Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.948.32: 517.544

ПОСТРОЕНИЕ В ЯВНОМ ВИДЕ ГЛОБАЛЬНОЙ УНИФОРМИЗАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СООТВЕТСТВИЯ

О. Б. Долгополова, Э. И. Зверович

Аннотация: Дан алгоритм конструктивного построения глобальной униформизации многозначного соответствия, заданного алгебраическим уравнением $f(z,w)=0$ над полем $\mathbb{C}$. Конструктивность достигается за счет отказа от использования автоморфных функций в качестве униформизирующих. Показано, что любое неприводимое алгебраическое соответствие можно глобально униформизировать парой функций, одна из которых рациональная. Ил. 5, библиогр. 10.

1. Введение и постановка задачи

Под *многозначным аналитическим соответствием* между комплексными переменными z и w понимается задание его в виде уравнения $f(z,w)=0$, где f — однозначная аналитическая функция от двух комплексных параметров. Под *проблемой глобальной униформизации* многозначного аналитического соответствия понимается проблема нахождения способов перехода от неявного задания $f(z,w)=0$ к равносильному ему параметрическому заданию $z=\varphi(t)$, $w=\psi(t)$, где φ и ψ — однозначные мероморфные функции от параметра t. В дальнейшем понятие глобальной униформизации будет уточнено, а пока ограничимся приведенным здесь описанием.

Одной из классических проблем, где существенно используется глобальная униформизация, является проблема представимости *абелева интеграла*

$$\int R(z,w)\,dz \tag{1}$$

в виде элементарной функции в предположении, что R — рациональная функция, а переменные z и w связаны неприводимым алгебраическим уравнением $f(z,w)=0$. Если риманова поверхность, заданная этим уравнением, гомеоморфна сфере (т. е. является замкнутой поверхностью рода нуль), то, как известно $[1,2]$, на ней существует рациональная функция $t=t(z,w)$, имеющая единственный простой полюс. Принимая переменную t за параметр, можно выразить переменные z и w в виде рациональных функций $z=\varphi(t)$, $w=\psi(t)$ от переменного t. Эта пара функций есть глобальная униформизация алгебраического соответствия $f(z,w)=0$ рациональными функциями. Переходя в интеграле (1) к переменной t, заключаем, что он сводится к интегралу от рациональной функции и, значит, является элементарной функцией.

Если неприводимое соответствие $f(z,w)=0$ алгебраическое, но соответствующая ему риманова поверхность не гомеоморфна сфере (т. е. ее род больше нуля), то униформизировать соответствие $f(z,w)=0$ рациональными функциями невозможно. То же самое имеет место и в случае, когда неприводимое соответствие $f(z,w)=0$ аналитическое, но не алгебраическое. Таким образом, в этих более сложных случаях в качестве униформизирующих надо привлекать более сложные функции, чем рациональные. Известно, например, что неприводимое алгебраическое соответствие рода единица можно глобально униформизировать двоякопериодическими (эллиптическими) функциями.

Проблема глобальной униформизации произвольного неприводимого аналитического соответствия $f(z,w)=0$ была в общем виде положительно решена А. Пуанкаре и П. Кёбе в 1908 г. Чтобы пояснить основную идею этого решения, обозначим через $\mathfrak{R}$ риманову поверхность, заданную уравнением $f(z,w)=0$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ — универсальная поверхность наложения [2–5] римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Поверхность $\widetilde{\mathfrak{R}}$ — односвязная риманова поверхность, притом такая, что отображение проектирования $\pi:\widetilde{\mathfrak{R}}\to\mathfrak{R}$ является аналитическим. По теореме Римана о конформном отображении [6] существует функция $\tilde{p}=F(t)$, реализующая конформный гомеоморфизм канонической области (т. е. либо сферы $\widehat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, либо плоскости $\mathbf{C}$, либо круга $|t|<1$) на риманову поверхность $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Проектируя точку $\tilde{p}\in\widetilde{\mathfrak{R}}$ на плоскости комплексных переменных z и w, получим глобальную униформизацию соответствия $f(z,w)=0$ в виде пары функций $z=(\pi_z\circ F)(t)$, $w=(\pi_w\circ F)(t)$, где $\pi=(\pi_z,\pi_w)$. В эллиптическом случае (т. е. когда $t\in\widehat{\mathbf{C}}$) униформизирующие функции рациональны. В параболическом случае (т. е. когда $t\in\mathbf{C}$) они двоякопериодические. В гиперболическом случае (т. е. когда каноническая областью — круг $|t|<1$) они автоморфны [5] в круге $|t|<1$.

Основной недостаток этого решения проблемы глобальной униформизации заключается в том, что оно представляет собой чистую теорему существования, которая не дает никаких способов нахождения аналитических выражений для униформизирующих функций. Особенно труден с этой точки зрения гиперболический случай, но именно к такому типу принадлежит подавляющее (в некотором смысле) большинство аналитических соответствий. Такая ситуация существенно ограничивает возможности использования глобальной униформизации в приложениях, которые далеко не исчерпываются классическим примером (1), приведенным выше.

Эта статья посвящена проблеме явного построения глобальной униформизации. Мы ограничимся здесь наиболее простым случаем униформизации алгебраического соответствия $f(z,w)=0$. Обычно в таких случаях предполагается, что многочлен $f(z,w)$ неприводим над полем $\mathbf{C}$ всех комплексных чисел. При этом молчаливо предполагается, что проблема исследования многочлена на неприводимость где-то решена. Однако авторам это решение не известно. В связи с этим в § 2 дается алгоритм разложения многочлена на неприводимые множители. В частности, решается вопрос о неприводимости данного многочлена. Содержание этого параграфа представляет по меньшей мере методический интерес как новое приложение «гасящей функции» Карлемана [7]. Дальнейшее изложение следует, в основном, работам [8, 9] и представляет собой их подробное изложение. В § 3 построен конформный гомеоморфизм сферы $\widehat{\mathbf{C}}$ на заданную n-листную рода нуль накрывающую поверхность сферы $\widehat{\mathbf{C}}$. Для этого гомеоморфизма мы нашли явное аналитическое выражение в виде интеграла, аналогичного классическому интегралу Кристоффеля — Шварца [10]. В § 4 дается алгоритм явного построения глобальной униформизации произвольного соответствия, заданного неприводимым алгебраическим уравнением $f(z,w)=0$. Желая упростить процедуру униформизации, мы отказываемся от использования автоморфных функций в качестве униформизирующих. Вместо этого реализуется следующая геометрическая идея. Разрезая риманову поверхность $\mathfrak{R}$, заданную уравнением $f(z,w)=0$, по некоторым кривым, мы превратим ее в риманову поверхность рода нуль с краем. Затем строим другую, замкнутую поверхность рода нуль, включающую в себя эту поверхность с краем в качестве подмногообразия. Отображая конформно построенную замкнутую поверхность на сферу $\widehat{\mathbf{C}}$, мы выражаем искомую глобальную униформизацию в явном виде через отображающую функцию. Разумеется, здесь присутствует большой произвол, которым можно воспользоваться для упрощения задачи. Реализация изложенной идеи позволила доказать существование такой глобальной униформизации $z=\varphi(t)$, $w=\psi(t)$, что одна из функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ является рациональной. В § 5 рассматриваются различные примеры построения глобальной униформизации в явном виде.

