Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 518:517.948

НОВЫЙ МЕТОД МОНТЕ–КАРЛО ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Г. А. Михайлов, А. В. Бурмистров

Аннотация: Построены специальное вероятностное представление и соответствующий метод Монте-Карло для решения стационарного диффузионного уравнения с вырождающимся на границе конвективным слагаемым. Этот метод практически важен, в частности, потому, что дискретная численная реализация стандартного вероятностного представления в стационарном случае допускает удовлетворительную оценку детерминированной погрешности лишь для достаточно малых областей. Кроме того, предлагаемый метод позволяет получать асимптотически несмещенные оценки параметрических производных и градиента решения, а также оценивать вероятностные моменты решения в задачах со случайными параметрами. Показано также, что от условия вырождения конвективного слагаемого можно освободиться, переходя к прямому моделированию диффузионных траекторий в некотором пограничном слое. Библиогр. 6.

В работе построены специальное вероятностное представление и соответствующий метод Монте-Карло для решения стационарного диффузионного уравнения с вырождающимся на границе конвективным слагаемым. Этот метод практически важен, в частности, потому, что дискретная численная реализация стандартного вероятностного представления в стационарном случае допускает удовлетворительную оценку детерминированной погрешности лишь для достаточно малых областей. Кроме того, предлагаемый метод позволяет получать асимптотически несмещенные оценки параметрических производных и градиента решения, а также оценивать вероятностные моменты решения в задачах со случайными параметрами. Показано также, что от условия вырождения конвективного слагаемого можно освободиться, переходя к прямому моделированию диффузионных траекторий в некотором пограничном слое.

1. Оценка решений на основе «блуждания по сферам и шарам»

Рассмотрим трехмерную задачу Дирихле для уравнения

$$\Delta u + (v, \operatorname{grad} u) + cu = -g, \quad u|_\Gamma = \psi \tag{1.1}$$

в области Ω с границей Γ, которая предполагается односвязной и кусочно-гладкой. Будем полагать также, что функции v, c и g удовлетворяют условию Гёльдера в $\overline{\Omega}$, а функция ψ непрерывна на Γ. Пусть Γ_ε — ε-окрестность Γ,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант № 3759) и ФЦП «Интеграция».

$D(r)$ — максимальный из шаров с центром в точке r, целиком лежащих в $\overline{\Omega}$, $S(r)$ — соответствующая сфера радиуса $d = d(r)$. Для функции $u(r)$ можно записать интегральное уравнение [1], которое в $\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon$ имеет вид

$$u_1(r) = \frac{1}{4\pi d^2(r)} \int\limits_{S(r)} u_1(r'(s))\, ds + \int\limits_{D(r)} G_r(r') c(r') u_1(r')\, dr' + \int\limits_{D(r)} G_r(r')(v(r'), \operatorname{grad} u_1(r'))\, dr' + \int\limits_{D(r)} G_r(r') g(r')\, dr'. \quad (1.2)$$

Для $r \in \Gamma_\varepsilon$ полагаем $u_1 \equiv u$. Здесь

$$G_r(r') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|r - r'|} - \frac{1}{d}\right)$$

— «центральная» функция Грина для шара $D(r)$. Пусть единичный вектор направления скорости v обозначается через l, т. е. $l = v/|v|$. Для построения уравнения относительно $(\operatorname{grad} u_1(r))_l \equiv \partial u_1/\partial l$ запишем уравнение для u_1 в точке $q = r + tl$:

$$u_1(q) = \int\limits_{S(r)} p(r'(s), t) u_1(r'(s))\, ds + \int\limits_{D(r)} G_l(r, r') c(r') u_1(r')\, dr' + \int\limits_{D(r)} G_l(r, r')(v(r'), \operatorname{grad} u_1(r'))\, dr' + \int\limits_{D(r)} G_l(r, r') g(r')\, dr'. \quad (1.3)$$

«Нецентральная» функция Грина и ее нормальная производная выражаются формулами (см. [1])

$$\begin{aligned} G_l(r, r') &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|r' - q|} - \frac{d}{(t^2 r'^2 + d^4 - 2d^2 t r' a_l)^{1/2}}\right), \\ p(r', t) &= \frac{1}{4\pi} \frac{d^2 - t^2}{d(d^2 + t^2 - 2tda_l)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $a_l(r, r') = (r' - r, l)/|r' - r|$ — косинус угла между ортом l и вектором $r' - r$.

