G' имеет конечную ширину относительно слова (x, y).*

По известной теореме Ф. Холла конечно порожденные группы из произведения $\mathscr{A}\mathscr{P}$ удовлетворяют условию максимальности для нормальных подгрупп, поэтому приведенное утверждение, в частности, верно для $\mathscr{A}\mathscr{A}\mathscr{P}$-групп.

Это теорема Ремтуллы [9].

5. *Если $G \in \mathscr{P}$ или $G \in \mathscr{N}_k\mathscr{F}$ — конечно порожденная группа, то любая ее вербальная подгруппа wG имеет конечную ширину.*

Это теорема В. А. Романькова [10], в частном случае внешнекоммутаторного слова w и полициклической группы G она доказана в [11].

6. *Любая нетривиальная собственная вербальная подгруппа wG свободного произведения групп $G = A * B$, $|A| \geq 3$, $|B| \geq 2$, имеет бесконечную ширину.*

Это хорошо известный результат Ремтуллы [12]. Аналогичные утверждения получены для некоторых HNN-расширений В. Г. Бардаковым [13].

Приведенный список результатов далеко не полон. Данная работа, впрочем, направлена не на доказательство конечности или бесконечности ширины вербальной подгруппы, а на ее точное вычисление. Работ, в которых ширина точно вычисляется или оценивается, не так много. Отметим некоторые из них.

7. *При $n \geq 2$*

$$\operatorname{wid}\big(N'_{n2}, (x, y)\big) = [n/2];$$

при $k \geq 3$

$$\operatorname{wid}\big(N'_{nk}, (x, y)\big) = n.$$

Результат доказан Х. С. Алламбергеновым и В. А. Романьковым в [4] (см. также [5]). Отсюда, кстати, вытекает, что ширина коммутанта свободной нильпотентной группы бесконечного ранга бесконечна. К сожалению, в работе [4] не разобран случай $n = 2$, $k = 3$, закрытый в работе [14].

8. *При $n \geq 2$*

$$\operatorname{wid}\big(M'_n, (x, y)\big) = n.$$

Это теорема анонсирована Х. С. Алламбергеновым [15] и полностью им доказана в его кандидатской диссертации. Она следует из результатов работы [14]. В работе [6] было только замечено, что $[n/2] \leq \operatorname{wid}(M'_n, (x, y)) \leq n$.

Настоящая работа посвящена вычислению ширины степени свободной нильпотентной группы ступени 2. Основной результат составляет

Теорема. 1. *При $n \geq 2$, произвольном $k \geq 1$*

$$\operatorname{wid}\big(N_{n2}^{2k}, x^{2k}\big) = 2[n/2] + 1.$$

2. *При любых n, k*

$$\operatorname{wid}\big(N_{n2}^{2k+1}, x^{2k+1}\big) = 1.$$

Дальнейшая часть статьи посвящена доказательству теоремы. Начнем рассмотрение с наиболее трудного и принципиального случая степени 2. Этому посвящены пп. 2, 3. Отметим, впрочем, что утверждение 2 теоремы — хорошо известный факт (например, оно содержится в диссертации Olivier Chapuis

«Contribution a la theorie des groupes resolubles: elliptisme et theorie (universelle) du premier ordre», защищенной 14.12.1994 г. в Университете «Париж 7», Франция). Оно легко доказывается и включено в теорему для полноты формулировки. Утверждение 1 теоремы при $n = 2$ доказано в [16].

1. Сведение к группе G_n

Пусть $G_n = N_{n2}/N_{n2}^4\big(N_{n2}'\big)^2$, $H_n = N_{n2}/\big(N_{n2}'\big)^2$.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$\operatorname{wid}\big(G_n^2, x^2\big) = \operatorname{wid}\big(H_n^2, x^2\big) = \operatorname{wid}\big(N_{n2}^2, x^2\big).$$

Доказательство. Так как ширина вербальной подгруппы при гомоморфизме не увеличивается, то

$$\operatorname{wid}\big(G_n^2, x^2\big) \le \operatorname{wid}\big(H_n^2, x^2\big) \le \operatorname{wid}\big(N_{n2}^2, x^2\big). \tag{1}$$

Достаточно доказать противоположные неравенства в (1). Докажем вначале, что $\operatorname{wid}\big(H_n^2, x^2\big) \ge \operatorname{wid}\big(N_{n2}^2, x^2\big)$. Для этого достаточно установить, что $\operatorname{wid}(\bar g, x^2) \ge \operatorname{wid}(g, x^2)$ для любого элемента $\bar g \in H_n^2$ и любого его прообраза $g \in N_{n2}^2$.