2. Алгоритм разложения многочлена на неприводимые множители

Рассмотрим многочлен от двух комплексных переменных z и w с комплексными коэффициентами

$$f(z,w)=a_0(z)w^n+a_1(z)w^{n-1}+\ldots+a_n(z), \tag{2}$$

предполагая, что его дискриминант, а также многочлен $a_0(z)$ отличны от тождественного нуля и $n\ge 2$. Таким образом, многочлен (2) не имеет кратных неприводимых множителей, а его точная степень по переменной w равна n. Чтобы упростить дальнейшие исследования, здесь и в дальнейшем будем предполагать, что $a_0(z)\equiv 1$. Если это тождество не выполняется, то введем новую переменную $\zeta=a_0(z)w$, относительно которой многочлен $[a_0(z)]^{n-1}f(z,w)$ будет обладать требуемым свойством. Свойства обоих многочленов с точки зрения приводимости, а также с точки зрения возможности глобальной униформизации, очевидно, одинаковые. Решая систему уравнений

$$f(z,w)=0, \quad \frac{\partial f(z,w)}{\partial w}=0, \tag{3}$$

можно найти все точки ветвления и все особые точки уравнения $f(z,w)=0$. Предполагая их найденными и проектируя их на сферу $\widehat{\mathbf{C}}_z$ переменного z, расположим все эти проекции в порядке неубывания модулей:

$$|z_1|\le|z_2|\le\ldots\le|z_m|<|z_{m+1}|=+\infty. \tag{4}$$

Таким образом, имеется $m+1$ проекций «плохих» точек

$$z_1,z_2,\ldots,z_m,z_{m+1}=\infty.$$

Соединим последовательно между собой все эти точки гладкими кривыми $L_k=[z_k,z_{k+1}]$, $k=1,2,\ldots,m$, не имеющими общих внутренних точек, и обозначим $L=\bigcup\limits_{k=1}^{m}L_k$. Область $D=\mathbf{C}\setminus L$ связная односвязная. Ее компактификацию Мазуркевича, т. е. область с краем $D\cup\partial D=D\cup L^+\cup L^-$, будем называть *листом* (рис. 1). Таким образом, лист — это область D с краем ∂D, состоящим из двух построенных выше «берегов» L^+ и L^- линии L. Стандартная ориентация края

$\partial D = L^+ \cup L^-$ показана на рис. 1.

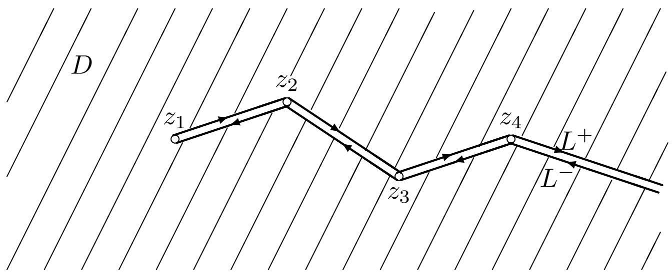

Рис. 1. Лист

Для исследования уравнения $f(z,w) = 0$ на приводимость необходимо вычислить группу монодромии [1] соответствующего ему n-листного накрытия [2, 3] сферы $\widehat{\mathbf{C}}_z$. С этой целью заметим, что по построению в каждой точке $z \in D$ выполняется неравенство $\frac{\partial f(z,w)}{\partial w} \neq 0$, где $f(z,w) = 0$. Отсюда на основании теоремы о неявных функциях [4] заключаем, что в некоторой окрестности каждой точки области D существует n различных однозначных аналитических функций $w(z)$, удовлетворяющих уравнению $f(z,w) = 0$, которые при этом неограниченно аналитически продолжимы в области D. Так как область D связная односвязная, по теореме о монодромии [2] каждая из n функций $w(z)$ продолжается до функции, однозначной и аналитической в D и непрерывной на листе $D \cup \partial D$. Эти последние функции будем называть *ветвями*. Для вычисления ветвей зафиксируем произвольно точку $a \in D$. Для удобства вычислений условимся выбирать ее подальше от ∂D, но поближе к точке z_1.

Обозначим через G связную односвязную область, полученную удалением из области D круга $|z-a| \leq r$, где $0 < r < |z_1 - a|$, и разреза L_0, соединяющего точку z_1 с окружностью $\Gamma = \{|z-a| = r\}$. Край области G представляется в виде объединения $\partial G = L_m^- \cup \ldots \cup L_0^- \cup \Gamma \cup L_0^+ \cup \ldots \cup L_m^+$ со стандартной ориентацией, показанной на рис. 2.

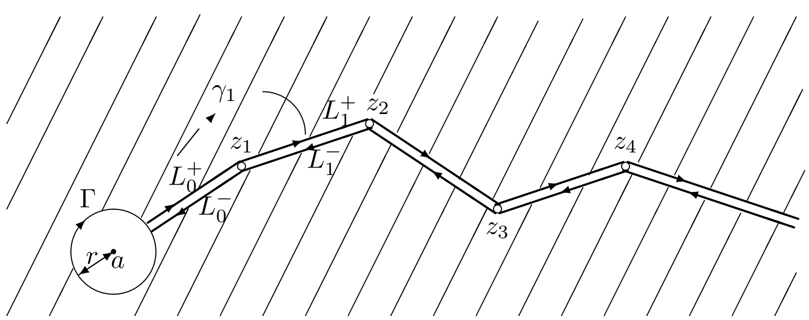

Рис. 2. Область G

Найдем, далее, n однозначных аналитических в круге $|z-a| \leq r$ функций $w_1(z), \ldots, w_n(z)$ таких, что $f(z, w_\nu(z)) \equiv 0$ при $\nu = 1, \ldots, n$. Эти функции можно искать, например, в виде сходящихся степенных рядов

$$w_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{\nu j}(z-a)^j, \quad |z-a| \leq r, \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где числа $w = b_{\nu 0}$ являются корнями уравнения $f(a, w) = 0$, а остальные коэффициенты рядов (5) можно найти либо с помощью теоремы о неявных функциях, либо с помощью формальной подстановки рядов (5) в уравнение $f(z, w) = 0$.

