Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 512:519.4

О СВЯЗИ ПРОБЛЕМЫ РАВЕНСТВА И РАЗРЕШИМОСТИ ЭКВАЦИОНАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

В. Ю. Попов

Аннотация: Доказано существование моногенного кольца с разрешимой проблемой равенства, эквациональная теория которого неразрешима. Библиогр. 2.

Пусть $\mathscr{K}$ — некоторая алгебраическая система, $\mathrm{var}\mathscr{K}$ — многообразие, порожденное $\mathscr{K}$. Очевидно, что если $\mathscr{K}$ свободна в многообразии $\mathrm{var}\mathscr{K}$, то разрешимость проблемы равенства в $\mathscr{K}$ равносильна разрешимости эквациональной теории $\mathscr{K}$. Однако если $\mathscr{K}$ не будет свободна в $\mathrm{var}\mathscr{K}$, то это не всегда так. В работе [1] построен пример группы с тремя образующими, для которой разрешима проблема равенства и неразрешима эквациональная теория. Там же отмечено, что существует группа с двумя образующими, удовлетворяющая тем же условиям. Цель настоящей заметки — построить аналогичный пример для колец.

Теорема. *Существует моногенное кольцо с разрешимой проблемой равенства, эквациональная теория которого неразрешима.*

Доказательство теоремы. Пусть P — простое множество [2]. По определению простого множества если B — бесконечное рекурсивно перечислимое множество, то $P \cap B \neq \varnothing$. Следовательно, множество $\mathbb{N}\backslash P$ содержит лишь конечные рекурсивно перечислимые подмножества. Отсюда непосредственно вытекает, что множество Q такое, что $P \subseteq Q$, рекурсивно тогда и только тогда, когда оно коконечно. Рассмотрим систему множеств $\mathbb{P} = \{Q \mid P \subseteq Q,\ \mathbb{N}\backslash Q$ конечно$\}$. Пусть $M = \bigcap\limits_{Q\in\mathbb{P}} Q$. По определению простого множества $\mathbb{N}\backslash P$ — бесконечное множество. Значит, множество $\mathbb{N}\backslash M$ бесконечно. По определению $\mathbb{P}$ множество M включает P. Поэтому $P \cap (\mathbb{N}\backslash M) = \varnothing$. Отсюда по определению простого множества получаем, что множество $\mathbb{N}\backslash M$ не является рекурсивно перечислимым. Итак, множество M не рекурсивно.

Пусть $\mathfrak{X}$ — многообразие колец, заданное тождествами

$$2x = 0, \quad (xy)(zt) = 0, \quad x(y(zt)) = 0,$$
$$A_i(A_j(A_2(x_1, x_2, x_3), \quad y_1, \dots, y_j), z_1, \dots, z_i) = 0,$$

где $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i(x_1, \dots, x_{i+1}) = x_{i+1}(x_1 \dots x_i)$, $x_1 \dots x_i$ — слово с правонормированной расстановкой скобок; $\mathbb{P} = \{Q_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и $\mathscr{K}$ — кольцо, порожденное элементом e и заданное в многообразии $\mathfrak{X}$ следующей системой определяющих соотношений: $A_m(A_{n+1}(e,\ldots,e), e,\ldots,e) = 0 \Leftrightarrow m \in Q_i$. Покажем, что в кольце $\mathscr{K}$ тождество $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $m \in M$.

Обозначим через F моногенное кольцо, свободное в многообразии, заданном тождествами $2x = 0$, $(xy)(zt) = 0$, $x(y(zt)) = 0$. Для удобства образующий кольца F, как и образующий кольца $\mathscr{K}$, будем обозначать буквой e. Пусть S_1 — множество элементов кольца F вида $A_m(A_{n+1}(e,\ldots,e),e,\ldots,e)$, где $m \in Q_n$, S_2 — множество элементов кольца F, полученных подстановкой всевозможных элементов кольца F вместо переменных в многочлены

$$A_i(A_j(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_j),z_1,\ldots,z_i),$$

где $i,j \in \mathbb{N}$, $S = S_1 \cup S_2$. Обозначим через I идеал кольца F, порожденный множеством S. Очевидно, что тождество $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) = 0$ выполняется в кольце $\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда для любых $x_1,x_2,x_3,y_1,\ldots,y_m$ из F многочлен $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m)$ принадлежит идеалу I.