Пусть $\bar g = \bar g_1^2 \dots \bar g_s^2$, тогда $g = g_1^2 \dots g_s^2 c^2$, где $c \in N_{n2}'$. Но в этом случае $g = (g_1 c)^2 g_2^2 \dots g_s^2$, что доказывает требуемое неравенство.

Докажем теперь, что для любого элемента $\bar h \in G_n^2$, любого его прообраза $h \in H_n^2$ имеем $\operatorname{wid}(\bar h, x^2) \ge \operatorname{wid}(h, x^2)$. Заметим, что в H_n справедливы тождества $(x^2, y) = 1, x^4 y^4 = (xy)^4$. Пусть $\bar h = \bar h_1^2 \dots \bar h_s^2$, тогда $h = h_1^2 \dots h_s^2 d^4$, где $d \in H_n$. Отсюда следует, что $h = (h_1 d^2)^2 h_2^2 \dots h_s^2$. Лемма доказана.

Справедливость леммы позволяет перевести основные рассмотрения на группу G_n.

2. Доказательство основного результата

Пусть G_n имеет базис $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Шаг 1. Докажем, что

$$\operatorname{wid}\big(G_n', x^2\big) = 2[n/2] + 1.$$

Рассмотрим вначале случай четного ранга $n = 2m$ и докажем, что

$$\operatorname{wid}\big(G_{2m}', x^2\big) = 2m + 1.$$

Возьмем элемент

$$f = (x_2, x_1)(x_4, x_3) \dots (x_{2m}, x_{2m-1}) \in G_{2m}'.$$

Докажем, что ширина любого элемента $h \in G_{2m}'$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{wid}(h, x^2) \le \operatorname{wid}(f, x^2)$. В силу теоремы из [4] любой элемент из коммутанта представляется в виде произведения $[2m/2] = m$ коммутаторов:

$$h = (c_2, c_1)(c_4, c_3) \dots (c_{2m}, c_{2m-1}).$$

Если $f = f_1^2 \dots f_t^2$, то, определив эндоморфизм $\varphi : x_1 \to c_1, \dots, x_{2m} \to c_{2m}$, получим равенство

$$h = f^\varphi = \big(f_1^\varphi\big)^2 \dots \big(f_t^\varphi\big)^2.$$

Докажем, что $\mathrm{wid}(f, x^2) = 2m+1$. Представим f в виде произведения $2m+1$ квадратов, например, следующим образом: $f = f_1^2 f_2^2 \dots f_{2m+1}^2$, где

$$\begin{gathered}
f_1 = x_1 x_3 x_5 \dots x_{2m-1}, \\
f_{2s} = x_{2s-1}^{-1} x_{2s}^{-1} x_{2s+1}^{-1} x_{2s+3}^{-1} \dots x_{2m-1}^{-1}, \quad s = 1, \dots, m-1, \\
f_{2s+1} = x_{2s} x_{2s+1} x_{2s+3} \dots x_{2m-1}, \quad s = 1, 2, 3, 4, \dots, m-1, \\
f_{2m} = x_{2m-1}^{-1} x_{2m}^{-1}, \\
f_{2m+1} = x_{2m}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Тем самым доказано, что $\mathrm{wid}(f, x^2) \le 2m+1$.