Считая суммы рядов найденными, получим формулы, дающие аналитические продолжения функций (5) до функций $w_\nu(z)$, аналитических в области G.

Предварительно с помощью диаграммы Ньютона [1] найдем наименьшее натуральное число k такое, что для всех $\nu = 1, \dots, n$ выполнены соотношения

$$w_\nu(z) = O(z^{k-1}) \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{6}$$

Если такое k найдено, то каждая из функций (5) может быть представлена в области G с помощью интегральной формулы Коши:

$$w_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} w_\nu(\tau) \left(\frac{z-a}{\tau-a}\right)^k \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad z \in G. \tag{7}$$

Но так как функции $w_\nu(\tau)$ известны не на всем крае ∂G, а только на его части, а именно на окружности $\Gamma = \{|\tau - a| = r\}$, то формула (7) не годится для аналитического продолжения функции (5) из круга $|z - a| \le r$ в область G. Чтобы этот недостаток устранить, используем метод гасящей функции Карлемана [8], которая должна «погасить» влияние той части края ∂G, где значения функций $w_\nu(\tau)$ неизвестны.

С этой целью обозначим через $\omega(z)$ гармоническую в области G функцию, являющуюся решением следующей задачи Дирихле:

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & t \in \Gamma, \\ 1, & t \in \partial G \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Известно, что существует единственная такая функция, причем $0 < \omega(z) < 1$ при $z \in G$. Пусть $\widetilde{\omega}(z)$ — функция, гармонически сопряженная к $\omega(z)$; обозначим $\varphi(z) := \omega(z) + i\widetilde{\omega}(z)$. Тогда при любом натуральном m имеем

$$e^{-m\varphi(z)} w_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} e^{-m\varphi(\tau)} w_\nu(\tau) \left(\frac{z-a}{\tau-a}\right)^k \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad z \in G.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} w_\nu(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} e^{m[\varphi(z) - \varphi(\tau)]} w_\nu(\tau) \left(\frac{z-a}{\tau-a}\right)^k \frac{d\tau}{\tau - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{\Gamma} + \int\limits_{\partial G \setminus \Gamma} \right) e^{m[\varphi(z) - \varphi(\tau)]} w_\nu(\tau) \left(\frac{z-a}{\tau-a}\right)^k \frac{d\tau}{\tau - z}. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как при $\tau \in \partial G \setminus \Gamma$ выполняется неравенство

$$|e^{\varphi(z) - \varphi(\tau)}| = e^{\omega(z) - \omega(\tau)} = e^{\omega(z) - 1} < 1,$$

то при $m \to +\infty$ интеграл по $\partial G \setminus \Gamma$ стремится к нулю равномерно по $z \in K$, где $K \subset G$ — любой компакт. Таким образом, в пределе получим

$$w_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{m \to +\infty} \oint\limits_{|\tau - a| = r} e^{m[\varphi(z) - \varphi(\tau)]} w_\nu(\tau) \left(\frac{z-a}{\tau-a}\right)^k \frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{9}$$

$z \in G$, $\nu = 1, \ldots, n$. Эти равенства и дают искомые аналитические продолжения функций (5) из круга $|z - a| \leq r$ на всю область D.

Используя представления (9), вычислим гомоморфизм монодромии и группу монодромии накрытия сферы $\widehat{\mathbf{C}}_z$, соответствующего уравнению $f(z, w) = 0$.

Символами $t^{\pm} \in L^{\pm}$ соответственно будем обозначать различные точки края, имеющие одну и ту же комплексную координату $t \in L$. Тогда символы $z \to t^+$ и $z \to t^-$ будут означать стремление $z \to t$ с различных сторон кривой L. Таким образом, если $t \in L_\mu$, $\mu = 1, \ldots, m$, и t не совпадает с точками $z_1, \ldots, z_m$, то, переходя к пределам в равенствах (9), можно найти два множества, состоящих из n попарно различных чисел:

$$\{w_1(t^+), \ldots, w_n(t^+)\} = \{w_1(t^-), \ldots, w_n(t^-)\}. \tag{10}$$

Равенство этих множеств следует из того, что каждое из них есть множество всех попарно различных корней одного и того же уравнения $f(t, w) = 0$. Если же элементы множеств (10) упорядочивать, т. е. рассматривать не множества, а векторы, то равенство (10) перестает быть верным.

Чтобы равенство векторов, аналогичное равенству (10), стало верным, надо элементы одного из множеств (10) соответствующим образом переставить. Иначе говоря, существует подстановка $\sigma_\mu \in S_n$ длины n такая, что при $t \in L_\mu$ будет выполняться равенство

$$(w_1(t^+), \ldots, w_n(t^+)) = (w_{\sigma_\mu(1)}(t^-), \ldots, w_{\sigma_\mu(n)}(t^-)), \tag{11}$$

где $\mu = 1, \ldots, m$. Равенство (11) можно представить себе как результат аналитического продолжения вектора $(w_1(z), \ldots, w_n(z))$ по замкнутой кривой γ_μ, начинающейся и оканчивающейся в точке a, охватывающей один раз по часовой стрелке точки $z_1, \ldots, z_\mu$ (см. рис. 2). Если кривую γ_μ гомотопно деформировать в области $\mathbf{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$, то это не будет влиять на результат аналитического продолжения вдоль γ_μ.

Значит, подстановка σ_μ зависит только от гомотопического класса кривой γ_μ. Далее, очевидно, что аналитическому продолжению вдоль композиции $\gamma_{\mu_2} \circ \gamma_{\mu_1}$ кривых отвечает композиция $\sigma_{\mu_2} \circ \sigma_{\mu_1}$ соответствующих подстановок.

Таким образом, определен гомоморфизм $g : \mathscr{F} \to S_n$ фундаментальной группы $\mathscr{F}$ области $\mathbf{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ в симметрическую группу S_n. Его будем называть *гомоморфизмом монодромии*, а его образ $g(\mathscr{F}) \subset S_n$ — *группой монодромии* накрытия сферы $\widehat{\mathbf{C}}_z$, соответствующего данному уравнению $f(z, w) = 0$. Найденные выше подстановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ являются образующими группы монодромии $g(\mathscr{F})$. По ним методом перебора можно проверить, транзитивно или нет действует группа монодромии. В первом случае уравнение $f(z, w) = 0$ будет неприводимым. Во втором случае тем же методом можно найти множество всех $k < n$ ветвей, которые являются аналитическими продолжениями ветви $w_1(z)$. Представляя это множество в виде

$$\{w_{i_1}(z), \ldots, w_{i_k}(z)\}, \quad 1 = i_1 < \ldots < i_k \leq n,$$

заключаем, что произведение

$$f_1(z, w) = (w - w_{i_1}(z)) \cdot \ldots \cdot (w - w_{i_k}(z))$$

— неприводимый многочлен от z, w, на который многочлен $f(z, w)$ делится без остатка. Поступая аналогично с частным $\frac{f}{f_1}$, можно построить разложение данного многочлена на неприводимые множители.