Продифференцируем соотношение (1.3) по t, учитывая, что $G_l(r, r')$ и $p(r', t)$ определяются выражениями (1.4) и, положив $t = 0$, получим следующее уравнение для $\partial u_1/\partial l$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial l}(r) = \int\limits_{S(r)} \frac{3a_l(r, r'(s)) u_1(r'(s))}{4\pi d^3(r)}\, ds + \int\limits_{D(r)} \frac{\partial G_l}{\partial l}(r, r') c(r') u_1(r')\, dr' + \int\limits_{D(r)} \frac{\partial G_l}{\partial l}(r, r')(v(r'), \operatorname{grad} u_1(r'))\, dr' + \int\limits_{D(r)} \frac{\partial G_l}{\partial l}(r, r') g(r')\, dr'. \quad (1.5)$$

Заметим, что функции

$$F_0(r, r') = \frac{6G_r(r')}{d^2(r)}, \quad F(r, r') = \frac{4}{3d(r) a_l} \frac{\partial G_l}{\partial l}(r, r') = \frac{d^3 - |r - r'|^3}{3\pi d^4 |r - r'|^2}$$

являются плотностями вероятностей в шаре $D(r)$. В целях построения алгоритмов метода Монте-Карло уравнения (1.2) и (1.5) далее объединяются в одно интегроалгебраическое уравнение с помощью специального расширения фазового пространства. При этом оказывается целесообразным рассмотрение величины $(v, \operatorname{grad} u)$ в переменной системе координат с ортом $l(r) = v(r)/|v(r)|$, в которой $(v, \operatorname{grad} u) = v \cdot \frac{\partial u}{\partial l}$. Кроме того, будет осуществлен переход от функции $\frac{\partial u}{\partial l}(r)$ к функции $\frac{d(r)}{3}\frac{\partial u}{\partial l}(r)$.

Расширим фазовое пространство дискретной переменной j: $j = 0$ или $j = 1$. Обозначим $w = (r, j)$ и введем также следующие обозначения:

$$U(w) = U(r,j) = \begin{cases} u(r), & j = 0, \\ \frac{d(r)}{3}\frac{\partial u}{\partial l}(r), & j = 1, \end{cases} \qquad k(w,w') = \begin{cases} F_0(r,r')/2, & j = 0, \\ F(r,r')/2, & j = 1, \end{cases}$$

$$H(w) = \begin{cases} \int\limits_{D(r)} G_r(r')g(r')\,dr', & j = 0, \\ \frac{d(r)}{3} \int\limits_{D(r)} \frac{\partial G_l}{\partial l}(r,r')g(r')\,dr', & j = 1, \end{cases} \qquad a(w,w') = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ a_l(r,r'), & j = 1, \end{cases}$$

$$M(w,w') = \begin{cases} 2c(r')/c_0, & j = 0,\ j' = 0, \\ 6v(r')/(c_0 d(r')), & j = 0,\ j' = 1, \\ 3c(r')a_l(r,r')/c_0, & j = 1,\ j' = 0, \\ 9v(r')a_l(r,r')/(c_0 d(r')), & j = 1,\ j' = 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь c_0 — константа, удовлетворяющая неравенству $c_0 d_{\max}^2 < 6$. С учетом введенных обозначений запишем систему интегральных уравнений (1.2), (1.5) в виде

$$U_1(w) = H(w) + \left[1 - \frac{c_0 d^2(r)}{6}\right] \int\limits_{S(r)} \frac{a(w, r'(s), 0)}{1 - c_0 d^2/6} \frac{U_1(r'(s), 0)}{4\pi d^2(r)}\,ds$$

$$+ \left[\frac{c_0 d^2(r)}{6}\right] \sum_{j'=0}^{1} \int\limits_{D(r)} M(w,w')k(w,w')U_1(w')\,dr',\ r \in \Omega \backslash \Gamma_\varepsilon,\ U_1(w) \equiv U(w),\ r \in \Gamma_\varepsilon. \tag{1.7}$$

Оценка метода Монте-Карло для $U(w)$ соответственно (1.7) строится следующим образом.