Докажем обратное неравенство $\mathrm{wid}(f, x^2) \ge 2m+1$. Предположим, что f можно представить в виде произведения $2m$ квадратов:

$$f = g_1^2 \dots g_{2m}^2, \quad g_i \in G_{2m}.$$

Как произвольные элементы группы G_{2m} элементы g_i имеют вид

$$g_i = x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_{2m}^{a_{i2m}} \prod_{k>j} (x_k, x_j)^{a_{kj}^i},$$

где можно считать, что $a_{ij} \in Z_4$, $a_{kj}^i \in Z_2$. Возведя каждый g_i в квадрат и перемножив, получим

$$f = x_1^{2\sum_{i=1}^{2m} a_{i1}} x_2^{2\sum_{i=1}^{2m} a_{i2}} \dots x_{2m}^{2\sum_{i=1}^{2m} a_{i2m}} \prod_{i>j} (x_i, x_j)^{\sum_{k=1}^{2m} a_{ki} a_{kj}}.$$

Воспользуемся свойствами сравнений и, не меняя для простоты обозначения элементов a_{ij}, из того, что $f = (x_2, x_1)(x_4, x_3) \dots (x_{2m}, x_{2m-1})$, получим систему равенств над Z_2:

$$\begin{cases}
0 = \sum\limits_{i=1}^{2m} a_{ij}, & j = 1, \dots, 2m, \\
1 = \sum\limits_{k=1}^{2m} a_{k,2i} a_{k,2i-1}, & i = 1, \dots, m, \\
0 = \sum\limits_{k=1}^{2m} a_{ki} a_{kj} & \text{при остальных } i, j.
\end{cases} \tag{3}$$

Столбцы матрицы $A = (a_{ij})$ обозначим через b_i, $i = 1, \dots, 2m$. Из системы (3) следует, что скалярное произведение $b_i b_j$ равно нулю или единице. Отметим, что $b_i \in Z_2^{2m}$, где Z_2^{2m} — линейное пространство размерности $2m$ над полем Z_2. Рассмотрим подпространство $V_0 \subseteq Z_2^{2m}$, состоящее из всех векторов $(z_1, \dots, z_{2m})$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{2m} z_i = 0$. Из системы (3) вытекает, что $b_i \in V_0$, $i = 1, \dots, 2m$. Очевидно, что $\dim V_0 = 2m-1$.

Построим граф T, вершинами которого являются элементы пространства V_0. Вершины (векторы) соединены ребром тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов равно единице. Задача о разрешимости системы (3) равносильна задаче о поиске подграфа $R \subset T$, обладающего такими свойствами: R имеет $2m$ вершин и из каждой вершины исходит только одно ребро.

Пусть вершина $a \in T$ принадлежит и подграфу R. Из a должно выходить одно ребро, например, в вершину $b \in R$. Рассмотрим ортогональные подпространства $a^\perp, b^\perp$ и их пересечение $V_1 = a^\perp \cap b^\perp$. Тогда $\dim a^\perp = 2m-2$, $\dim b^\perp = 2m-2$, $\dim V_1 \leq 2m-3$. Докажем последнее неравенство. Предположим, что $\dim V_1 = 2m-2$. Тогда $a^\perp = b^\perp$, следовательно, $b \in a^\perp$ и $a \in b^\perp$, что неверно. В подпространстве V_1 (или в подграфе) выберем элементы c и d, соединенные ребром. Тем самым $\dim c^\perp \leq 2m-4$, $\dim d^\perp \leq 2m-4$, $\dim V_2 \leq 2m-5$, где $V_2 = c^\perp \cap d^\perp$. Продолжив этот процесс, получаем, что для подпространства V_k его размерность не превосходит $2m-(2k+1)$. Так как в R должно быть $2m$ вершин, остановим этот процесс на пространстве V_{m-1}. В этом пространстве должны лежать недостающие вершины $(2m-1)$-я и $2m$-я, однако $\dim V_{m-1} \leq 1$. Следовательно, граф R построить невозможно, и система (3) неразрешима. Значит, наше предположение неверно и $\mathrm{wid}(f, x^2) \geq 2m+1$.