3. Построение конформного гомеоморфизма сферы на заданное конечнолистное накрытие сферы

Пусть задана замкнутая риманова поверхность $\mathscr{M}$ рода нуль, являющаяся n-листной накрывающей поверхностью сферы $\widehat{\mathbf{C}}_z$. Цель этого параграфа — найти явное аналитическое выражение функции $z = z(w)$, реализующей конформный гомеоморфизм сферы $\widehat{\mathbf{C}}_w$ на риманову поверхность $\mathscr{M}$. Известно, что такая функция существует и является рациональной. Для ее вычисления необходимо прежде всего задать параметры римановой поверхности $\mathscr{M}$, каковыми являются проекции $z_1, \dots, z_m, \infty$ всех ее возможных точек ветвления и гомоморфизм монодромии $g : \mathscr{F} \to S_n$, подчиненный соответствующим ограничениям. Предположим, что группа монодромии $g(\mathscr{F})$ задана своими образующими $\sigma_\nu \in S_\nu$ $(\nu = 1, \dots, m)$, где $(w_1(t^+), \dots, w_n(t^+)) = (w_{\sigma_\nu(1)}(t^-), \dots, w_{\sigma_\nu(n)}(t^-))$ при $t \in L_\nu$ (см. рис. 2). Для обеспечения связности поверхности $\mathscr{M}$ потребуем, чтобы группа монодромии $g(\mathscr{F})$ действовала транзитивно. Необходимо, далее, наложить на гомоморфизм монодромии такие ограничения, чтобы поверхность $\mathscr{M}$ оказалась замкнутой поверхностью рода нуль (односвязной). С этой целью образующие группы монодромии σ_ν заменим такими подстановками:

$$\tau_1 := \sigma_1;\ \tau_2 := \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2;\ \dots;\ \tau_m := \sigma_{m-1}^{-1} \circ \sigma_m;\ \tau_{m+1} := \sigma_m^{-1}. \tag{12}$$

Каждая из этих подстановок представляет собой закон, по которому переходят друг в друга ветви функции $w = w(z)$, обратной к функции $z = z(w)$, когда точка z обходит один раз по часовой стрелке соответственно точки

$$z_1, z_2, \dots, z_m, \infty. \tag{13}$$

Разлагая подстановки (12) на независимые циклы и обозначая через $\lambda_{\mu\nu}$ длины этих циклов $(1 \le \lambda_{\mu\nu} \le n)$, вычислим индекс разветвления [1] поверхности $\mathscr{M}$:

$$\omega_z = \sum_{\mu=1}^{m+1} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} (\lambda_{\mu\nu} - 1). \tag{14}$$

Налагая ограничение $\omega_z = 2n - 2$, мы обеспечиваем тем самым односвязность поверхности $\mathscr{M}$.

Обозначим через $w_{\mu\nu} \in \mathbf{C}_w$ числовые параметры, являющиеся прообразами при искомом отображении соответствующих точек ветвления

$$(z_1, w_{11}), \dots, (z_1, w_{1k_1}), \quad (z_2, w_{21}), \dots, (z_2, w_{2k_2}), \\ \dots, (z_m, w_{m1}), \dots, (z_m, w_{mk_m}). \tag{15}$$

Предполагая, далее, что образ точки $w = \infty$ лежит над точкой $z_{m+1} = \infty$, введем еще q параметров $\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_q \in \mathbf{C}_w$, представляющих собой прообразы точек $(\infty; \widetilde{w}_1), \dots, (\infty; \widetilde{w}_q)$, которые будем считать точками ветвления кратностей $\gamma_1 \ge 1, \dots, \gamma_q \ge 1$ соответственно. При введенных обозначениях и при указанных ограничениях справедлива

Теорема 1. *Функцию $z = z(w)$, $\infty = z(\infty)$, реализующую конформный гомеоморфизм сферы $\widehat{\mathbf{C}}_w$ на риманову поверхность $\mathscr{M}$, можно задать уравнением*

$$z = C + \gamma_0 \int_{\widetilde{w}}^{w} \frac{\prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=1}^{k_\mu} (\xi - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu} - 1}}{\prod_{\mu=1}^{q} (\xi - \widetilde{w}_\mu)^{\gamma_\mu + 1}}\, d\xi, \tag{16}$$

где $C, \gamma_0 \neq 0, \widetilde{w}$ — произвольные постоянные, а неизвестные $w_{\mu\nu}$, $\widetilde{w}_\mu$ удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
\operatorname{res}\xi = \widetilde{w}_k \left[\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \prod\limits_{\nu=1}^{k_\mu} (\xi - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}-1}}{\prod\limits_{\mu=1}^{q} (\xi - \widetilde{w}_\mu)^{\gamma_\mu+1}} \right] = 0, \quad k = 1, \dots, q; \\
z_s = C + \gamma_0 \int\limits_{\widetilde{w}}^{w_{sj}} \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \prod\limits_{\nu=1}^{k_\mu} (\xi - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}-1}}{\prod\limits_{\mu=1}^{q} (\xi - \widetilde{w}_\mu)^{\gamma_\mu+1}} d\xi; \quad s = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, k_s
\end{gathered} \tag{17}$$

Доказательство. Существование конформного гомеоморфизма $z = z(w)$ и то, что он является рациональной функцией, известно. Речь идет, таким образом, только о том, что эту функцию можно представить в виде (16), а неизвестные параметры удовлетворяют системе (17). С этой целью исследуем рациональную функцию $\frac{z''(w)}{z'(w)}$. Очевидно, что она аналитична всюду в $\widehat{\mathbf{C}}_w$, кроме точек $w_{\mu\nu}$, $\widetilde{w}_\mu$ и $w = \infty$. В окрестности точек $w_{\mu\nu}$ имеем

$$z(w) = z_\mu + (w - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}} g(w), \tag{18}$$

где $g(w_{\mu\nu}) \neq 0$. Дифференцируя равенство (18), найдем

$$z'(w) = \lambda_{\mu\nu}(w - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}-1} g(w) + (w - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}} g'(w) = \lambda_{\mu\nu}(w - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}-1} g_1(w), \tag{19}$$

где $g_1(w_{\mu\nu}) = g(w_{\mu\nu}) \neq 0$.

Аналогично

$$z''(w) = \lambda_{\mu\nu}(\lambda_{\mu\nu} - 1)(w - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}-2} g_2(w), \tag{20}$$

где $g_2(w_{\mu\nu}) = g_1(w_{\mu\nu}) = g(w_{\mu\nu}) \neq 0$.