С вероятностью $1 - c_0 d^2(r_n)/6$ новая точка r_{n+1} выбирается равномерно на сфере $S(r_n)$, вес Q_n умножается на величину

$$\frac{a(w_n, w_{n+1})}{1 - c_0 d^2(r_n)/6},$$

причем j_{n+1} полагается равным 0.

С вероятностью $c_0 d^2(r_n)/6$ точка r_{n+1} выбирается в шаре $D(r_n)$ по плотности $2k(w_n, w')$. Затем величина j_{n+1} равновероятно принимает одно из значений: либо 0, либо 1, и, наконец, вес Q_n умножается на величину $M(w_n, w_{n+1})$.

В процессе моделирования описанного «блуждания по сферам и шарам» при попадании в Γ_ε на шаге со случайным номером N цепь обрывается и в счетчик дополнительно суммируется оценка решения, умноженная на вес. В результате получается следующая случайная оценка для $U(w_0)$:

$$\xi(w_0) = \sum_{n=0}^{N} Q_n H(w_n), \text{ где } Q_n = \prod_{i=1}^{m_n} M(w_{k_i - 1}, w_{k_i}) \prod_{i=1}^{n-m_n} \frac{a(w_{t_i - 1}, w_{t_i})}{1 - c_0 d^2(r_{t_i - 1})/6}.$$

Здесь $\{r_{t_i}\}$, $i = 1, \dots, n - m_n$, — точки, выбранные на сферах; $\{r_{k_i}\}$, $i = 1, \dots, m_n$, — точки, выбранные в шарах. Функции $H(w) = H(r,j) = h_j(r)$ можно оценивать методом Монте-Карло по одному «случайному узлу» [2].

2. Асимптотическая несмещенность и равномерная ограниченность дисперсии оценки

Лемма 1. *Пусть выполняются условия*

$$|c(r)| \le \frac{c_0}{3}, \quad |v| \le \frac{c_0}{9} d(r) \tag{2.1}$$

при $c_0 < 6c^*/\pi^2$, *где* $-c^*$ *— первое собственное число оператора Лапласа в* Ω. *Тогда ряд Неймана для уравнения* (1.7) *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{6}{x^2}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1 - \frac{6}{5!}x^2 + \frac{6}{7!}x^4 - \frac{6}{9!}x^6 + \dots .$$

Легко показать, что на отрезке $[0, \pi]$ функция $f(x)$ убывает от 1 до $6/\pi^2$. С другой стороны, из неравенства $c_0/c^* < f(x)$ следует неравенство

$$\frac{1}{1 - c_0 d_i^2/6} < \frac{d_i\sqrt{c^*}}{\sin d_i\sqrt{c^*}}, \tag{2.2}$$

где

$$x = d_i\sqrt{c^*} \le d_{\max}\sqrt{c^*} \le \pi.$$

С учетом неравенств (2.1) соотношение (2.2) означает, что величина $\xi(w_0)$ почленно мажорируется некоторой стандартной оценкой ζ на «блуждании по сферам» (не обязательно максимальным), для которой ряд Неймана сходится [1]. $\square$

Заметим, что для конкретных видов областей условие $c_0/c^* < 6/\pi^2 \approx 0,6079$ может быть расширено с учетом точного значения $d_{\max}$. Например, для куба с ребром b имеем $c^* = 3\pi^2/b^2; d_{\max} = b/2; c_0/c^* \le 0,6888$.