Пусть теперь ранг нечетен: $n = 2m+1$. Докажем, что

$$\mathrm{wid}\big(G'_{2m+1}, x^2\big) = 2m+1.$$

Произвольный элемент $h \in G'_{2m+1}$ по теореме из [4] имеет относительно слова (x,y) ширину $[(2m+1)/2] = m$. Это означает, что элемент h допускает представление вида

$$h = (c_2, c_1)\dots(c_{2m}, c_{2m-1}).$$

Рассмотрим гомоморфизм φ группы G_{2m} в группу G_{2m+1}, при котором $\varphi(x_1) = c_1, \dots, \varphi(x_{2m}) = c_{2m}$. Тогда элемент h является образом элемента $f = (x_2, x_1)\dots(x_{2m}, x_{2m-1})$, который, как мы знаем, представляется как произведение $2m+1$ квадратов. Значит, h представим в виде произведение $2m+1$ квадратов. Так как h — произвольный элемент из G'_{2m}, отсюда следует, что

$$\mathrm{wid}\big(G'_{2m+1}, x^2\big) \leq 2m+1.$$

С другой стороны, можно считать группу G_{2m} естественной подгруппой группы G_{2m+1}. При этом как G_{2m} является ретрактом группы G_{2m+1}, так и G'_{2m} — ретрактом группы G'_{2m+1}. Отсюда следует, что $\mathrm{wid}\big(G'_{2m}, x^2\big)$ не превосходит $\mathrm{wid}\big(G'_{2m+1}, x^2\big)$, тем самым

$$\mathrm{wid}\big(G'_{2m+1}, x^2\big) = 2m+1.$$

Шаг 2. Докажем, что

$$\mathrm{wid}\big(G^2_n, x^2\big) = 2[n/2]+1.$$

Рассмотрим сначала случай четного ранга: $n = 2m+2$. Тогда должно быть

$$\mathrm{wid}\big(G^2_{2m+2}, x^2\big) = 2m+3.$$

Возьмем произвольный элемент $g \in G^2_{2m+2}$. Меняя, если нужно, базис, считаем, что

$$g = x_1^2(c_2, c_1)\dots(c_{2m+2}, c_{2m+1}). \tag{4}$$

Пусть $c_i = x_1^{\varepsilon_i} c'_i$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, $c'_i \in \langle x_2, \dots, x_{2m+2}\rangle$. Приведенная запись (4) переписывается как $g = x_1^2(x_1, d)(c'_2, c'_1)\dots\big(c'_{2m+2}, c'_{2m+1}\big)$, где элементы d, c'_i $(i = 1, \dots, 2m+2)$ принадлежат подгруппе, порожденной элементами $x_2, \dots, x_{2m+2}$. Элемент $\big(c'_2, c'_1\big)\dots\big(c'_{2m+2}, c'_{2m+1}\big)$ записывается как произведение $2m+1$ квадратов. Остается показать, что элемент $x_1^2(x_1, d)$ представляется как произведение двух квадратов, что следует из равенства $d^{-2}(x_1 d)^2 = x_1^2(x_1, d)$.

Теперь для нечетного ранга $n = 2m+1$ докажем, что

$$\mathrm{wid}\big(G^2_{2m+1}, x^2\big) = 2m+1.$$

Рассмотрим элемент

$$\bar{f} = x^2_{2m+1}(x_2, x_1)\dots(x_{2m}, x_{2m-1}) = x^2_{2m+1}f.$$

Докажем вначале, что $\mathrm{wid}(\bar{f}, x^2) = 2m+1$. Нам известно, что $\mathrm{wid}(f, x^2) = 2m+1$. Существует представление $f = f_1^2 \dots f^2_{2m+1}$, где $f_i \in \langle x_1, \dots, x_{2m}\rangle \cong G_{2m}$ $(i = 1, \dots, 2m+1)$. Остается заметить, что $\bar{f} = \bar{f}_1^2 \dots \bar{f}^2_{2m+1}$, где $\bar{f}_i = x_{2m+1}f_i$ $(i = 1, \dots, 2m+1)$. Действительно, при собирании степени элемента x_{2m+1}, которая будет равна $x^{2(2m+1)}_{2m+1} = x^2_{2m+1}$, возникает произведение

$$(f_1, x_{2m+1})(f_2, x_{2m+1})\dots(f_{2m+1}, x_{2m+1}) = (f_1 f_2 \dots f_{2m+1}, x_{2m+1}) = 1,$$

так как

$$(f_1 f_2 \dots f_{2m+1})^2 \equiv f \bmod G'_{2m+1} \equiv 1 \bmod G'_{2m+1},$$

следовательно, $f_1 f_2 \dots f_{2m+1} \in G^2_{2m+1}$, т. е. $f_1 f_2 \dots f_{2m+1}$ — центральный элемент группы G_{2m+1}. Отсюда $\mathrm{wid}(\bar{f}, x^2) = 2m+1$.