Деля (20) на (19), получим

$$\frac{z''(w)}{z'(w)} = \frac{\lambda_{\mu\nu}(\lambda_{\mu\nu} - 1)(w - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}-2} g_2(w)}{\lambda_{\mu\nu}(w - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu}-1} g_1(w)} = \frac{\lambda_{\mu\nu} - 1}{w - w_{\mu\nu}} + \dots, \tag{21}$$

где точками обозначены регулярные члены.

В окрестности точек $w = \widetilde{w}_\mu$ имеем

$$z(w) = \frac{g_3(w)}{(w - \widetilde{w}_\mu)^{\gamma_\mu}},$$

где $g_3(\widetilde{w}_\mu) \neq 0$.

Дифференцируя это равенство, получим

$$z'(w) = -\gamma_\mu (w - \widetilde{w}_\mu)^{-\gamma_\mu - 1} g_3(w) + \frac{g_3'(w)}{(w - \widetilde{w}_\mu)^{\gamma_\mu}} = -\frac{\gamma_\mu g_4(w)}{(w - \widetilde{w}_\mu)^{\gamma_\mu+1}}, \tag{22}$$

где $g_4(\widetilde{w}_\mu) = g_3(\widetilde{w}_\mu)$. Далее,

$$z''(w) = \gamma_\mu(\gamma_\mu + 1)(w - \widetilde{w}_\mu)^{-\gamma_\mu-2} g_4(w) - \frac{\gamma_\mu g_4'(w)}{(w - \widetilde{w}_\mu)^{\gamma_\mu+1}} = \frac{\gamma_\mu(\gamma_\mu + 1) g_5(w)}{(w - \widetilde{w}_\mu)^{\gamma_\mu+2}}, \tag{23}$$

где $g_5(\widetilde{w}_\mu) = g_4(\widetilde{w}_\mu) = g_3(\widetilde{w}_\mu)$.

Деля (23) на (22), найдем

$$\frac{z''(w)}{z'(w)} = -\frac{\gamma_\mu + 1}{w - \widetilde{w}_\mu} + \dots, \tag{24}$$

где точками обозначены регулярные члены.

Далее, так как $z(\infty) = \infty$, то в окрестности точки $w = \infty$ имеет место равенство $z(w) = cw^k + \dots$ при некоторых $c \neq 0$ и $k \in \mathbb{N}$. Дифференцируя его, имеем $z'(w) = kcw^{k-1} + \dots$; $z''(w) = k(k-1)cw^{k-2} + \dots$ и, значит, $\frac{z''(w)}{z'(w)} \to 0$ при $w \to \infty$.

Отсюда и из равенств (21) и (24) в силу обобщенной теоремы Лиувилля вытекает равенство

$$\frac{z''(w)}{z'(w)} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \frac{\lambda_{\mu\nu} - 1}{w - w_{\mu\nu}} - \sum_{\mu=1}^{q} \frac{\gamma_\mu + 1}{w - \widetilde{w}_\mu}. \tag{25}$$

Интегрируя его, затем потенцируя и снова интегрируя, легко получить равенство (16).

Первые q уравнений системы (17) выражают требование, чтобы интеграл (16) не содержал логарифмов, т. е. чтобы он был рациональной функцией. Остальные уравнения этой системы выражают соответствие между конечными точками ветвления поверхности $\mathscr{M}$ и точками $w_{\mu\nu} \in \mathbf{C}_w$.

На этом доказательство заканчивается. Отметим, что алгебраическое уравнение (16) имеет степень 1 по переменной z и потому во всяком случае неприводимо.

Замечание 1. Совместность системы (17), как и существование рациональной функции (16), вытекает из общих соображений. Следует отметить, что система (17) алгебраическая (т. е. не трансцендентная). Но поскольку она не является линейной, то ее решение не единственно. Источником неединственности служит тот факт, что в формуле (16) использована не вся информация, которую содержит заданный гомоморфизм монодромии. А именно, нигде не учитывается упорядоченность циклов внутри подстановок (12). Отсюда следует общая схема отделения нужных решений системы (17) от посторонних. Для этого необходимо методом, изложенным в § 2, вычислить гомоморфизм монодромии, соответствующий каждому решению системы (17), и сравнить его с заданным гомоморфизмом монодромии.

Замечание 2. Отметим простые частные случаи формулы (16). Если подстановка τ_{m+1} — цикл длины n, то точек $\widetilde{w}_\mu$ нет вовсе, и если потребовать, чтобы было $z \sim w^n$ при $n \to \infty$, то формула (16) переходит в такую:

$$z = C + n \int_{\widetilde{w}}^{w} \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=1}^{k_\mu} (\xi - w_{\mu\nu})^{\lambda_{\mu\nu} - 1} \, d\xi. \tag{26}$$

Таким образом, в этом случае отображающая функция (26) представляет собой многочлен степени n по w. Если, кроме того, допустить, что поверхность $\mathscr{M}$ разветвляется только над точками z_1, z_2 и ∞, то можно положить $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ и формула (26) приобретает еще более конкретный вид:

$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{B(\lambda_1, \lambda_2)} \int_0^w \xi^{\lambda_1 - 1} (1 - \xi)^{\lambda_2 - 1} \, d\xi, \tag{27}$$

где λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{N}$; $\lambda_1 \geq 2$, $\lambda_2 \geq 2$; $\lambda_1+\lambda_2 = n+1$; $B(\lambda_1, \lambda_2)$ — бета-функция Эйлера.

Пример. Найдем функцию, реализующую конформный гомеоморфизм сферы $\widehat{\mathbf{C}}_w$ на трехлистную поверхность наложения $\mathfrak{R}$ сферы $\widehat{\mathbf{C}}_z$, причем $\mathfrak{R}$ разветвляется над четырьмя точками $z_1, z_2, z_3, \infty \in \widehat{\mathbf{C}}_z$. Пусть на разрезе $[z_1, z_2]$ листы склеиваются по закону $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, а на разрезе $[z_3, \infty]$ — по закону $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Для решения этой задачи воспользуемся формулой (16). Предварительно введем обозначения для пяти характерных точек поверхности $\mathfrak{R}$: (z_1, w_1), (z_2, w_2), (z_3, w_3), (∞, w_4), $(\infty, \widetilde{w})$. Первые четыре точки — это точки ветвления поверхности $\mathfrak{R}$, а последняя — бесконечно удаленная точка, не являющаяся точкой ветвления. Неизвестные параметры w_1, w_2, w_3, w_4, $\widetilde{w}$ являются прообразами соответствующих точек при искомом гомеоморфизме $\widehat{\mathbf{C}}_w \to \mathfrak{R}$. Желая обеспечить единственность отображающей функции, полагаем $w_1 = 1$, $w_4 = \infty$, $\widetilde{w} = 0$. Таким образом, осталось два неизвестных параметра: w_2 и w_3. Учитывая это и используя формулу (16), для отображающей функции имеем следующее выражение:

$$z = z_1 + \gamma_0 \int\limits_1^w \frac{(\xi-1)(\xi-w_2)(\xi-w_3)}{\xi^2}\, d\xi. \tag{28}$$