Лемма 2. *Пусть* U_0 *— ряд Неймана и* K_0 *— интегральный оператор уравнения* (1.7) *при* $a_l \equiv 1$, $c \equiv c_0/3$, $0 < c_0 < 6c^*/\pi^2$, $g \equiv g_0 > 0$,

$$v_0(r) = \frac{c_0 d(r)}{9}\frac{v}{|v|}\operatorname{sgn} U_0(r, 1).$$

Кроме того, пусть в Γ_ε *выполнены следующие соотношения:* $U_0(r, 1) = C^0$, $U_0(r, 0) = u_0$, *где*

$$\Delta u_0 + c u_0 = -g_0, \quad u_0|_\Gamma = C^0. \tag{2.3}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} K_0^n U_0(w) = 0$ *и* $U_0(w) \ge C^0$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из представления

$$U_0(w) = \sum_{i=0}^{n} K_0^i H_0 + K_0^{n+1} U_0(w),$$

которое связано с тем, что ряд Неймана в условиях леммы сходится (см. доказательство леммы 1) и удовлетворяет уравнению $U_0 = K_0 U_0 + H_0$. Далее, в области $\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon$ функция $U_0(r, 0)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$U_0(r, 0) = \int\limits_{S(r)} \frac{U_0(r'(s), 0)}{4\pi d^2(r)}\, ds + \frac{c_0 d^2(r)}{18} \int\limits_{D(r)} F_0(r, r')[U_0(r', 0) + |U_0(r', 1)|]dr' + \frac{d^2 g_0}{6}.$$

С другой стороны, функция $u_0(r)$ в $\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon$ удовлетворяет уравнению

$$u_0(r) = \int\limits_{S(r)} \frac{u_0(r'(s))}{4\pi d^2(r)}\,ds + \frac{c_0 d^2(r)}{18} \int\limits_{D(r)} F_0(r,r')u_0(r')dr' + \frac{d^2 g_0}{6}.$$

Следовательно,

$$U_0(r,0) \geq u_0(r) \geq C^0.$$

Далее, используя полученную оценку для $U_0(r,0)$ и интегральное уравнение для $U_0(r,1)$, имеем

$$\frac{d(r)}{3}\frac{\partial u_0}{\partial l}(r) = \int\limits_{S(r)} \frac{u_0(r'(s))}{4\pi d^2}\,ds + \frac{d^2}{4} \int\limits_{D(r)} \frac{c_0}{3} F(r,r')u_0(r')\,dr' + g_0\frac{d^2}{4}$$
$$+ \int\limits_{D(r)} \frac{d^2}{4} F(r,r')v_0(r')\frac{\partial u_0}{\partial l}(r')\,dr' \geq C^0 + d^2\,\mathrm{const} \geq C^0.$$

Это заканчивает доказательство второго утверждения леммы. $\square$

Теорема 1. *В условиях леммы* 1 *существует единственное ограниченное решение уравнения* (1.7), *представимое соответствующим рядом Неймана, причем*

$$U_1(r,0) = u(r), \quad U_1(r,1) = \frac{d(r)}{3}\frac{\partial u}{\partial l}(r).$$

Доказательство. Пусть решение $u(r)$ таково, что

$$|u(r)| \leq C_1, \quad \left|\frac{d(r)}{3}\frac{\partial u}{\partial l}\right| \leq C_1.$$

Тогда

$$U_1 = \sum_{i=0}^{n} K^i H + K^{n+1}U_1, \quad |K^{n+1}U_1| \leq \frac{C_1}{C^0} K^{n+1} U_0,$$

Отсюда следует представление U_1 в виде ряда Неймана. Последние утверждения теоремы выполняются в силу единственности ограниченного решения исходной дифференциальной задачи. $\square$

Замечание. Для оценки производной от решения u по любому направлению μ (а не только по направлению скорости v) на первом шаге алгоритма следует использовать представление для $\frac{d(r)}{3}\frac{\partial u}{\partial \mu}$, аналогичное (1.7):

$$\frac{d(r)}{3}\frac{\partial u}{\partial \mu}(r) = h_\mu(r) + \left[1 - \frac{c_0 d^2(r)}{6}\right] \int\limits_{S(r)} \frac{a_\mu u(r'(s))}{1 - c_0 d^2/6} \frac{ds}{4\pi d^2(r)}$$
$$+ \left[\frac{c_0 d^2(r)}{6}\right] \int\limits_{D(r)} \left(\frac{3a_\mu c(r')}{2c_0} u(r') + \frac{3a_\mu v(r')}{2c_0}\frac{\partial u}{\partial l}(r')\right) F(r,r')\,dr'. \quad (2.4)$$

После указанной выше рандомизации представления (2.4) далее реализуется алгоритм моделирования, связанный с ортом $l(r)$.