Пусть g — произвольный элемент подгруппы G^2_{2m+1}. Существует представление

$$g = g^2_{2m+1}(g_2, g_1)\dots(g_{2m}, g_{2m-1}).$$

Возьмем эндоморфизм φ группы G_{2m+1}, для которого $\varphi(x_i) = g_i$. Тогда $\varphi(\bar{f}) = g$, значит, $\mathrm{wid}(g, x^2) \le 2m+1$, что и требовалось доказать.

3. Ширина произвольной степени

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — базис группы N_{n2}. Произвольный элемент $g \in N_{n2}$ однозначно записывается в виде

$$g = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \prod_{i>j} (x_i, x_j)^{a_{ij}},$$

где $a_i, a_j, a_{ij} \in Z$. Прямые вычисления показывают, что для любого натурального t

$$g^t = x_1^{ta_1} \dots x_n^{ta_n} \prod_{i>j} (x_i, x_j)^{ta_{ij} + ((t^2 - t)/2) a_i a_j}. \tag{5}$$

Аналогично п. 2 вводим в рассмотрение группу $H_n(t) = N_{n2}/(N'_{n2})^t$ и доказываем, что

$$\mathrm{wid}\big(H^t_n(t), x^t\big) = \mathrm{wid}\big(N^t_{n2}, x^t\big).$$

Для простоты обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n$ индуцированный базис группы $H_n(t)$. Рассмотрим случай нечетного $t = 2k+1$. Легко видеть, что тогда в группе $H_n(t)$ выполнено тождество $(xy)^{2k+1} = x^{2k+1}y^{2k+1}$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{wid}(H_n(2k+1)^{2k+1}, x^{2k+1}) = 1$$

и

$$\mathrm{wid}\big(N^{2k+1}_{n2}, x^{2k+1}\big) = 1.$$

Утверждение 2 теоремы доказано.

Остается рассмотреть случай составного четного показателя $t = 2k$. Формула (5) индуцирует в группе $H_n(2k)$ формулу

$$g^{2k} = x_1^{2ka_1} \dots x_n^{2ka_n} \prod_{i>j} (x_i, x_j)^{k(2k-1)a_i a_j}.$$

Произвольный элемент из $H_n(2k)^{2k} \cap H_n(2k)'$ имеет вид

$$h = \prod_{i>j} (x_i, x_j)^{kr_{ij}}, \quad r_{ij} \in Z. \tag{6}$$

Введем, как и ранее, элемент $f = (x_2, x_1)(x_4, x_3) \dots (x_{2m}, x_{2m-1})$ группы $H_n(2k)$, где $n = 2m$ или $n = 2m + 1$. Произвольный элемент h из (6) представляется в виде $h = d^k$. По теореме из [4] существует запись элемента d в виде произведения m коммутаторов. Значит, существует представление

$$h = (c_2, c_1)^k (c_4, c_3)^k \dots (c_{2m}, c_{2m-1})^k.$$

Определим эндоморфизм φ группы $H_n(2k)$ отображением $x_i \to c_i$ ($i = 1, \dots, 2m$), и $x_{2m+1} \to 1$, если $n = 2m + 1$. Тогда $h = f^{k\varphi}$. Отсюда следует, что $\mathrm{wid}(h, x^{2k}) \le \mathrm{wid}(f^k, x^{2k})$ и $\mathrm{wid}(H_n(2k)', x^{2k}) = \mathrm{wid}(f^k, x^{2k})$.

Вычислим ширину элемента f^k относительно слова x^{2k}. Оценим ширину сверху. Существует представление

$$f^k = f_1^{2k} \dots f_{2m+1}^{2k},$$

где f_i, $i = 1, \dots, 2m+1$, определены в (2). Следовательно, $\mathrm{wid}(f^k, x^{2k}) \le 2m+1$.