Здесь $\gamma_0 \neq 0$ — неизвестный параметр, а система (17) в данном случае приобретает вид

$$\begin{gathered}
\operatorname{res}\xi = 0 \left[\frac{(\xi-1)(\xi-w_2)(\xi-w_3)}{\xi^2}\right] = 0;\\
z_2 = z_1 + \gamma_0 \int\limits_1^{w_2} \frac{(\xi-1)(\xi-w_2)(\xi-w_3)}{\xi^2}\, d\xi = 0;\\
z_3 = z_1 + \gamma_0 \int\limits_1^{w_3} \frac{(\xi-1)(\xi-w_2)(\xi-w_3)}{\xi^2}\, d\xi = 0.
\end{gathered} \tag{29}$$

Вычисляя вычет и интегралы, преобразуем уравнение (28) и систему (29) соответственно к виду

$$z = z_1 + \gamma_0(w-1)\left[\frac{w+1}{2} - (1+w_2+w_3) - \frac{w_2 w_3}{w}\right]; \tag{30}$$

$$\begin{gathered}
w_2 + w_3 + w_2 w_3 = 0; \quad \frac{z_2 - z_1}{\gamma_0} = \frac{1-w_2}{2}(1 + w_2 + 4w_3);\\
\frac{z_3 - z_1}{\gamma_0} = \frac{1-w_3}{2}(1 + w_3 + 4w_2).
\end{gathered} \tag{31}$$

Исключая из этой системы w_3, найдем

$$\frac{z_2 - z_1}{\gamma_0} = \frac{(1-w_2)^3}{2(1+w_2)}; \quad \frac{z_3 - z_1}{\gamma_0} = \frac{(1+2w_2)^3}{2(1+w_2)}.$$

Деля первое из этих уравнений на второе, получим

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \left(\frac{1-w_2}{1+2w_2}\right)^3,$$

откуда

$$w_2 = \frac{1 - \sqrt[3]{(z_2 - z_1)/(z_3 - z_1)}}{1 + 2\sqrt[3]{(z_2 - z_1)/(z_3 - z_1)}}$$

и, значит,

$$w_3 = \frac{-1 + \sqrt[3]{(z_2 - z_1/z_3 - z_1)}}{2 + \sqrt[3]{(z_2 - z_1/z_3 - z_1)}};$$

затем из (31) находим γ_0. Итак, отображающая функция вычисляется по формуле (30).

4. Алгоритм нахождения глобальной униформизации произвольного алгебраического соответствия

Итак, пусть задано алгебраическое соответствие

$$f(z, w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0, \tag{32}$$

где $a_1(z), \ldots, a_n(z)$ — многочлены от z над полем $\mathbf{C}$. Предполагая, что уравнение (32) неприводимо над полем рациональных функций, поставим задачу нахождения глобальной униформизации соответствия (32). Сначала дадим точное определение этого понятия.

Определение 1. Глобальной униформизацией неприводимого алгебраического соответствия (32) называется пара однозначных функций $z = \varphi(t)$, $w = \psi(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) они мероморфны внутри некоторой области $D \subset \widehat{\mathbf{C}}_t$ с кусочно-гладким краем ∂D;

(b) они непрерывны в топологии $\widehat{\mathbf{C}}$ на компактификации Мазуркевича $D \cup \partial D$ области D;

(c) для всех $t \in D \cup \partial D$ выполняется равенство $f[\varphi(t), \psi(t)] = 0$;

(d) отображение $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ области с краем $D \cup \partial D$ на риманову поверхность, заданную уравнением $f(z, w) = 0$, инъективное в D и сюръективное в $D \cup \partial D$.

Таким образом, глобально униформизировать многозначное соответствие — это значит представить соответствующую ему риманову поверхность в виде связной односвязной области с краем, различные участки края которой склеиваются между собой по некоторому закону. Такое представление римановой поверхности довольно удобно по следующим причинам. Во-первых, отпадает необходимость следить за «переплетением листов», когда риманова поверхность задается в виде многолистного накрытия. Во-вторых, глобальная униформизация позволяет сводить различные задачи на римановых поверхностях к соответствующим задачам на плоскости, тем самым упрощая их.

Процесс нахождения глобальной униформизации начинается с того, что к уравнению (32) применяется изложенная в § 2 процедура нахождения соответствующего ему гомоморфизма монодромии $g : \mathscr{F} \to S_n$. Допустим, что это уже сделано и что группа монодромии $g(\mathscr{F})$ действует транзитивно.

По образующим группы монодромии $g(\mathscr{F})$ можно вычислить род римановой поверхности $\mathfrak{R}$, заданной уравнением (32). Если окажется, что $\mathfrak{R}$ — поверхность рода нуль, то это будет означать, что соответствие (32) можно униформизировать рациональными функциями. Это, как уже отмечалось, можно сделать, найдя в поле алгебраических функций, порожденных уравнением (32), функцию, имеющую единственный простой полюс. Другой способ — применить теорему 1. Во всяком случае задачу униформизации соответствия рода нуль считаем решенной.

Предположим теперь, что род ρ поверхности $\mathfrak{R}$ положителен. Так как $\rho = \frac{1}{2}\omega_z - n + 1 > 0$, для таких поверхностей выполняется неравенство $\omega_z > 2n - 2$, где ω_z — индекс ветвления.

Для дальнейшего образующие группы монодромии удобно представлять в виде (12). С этой целью и лист $\widetilde{D}$, где выделяются однозначные ветви функции $w = w(z)$, удобно представлять себе не так, как на рис. 1, а так, как на рис. 3, т. е. проводя разрезы в виде параллельных лучей, соединяющих точки z_k с точкой ∞.