Поскольку значения $U(w)$ неизвестны в Γ_ε, то строятся оценки этих значений следующим образом. Для $j_N = 0$ можно положить

$$H(r_N, 0) = u(r_N) = \psi(r_N^*),$$

где $r_N^* \in \Gamma$, $r_N \in \Gamma_\varepsilon$, $|r_N - r_N^*| = d(r_N)$. Будем предполагать, что первые производные решения ограничены в Ω, т. е.

$$\frac{d(r)}{3}\frac{\partial u}{\partial l} = O(\varepsilon) \quad \text{при } r \in \Gamma_\varepsilon.$$

Следовательно, для $j_N = 1$ можно приближенно положить $H(r_N, j_N) = 0$. В результате получаем смещенную оценку решения $\xi_\varepsilon(w_0)$.

Теорема 2. *Пусть первые производные функции $u(r)$ ограничены в Ω и выполняются условия леммы* 1. *Тогда* $\mathrm{E}\xi_\varepsilon(r,0) = u_\varepsilon(r)$ *существует и*

$$|u(r) - u_\varepsilon(r)| \le C_2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad r \in \Omega.$$

Кроме того, $\mathrm{E}\xi_\varepsilon(r,1) = f_{l\varepsilon}(r)$ *существует и*

$$\left|\frac{d(r)}{3}\frac{\partial u}{\partial l} - f_{l\varepsilon}(r)\right| \le C_3\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad r \in \Omega.$$

Доказательство. Очевидно, что выполняются соотношения

$$\xi - \xi_\varepsilon = Q_N[U(r_N, j) - \psi(r_N^*)(1-j)], \quad |\xi - \xi_\varepsilon| \le Q_N^{(0)} \cdot \varepsilon \cdot C_4,$$

где $Q_N^{(0)}$ — вес, соответствующий некоторой стандартной оценке на блуждании по сферам для случая $c < c^*$, $g \equiv 0$. $\square$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (2.8), $c_0 \le 0.488c^*$, *и* $g \equiv 0$. *Тогда* $\mathrm{D}\xi_\varepsilon < C_d < +\infty \ \forall \varepsilon > 0$.

Доказательство. Обозначим $y = c_0/c^*$, $t = d\sqrt{c^*}$. Прямые вычисления показывают, что величина

$$\max\left[y > 0 : \left(\frac{1}{1 - yt^2/6}\right)^2 \le \frac{t}{\sin t}\right]$$

достигается в точке y^* такой, что $0,488 < y^* < 0,489$, причем величина $\frac{t}{\sin t}(1 - yt^2/6)^2$ минимальна и равна единице для $t \approx 2,175$. Следовательно, величина ξ_ε^2 мажорируется так же, как ξ в доказательстве леммы 1. $\square$

В целях расширения условия конечности дисперсии осуществим следующую модификацию оценки. Будем вычислять функцию $H(r,j)$ только в случае шага $(r,j) \to (r',0)$, т. е. на сферу, но с весом $[1 - c_0 d^2(r)/6]^{-1}$. Таким образом, $H(r,j) \to \widetilde{H}(r,j)$:

$$\widetilde{H}(r_{k_i-1}, j) = 0, \quad \widetilde{H}(r_{t_i-1}, j) = \frac{1}{1 - c_0 d^2(r_{t_i-1})/6} H(r_{t_i-1}, j).$$

Вместо оценки ξ_ε тем самым будем рассматривать оценку $\xi_{\varepsilon,1}$, для которой $\mathrm{E}\xi_\varepsilon = \mathrm{E}\xi_{\varepsilon,1}$.