Докажем обратное неравенство $\mathrm{wid}(f^k, x^{2k}) \ge 2m + 1$. Предположим, что f^k можно представить в виде произведения $2m$ элементов в степени $2k$:

$$f^k = g_1^{2k} \dots g_{2m}^{2k}, \quad g_i \in H_{2m}(2k).$$

Как произвольные элементы группы $H_{2m}(2k)$ элементы g_i имеют вид

$$g_i = x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_{2m}^{a_{i2m}} \prod_{l>j} (x_l, x_j)^{a^i_{lj}},$$

где можно считать, что $a_{ij} \in Z_2$. Возведя каждый g_i в степень $2k$ и перемножив, получим

$$f = x_1^{2k \sum\limits_{i=1}^{2m} a_{i1}} x_2^{2k \sum\limits_{i=1}^{2m} a_{i2}} \dots x_{2m}^{2k \sum\limits_{i=1}^{2m} a_{i2m}} \prod_{i>j} (x_i, x_j)^{k(2k-1) \sum a_{li} a_{lj}}.$$

Так как $f^k = (x_2, x_1)^k (x_4, x_3)^k \dots (x_{2m}, x_{2m-1})^k$, имеем систему уравнений, в которой первая группа уравнений над Z, а вторая и третья над Z_{2k}:

$$\begin{cases} 0 = 2k \sum\limits_{i=1}^{2m} a_{ij}, & j = 1, \dots, 2m, \\ k = k(2k-1) \sum\limits_{l=1}^{2m} a_{l,2i} a_{l,2i-1}, & i = 1, \dots, m, \\ 0 = k(2k-1) \sum\limits_{l=1}^{2m} a_{li} a_{lj} & \text{при остальных } i, j. \end{cases} \tag{7}$$

Разделим каждое уравнение из первой группы на $2k$. Остальные уравнения формально разделим на k, переходя к вычислениям $\mathrm{mod}(2)$. Можно считать, что все вычисления ведутся по $\mathrm{mod}(2)$. Тогда система (7) превращается в систему (3). Остается заметить, что равенство

$$\mathrm{wid}(H_n(2k)^{2k}, x^{2k}) = 2[n/2] + 1$$

доказывается так же, как и в п. 3 (шаг 2).

Автор благодарит научного руководителя профессора В. А. Романькова за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мерзляков Ю. И.* Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 1. С. 83–94.
2. *Мерзляков Ю. И.* Рациональные группы. М.: Наука, 1987.
3. *Мальцев А. И.* О свободных разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 3. С. 495–498.
4. *Алламбергенов Х. С., Романьков В. А.* О произведениях коммутаторов в группах. М., 1985. 19 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4566–85.
5. *Алламбергенов Х. С., Романьков В. А.* О произведениях коммутаторов в группах // Докл. АН Уз ССР. 1981. Т. 4. С. 14–15.
6. *Bavard C., Meighiez G.* Commutateurs dans les groupes metabeliens // Indag. Math. New Ser. 1992. V. 3, N 2. P. 129–135.
7. *Stroud P.* Thesis. Cambridge: Cambridge Univ., 1966.
8. *Robinson D.* A course in the theory of groups. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.
9. *Rhemtulla A. H.* Commutators of certain finitely generated soluble groups // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 1160–1164.
10. *Романьков В. А.* О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 1. С. 60–72.
11. *Wilson J.* On outer-commutator words // Canad. J. Math. 1974. V. 26, N 3. P. 608–620.
12. *Rhemtulla A. H.* A problem of bounded expessibility in free products // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968. V. 64, N 3. P. 573–584.
13. *Бардаков В. Г.* Ширина вербальных подгрупп некоторых HNN-расширений. Новосибирск, 1995. (Препринт/Институт математики РАН. Сиб. отд-ние; № 9).
14. *Akhavan M., Rhemtulla A. H.* Commutator length of abelian-by-nilpotent groups // Glasgow Math. J. 1998. V. 40, N 1. P. 117–121.
15. *Алламбергенов Х. С.* О ширине коммутанта свободной метабелевой группы // 10-й Всесоюз. симпоз. по теории групп: Тезисы. докл. Минск, 1986. С. 5.
16. *Бардаков В. Г.* К теории групп кос // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 6. С. 3–42.

Статья поступила 13 июля 1998 г.

г. Омск