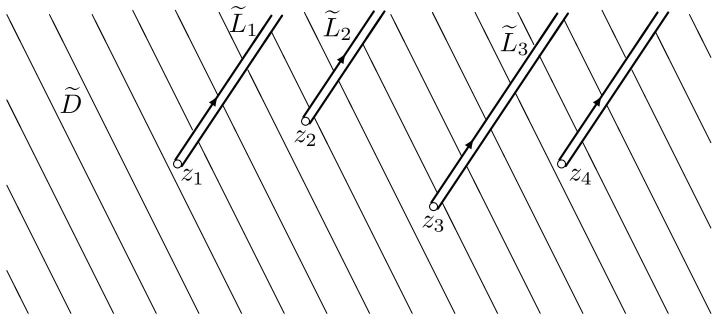

Рис. 3. Лист $\widetilde{D}$

Тогда подстановка τ_k из (12) будет описывать результат аналитического продолжения вектора $(w_1(z), \ldots, w_n(z))$ вдоль маленькой окружности, которая по часовой стрелке «охватывает» точку z_k, а подстановка $\tau_{m+1} = \tau_m^{-1}\tau_{m-1}^{-1}\ldots\tau_1^{-1}$ — результат аналитического продолжения вдоль кривой, обходящей точку ∞.

Изменив надлежащим образом закон склеивания листов римановой поверхности $\mathfrak{R}$, построим теперь новую n-листную риманову поверхность $\mathscr{M}$ с теми же проекциями точек ветвления, но так, чтобы род поверхности $\mathscr{M}$ равнялся нулю. Ниже излагается алгоритм построения этой новой поверхности.

Сначала по поверхности $\mathfrak{R}$ строится граф Γ с n вершинами, которые занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. Этот граф предназначается для описания закона склеивания листов поверхности $\mathfrak{R}$ и строится следующим образом. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — подстановки (12), описывающие закон склеивания листов поверхности на разрезах $\widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_m$ соответственно (см. рис. 3). Вершины с номерами k и $\tau_\nu(k)$ соединим дугами. Каждую такую дугу пометим значком $\widetilde{L}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$). Для построенного таким образом графа Γ обозначим через Γ' его остовное дерево. На римановой поверхности $\mathfrak{R}$ проведем разрезы по всем линиям, лежащим над $\widetilde{L}_\nu$, кроме тех, связь по которым соответствует дугам остовного дерева Γ'. Выбрасывая из $\mathfrak{R}$ все эти разрезы, получим открытое множество $D' \subset \mathfrak{R}$, которое является областью, т. е. связно, поскольку граф Γ' связен. Заметим, что граф Γ' состоит из n вершин и $n-1$ дуг, соединяющих вершины. Рассмотрим подграфы Γ'_ν графа Γ', каждый из которых состоит из тех дуг, которые помечены знаком $\widetilde{L}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, m$). Очевидно, что каждый такой подграф распадается на связные компоненты (цепи) $k_{\nu 1}, k_{\nu 2}, \ldots, k_{\nu\sigma}$, где каждая вершина $k_{\nu i}$ соединена с последующей вершиной $k_{\nu i+1}$ дугой. Каждой такой цепи сопоставим цикл

$$(k_{\nu 1}\, k_{\nu 2} \dots k_{\nu\sigma}) = \begin{pmatrix} k_{\nu 1} & k_{\nu 2} & \dots & k_{\nu\sigma} \\ k_{\nu 2} & k_{\nu 3} & \dots & k_{\nu 1} \end{pmatrix}.$$

Циклы, из которых состоит граф Γ'_ν, независимы. Пусть σ_ν — подстановка длины n, равная произведению этих циклов. Образуем теперь поверхность $\mathscr{M}$, склеивая края области D' по закону подстановок σ_ν вдоль линий, лежащих над $\widetilde{L}_\nu^\pm$. Поверхность $\mathscr{M}$ связная, ибо связна область D'. Более того, она односвязная, так как ее индекс разветвления ω_z равен удвоенной сумме всех чисел $\sigma - 1$, где σ — длина цикла. Но число $\sigma - 1$ равно числу дуг, образующих цепь. А поскольку общее число дуг равно $n-1$, то $\omega_z = 2(n-1)$ и, значит, род поверхности $\mathscr{M}$ равен нулю.

Применяя теорему 1, найдем рациональную функцию $z = \varphi(t)$, реализующую конформный гомеоморфизм $\varphi : \widehat{\mathbf{C}}_t \to \mathscr{M}$. Далее, в области $\widetilde{D} = \mathbf{C}_z \setminus \widetilde{L}$, где $\widetilde{L} = \widetilde{L}_1 \cup \widetilde{L}_2 \cup \ldots \cup \widetilde{L}_m$, с краем $\partial\widetilde{D}$ имеется n однозначных ветвей $w = w_1(z), \dots, w = w_n(z)$ функции w, заданной неявно уравнением $f(z,w) = 0$.

Обозначая

$$\psi(t) = \begin{cases} w_1[\varphi(t)], & \text{если } \varphi(t) \text{ принадлежит 1-му листу поверхности } \mathscr{M}, \\ \dots\dots\dots \\ w_n[\varphi(t)], & \text{если } \varphi(t) \text{ принадлежит } n\text{-му листу поверхности } \mathscr{M}, \end{cases}$$

где $t \in D = \varphi^{-1}(D')$, заключаем, что функции $z = \varphi(t)$ и $w = \psi(t)$ вместе с областью $D \subset \widehat{\mathbf{C}}_t$ дают искомую глобальную униформизацию алгебраического соответствия $f(z,w) = 0$.

Итак, установлена

Теорема 2. *Для любого аналитического соответствия, заданного неприводимым алгебраическим уравнением $f(z,w) = 0$, существует его глобальная униформизация $z = \varphi(t)$, $w = \psi(t)$ такая, что функция φ рациональна, а функция ψ — ветвь алгебраической.*

5. Примеры

1. Построим глобальную униформизацию гиперэллиптического соответствия

$$w^2 = z\big(a_1^2 - z\big) \cdot \ldots \cdot \big(a_k^2 - z\big), \tag{33}$$

где $0 < a_1 < \ldots < a_k < +\infty$ — заданные числа.

Геометрически риманову поверхность (33) можно представить себе в виде двух экземпляров плоскости, разрезанной вдоль отрезков $\big[0; a_1^2\big]$, $\big[a_2^2; a_3^2\big]$, $\big[a_4^2; a_5^2\big], \ldots$. Берега разрезов склеены между собой по правилу «крест-накрест». Для построения униформизации возьмем в качестве области с краем $D \cup \partial D$ плоскость, разрезанную по лучу $\big[a_1^2; +\infty\big]$. Тогда глобальную униформизацию соответствия (33) можно взять в виде $z = t^2$, $w = t\sqrt{(a_1^2 - t^2)\ldots(a_k^2 - t^2)}$, где однозначная ветвь корня фиксируется условием: $w = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k t + \ldots$ в окрестности нуля.

Область плоскости униформизирующего параметра показана на рис. 4.