Теорема 4. *В условиях теоремы* 3 *для* $g \not\equiv 0$ *имеют место оценки* $\mathrm{D}\xi_{\varepsilon,1} < C_{d,1} < +\infty \ \forall \varepsilon > 0$.

Доказательство. В условиях теоремы выполняются неравенства

$$\frac{d\sqrt{c^*}}{\sin(d\sqrt{c^*})} - 1 > \left(\frac{1}{1 - c_0 d^2/6}\right)^2 - 1 \ge C_5 \cdot d^2.$$

Заметим еще, что $H(r,j) = O(d^2(r))$. Пусть $s(c,d) = \frac{d\sqrt{c}}{\sin(d\sqrt{c})}$. Тогда, почленно мажорируя величину $|\xi_{\varepsilon,1}|$ стандартной оценкой $\eta^{(0)}$ на «блуждании по сферам» для случая $c \equiv c_0/3 < 0,488c^*/3$ с заменой $H \to \widetilde{H}$, $3c/c_0 \to 1$, $a(w,w') \to 1$ имеем

$$|\xi_{\varepsilon,1}| \le \sum_{n=0}^{N} |Q_n||\widetilde{H}(w_n)| \le C_6 \sum_{i=0}^{N-m_N} \widetilde{Q}_i d_i^2$$
$$\le \frac{C_6}{C_5} \sum_{i=0}^{N-m_N} \left[\prod_{j=0}^{i-1} s(c,d_j)\right] \mathrm{E}q \cdot (s(c,d_i)-1)$$
$$= \frac{C_6}{C_5} \sum_{i=1}^{N-m_N} (\widetilde{Q}_i - \widetilde{Q}_{i-1}) = C_7\big(Q_N^{(0)} - 1\big). \quad (2.5)$$

Следовательно, $|\xi_{\varepsilon,1}| \le \eta^{(0)}$ $\forall \varepsilon > 0$, причем $\mathrm{D}\eta^{(0)} < +\infty$. $\square$

3. Комбинированная оценка для случая невырождающегося конвективного слагаемого

Введенное выше условие вырождения скорости у границы является довольно ограничительным, поэтому целесообразно рассмотреть комбинацию алгоритма «блуждания по сферам и шарам» с прямым моделированием диффузионного процесса. Напомним, что прямое численное моделирование процесса (например, по схеме Эйлера) осложняется тем обстоятельством, что в оценке детерминированной погрешности вида $C(T)\Delta t$, где Δt — шаг по времени, а T — полное время моделирования, величина $C(T)$ может расти экспоненциально: $C(T) = O(\exp(\alpha T))$ [3]. Граничные условия 1-го рода означают «поглощение» траектории на границе в случайный момент времени τ. Известно, что плотность распределения τ для областей, ограниченных хотя бы по части переменных, мажорируется экспонентой вида $\exp(-\beta t)$ [4]. Ясно, что оценку вида $C\Delta t$ для стационарной задачи (т. е. для $T = +\infty$) отсюда можно получить лишь при $\beta > \alpha$ (см., например, [5]). Поэтому переходить от «блуждания по сферам и шарам» к прямому моделированию диффузионной траектории целесообразно в достаточно узкой, но и не слишком малой окрестности границы Γ_b, для которой выполнены условия теоремы 1. Такое моделирование осуществляется очевидным способом: если $r_n \in \Gamma_b$, $j_n = 0$, то из точки r_n численно строится диффузионная траектория $\zeta(t)$ (см., например, [3, 5]) до поглощения на границе Γ или до выхода на внутреннюю границу слоя Γ_b (в точке r_{n+1}); дополнительное слагаемое здесь имеет вид [5]

$$Q_n g_\zeta(\tau) = Q_n \int_0^\tau g(\zeta(t)) \exp\left(\int_0^t c(\zeta(t'))dt'\right) dt, \quad (3.1)$$