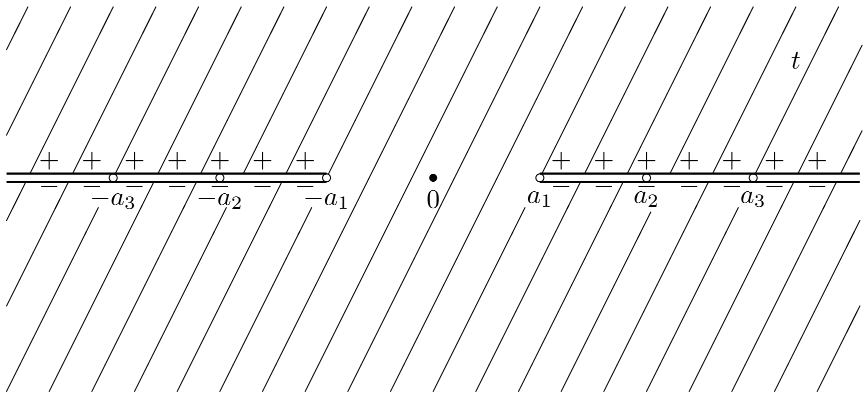

Рис. 4. $\widehat{\mathbf{C}}_t$

Склеивание точек края производится по закону:

$$\left.\begin{array}{l} t^+ \leftrightarrow -t^+ \\ t^- \leftrightarrow -t^- \end{array}\right\} \text{ при } t \in [a_1, a_2], \quad \left.\begin{array}{l} t^+ \longleftrightarrow -t^- \\ t^- \longleftrightarrow -t^+ \end{array}\right\} \text{ при } t \in [a_2, a_3]\ldots.$$

Аналогично можно униформизировать произвольное двулистное накрытие сферы $\widehat{\mathbf{C}}_z$.

2. Предположим, что одна из образующих (12) группы монодромии $g(\mathscr{F})$ является циклом. Пусть для определенности

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда глобальную униформизацию алгебраического соответствия $f(z, w) = 0$ можно взять в виде $z = z_1 + t^n$, $w = \psi(t)$, где область изменения параметра t показана на рис. 5.

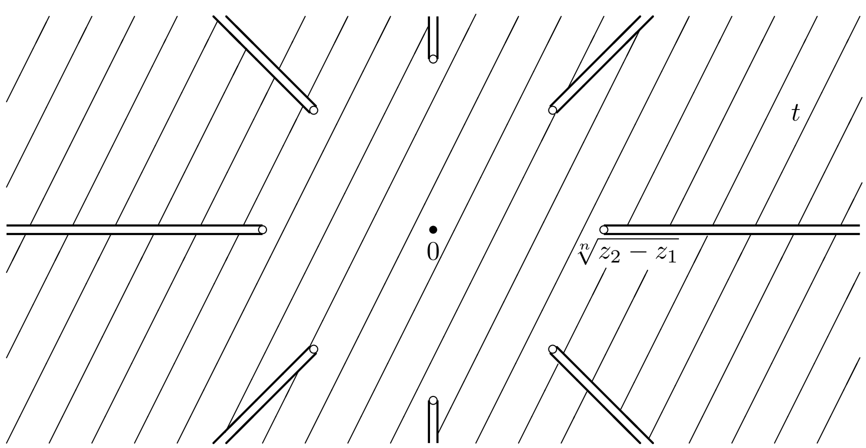

Рис. 5. $\widehat{\mathbf{C}}_t$

Здесь образом объединения листов $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k \cup \partial D_k$, один из которых изображен на рис. 3, является сфера $\widehat{\mathbf{C}}_t$ с «радиальными» разрезами, соединяющими точки

$\sqrt[n]{z_k - z_1}$ с точкой ∞. Закон, по которому должны склеиваться части края области, изображенной на рис. 5, можно вычислить по остальным образующим $\tau_2, \dots, \tau_m$ группы $g(\mathscr{F})$.

3. Рассмотрим вопрос об униформизации произвольного неприводимого алгебраического соответствия степени 3 по переменной w:

$$w^3 + a_1(z)w^2 + a_2(z)w + a_3(z) = 0. \tag{34}$$

Обозначим через $z_1, z_2, \dots, z_m, \infty$ все точки, над которыми риманова поверхность (34) может разветвляться, и пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}$ — образующие (12) ее группы монодромии $g(\mathscr{F})$. Если среди подстановок τ_k есть цикл, то для униформизации соответствия (34) можно применить процедуру, изложенную в предыдущем пункте. Поэтому предположим, что ни одна из подстановок τ_k не является циклом. Но тогда, нумеруя надлежащим образом листы, можно считать, что $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Кроме того, должно быть $m \geq 3$, иначе среди подстановок τ_k либо будет цикл, либо группа $g(\mathscr{F})$ не будет действовать транзитивно. Но обе эти возможности мы исключили.

Соединяя последовательно точки $z_1, z_2, \dots, z_m, \infty$, введем в рассмотрение три экземпляра листа, изображенного на рис. 1. Склеим их между собой по закону подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ на разрезе (z_1, z_2), по закону подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ на разрезе (z_2, z_3) и по закону подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ на разрезе (z_3, ∞).

В результате склеивания возникает трехлистная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ рода нуль, та самая, конформный гомеоморфизм которой на сферу $\widehat{\mathbf{C}}_w$ был найден в конце § 3 (формула (30)). Используя его, получим искомую глобальную униформизацию $z = \varphi(t)$, $w = \psi(t)$ соответствия (34), в которой

$$\varphi(t) = z_1 + \gamma_0(t-1)\left[\frac{t+1}{2} - (1 + w_2 + w_3) - \frac{w_2 w_3}{t}\right],$$

$$\psi(t) = \begin{cases} w_1[\varphi(t)], & t \in \varphi^{-1}(D_1), \\ w_2[\varphi(t)], & t \in \varphi^{-1}(D_2), \\ w_3[\varphi(t)], & t \in \varphi^{-1}(D_3), \end{cases}$$

где γ_0, w_2, w_3 — параметры, найденные из системы (31); D_1, D_2, D_3 — листы римановой поверхности, заданной уравнением (34); а $w_1(z)$, $w_2(z)$, $w_3(z)$ — ветви функции $w(z)$, заданной неявно уравнением (34), однозначные и аналитические на соответствующих листах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М.: Гостехиздат, 1948.
2. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
3. *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
4. *Неванлинна Р.* Униформизация. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
5. *Форд Л. Р.* Автоморфные функции. М.; Л.: ГОНТИ, 1936.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
7. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990.

8. *Зверович Э. И.* О возможности явного построения глобальной униформизации алгебраического соответствия // Вестник БГУ. Сер. 1. № 1. Минск, 1991. С. 36–39.

9. *Долгополова О. Б., Зверович Э. И.* Униформизация алгебраических соответствий // Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление. Минск: БГУ, 1996. С. 76–80.

10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 11 февраля 1998 г.

г. Минск