а вес пересчитывается по формуле

$$Q_{n+1} = Q_n \exp\left(\int_0^\tau c(\zeta(t'))\, dt'\right).$$

Далее строится цепь блуждания «по сферам и шарам» из точки r_{n+1} и т. д. Затруднения, возникающие в связи с тем, что возможна реализация точки $(r_n \in \Gamma_b,\ j_n = 1)$, преодолеваются следующим образом. Будем полагать, что в полосе Γ_b осуществляется блуждание по «малым» сферам, т. е. при $r \in \Gamma_b$ вместо $d(r)$ при построении интегральных уравнений (1.7) используется величина $d_b \ll 1$. Кроме того, уравнения вида (2.4) рандомизируются с использованием вероятности $c_0 d/6$ вместо $c_0 d^2/6$, вследствие чего весовой множитель $1/d$ не реализуется. Нетрудно заметить, что здесь выполняется предельное соотношение

$$\lim_{d_b \to 0} \mathrm{P}(j_n = 1 \to j_{n+1} = 0,\ Q_{n+1} = Q_n a(r_n, r_{n+1})/[1 - c_0 d(r_n)/6]) = 1,$$

причем случайная величина $a(r_n, r_{n+1})$ равномерно распределена в $(-1, 1)$. Таким образом, в случае $r_n \in \Gamma_b$, $j_n = 1$, можно положить $j_n = 0$ и заменить Q_n на $Q_n a(r_n, r_{n+1})$.

Несмещенность и равномерная ограниченность дисперсии комбинированной оценки при точном построении диффузионной траектории могут быть обоснованы при некоторых дополнительных предположениях. В частности, достаточно ясным способом для этой оценки доказываются утверждения типа теорем 1, 3 в случае $c(r) \leq 0$. Простые соображения показывают также, что после указанной выше специальной модификации дисперсия комбинированной оценки становится равномерно ограниченной и для $g \not\equiv 0$, т. е. справедлива теорема 4, если выполняется условие $\mathrm{E}\tau_b^2 < +\infty$, где τ_b — случайное время пребывания в слое Γ_b дополнительно моделируемой диффузионной траектории.

Поскольку детерминированная погрешность комбинированной оценки «накапливается» лишь в полосе Γ_b, то здесь можно пользоваться значением $\beta = \beta_b$, которое соответствует этой полосе с учетом возможности возврата траектории; ясно, что $\beta_b \to +\infty$ при $b \to 0$.

Отметим, что использованный в лемме 1 (см. также [1]) способ обоснования несмещенности оценки требует выполнения неравенства $1/d \leq d\sqrt{c^*}/\sin(d\sqrt{c^*})$. Следовательно, величину b целесообразно полагать равной решению уравнения $1/b = b\sqrt{c^*}/\sin(b\sqrt{c^*})$, что, очевидно, дает значение $b < 1$.

Отметим также, что построенные алгоритмы с помощью «двойной рандомизации» [2] позволяют эффективно оценивать вероятностные моменты решения для задач со случайными функциональными параметрами. Нетрудно также получить оценки производных от решения по значениям функции $g(r)$ и скорости v в $\Omega \setminus \Gamma_b$.

В заключение заметим, что на эффективность предложенных алгоритмов отрицательно влияет знакопеременность величины $a(r, r')$. Поэтому здесь целесообразно использовать «метод противоположной переменной» [6], например, следующим образом: моделирование каждой траектории повторяется по тем же случайным числам, но при $j = 1$ направление вектора $r' - r$ меняется на противоположное.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов Г. А.* Новые методы Монте-Карло для решения уравнения Гельмгольца // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 6. С. 943–947.
2. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
3. *Artemiev S. S., Averina T. A.* Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. Utrecht; The Netherlands: VSP, 1997.
4. *Cvesielski Z., Tayler S. J.* First passage times and sojorn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103, N 3. P. 434–450.
5. *Михайлов Г. А., Бурмистров А. В.* Оценка «по времени» в методе Монте-Карло // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 1. С. 7–10.
6. *Hammersley I. M., Morton K. W.* A new Monte Carlo technique-antithetic variates // Proc. Cambrige Philos. Soc. 1956. V. 52. P. 449–475.

Статья поступила 10 июля 2000 г.

г. Новосибирск
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
gam@sscc.ru