Допустим, что $m \in M$. Покажем, что в кольце $\mathscr{K}$ выполняется тождество $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) = 0$. Для этого, как замечено выше, достаточно показать, что в кольце F для любых элементов $x_1,x_2,x_3,y_1,\ldots,y_m$ многочлен $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m)$ принадлежит идеалу I. В силу полилинейности многочлена $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m)$ достаточно показать, что в кольце F многочлен $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m)$ принадлежит идеалу I для любых одночленов $x_1,x_2,x_3,y_1,\ldots,y_m$. Допустим, что x_3 или y_i для некоторого i не является образующим. Тогда ввиду тождества $(xy)(zt) = 0$ в кольце F выполняется равенство $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) = 0$. Так как произвольный идеал содержит 0, то $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) \in I$. Если x_2 не является образующим, то в силу тождества $x(y(zt)) = 0$ в кольце F выполняется равенство $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) = 0$ и, следовательно, имеет место соотношение $A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) \in I$. Таким образом, достаточно показать, что одночлен $A_m(A_2(x,e,e),e,\ldots,e)$ принадлежит идеалу I. Заметим, что если одночлен x содержит подслово вида $(xy)(zt)$ или $x(y(zt))$, то одночлен $A_m(A_2(x,e,e),e,\ldots,e)$ равен нулю и, следовательно, принадлежит идеалу I. Допустим, что одночлен x не содержит подслов вида $(xy)(zt)$ и $x(y(zt))$. Тогда либо одночлен $A_m(A_2(x,e,e),e,\ldots,e)$ является одночленом вида $A_i(A_j(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_j),z_1,\ldots,z_i)$, либо x — правонормированное произведение образующего e на себя. Если одночлен $A_m(A_2(x,e,e),e,\ldots,e)$ является одночленом вида $A_i(A_j(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_j),z_1,\ldots,z_i)$, то, поскольку по определению идеала I для любых i и j и для любых $x_1,x_2,x_3,y_1,\ldots,y_j,z_1,\ldots,z_i$ одночлен $A_i(A_j(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_j),z_1,\ldots,z_i)$ принадлежит идеалу I, имеет место соотношение $A_m(A_2(x,e,e),e,\ldots,e) \in I$. Допустим теперь, что x — правонормированное произведение. Тогда одночлен $A_m(A_2(x,e,e),e,\ldots,e)$ для некоторого n можно представить в виде $A_m(A_{n+1}(e,\ldots,e),e,\ldots,e)$. Так как $m \in M$, то $m \in Q_i$ для любого i. Следовательно, $m \in Q_n$. По определению идеала I отсюда вытекает, что $A_m(A_2(x,e,e),e,\ldots,e) \in I$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что если в кольце $\mathscr{K}$ выполняется тождество

$$A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) = 0,$$

то $m \in M$. Так как в кольце $\mathscr{K}$ выполняется тождество

$$A_m(A_2(x_1,x_2,x_3),y_1,\ldots,y_m) = 0,$$

для любых $x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_m$ многочлен $A_m(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_m)$ принадлежит идеалу I кольца F. Значит, соотношение

$$A_m(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_m) \in I$$

имеет место в кольце F и при $x_1 = e \dots e$, $x_2 = e$, $x_3 = e$, $y_i = e$ для любого i. Заметим, что при этих значениях x_j и y_i одночлен $A_m(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_m)$ имеет вид $A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e)$ для некоторого n. В силу произвольности длины слова x_1 число n можно тоже считать произвольным. Теперь заметим, что одночлен $A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e)$ не содержит подслов вида $(xy)(zt)$, $x(y(zt))$ и $A_i(A_j(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_j), z_1, \dots, z_i)$. Поэтому в силу свободы кольца F соотношение $A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e) \in I$ выполняется в кольце F тогда и только тогда, когда в кольце F имеет место равенство

$$A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e) = \sum A_i(A_{j+1}(e, \dots, e), e, \dots, e).$$

Кольцо F свободно, поэтому из последнего равенства имеем

$$A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e) = A_i(A_{j+1}(e, \dots, e), e, \dots, e)$$

для некоторых i и j. Заметим, что это равенство очевидным образом выполняется тогда и только тогда, когда оно выполняется в абсолютно свободном кольце. Отсюда непосредственно вытекает, что $m = i$, $n + 1 = j + 1$. По определению идеала I отсюда получаем, что $m \in Q_n$. С учетом произвольности n из соотношения $m \in Q_n$ следует соотношение $m \in M$, что и требовалось доказать.

Итак, мы показали, что тождество $A_m(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_m) = 0$ выполняется в кольце $\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда $m \in M$. Отсюда в силу нерекурсивности множества M непосредственно следует, что эквациональная теория кольца $\mathscr{K}$ неразрешима.

Покажем теперь, что в кольце $\mathscr{K}$ разрешима проблема равенства. Для этого достаточно показать, что существует алгоритм, который для любого элемента $f(e)$ кольца $\mathscr{K}$ определяет, верно ли равенство $f(e) = 0$ в кольце $\mathscr{K}$. Заметим, что в кольце $\mathscr{K}$ соотношение $f(e) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда многочлен $f(e)$ принадлежит идеалу I в кольце F. Представим многочлен $f(e)$ в виде суммы $f_1(e) + f_2(e)$, где $f_1(e)$ — такой многочлен, что каждый его одночлен содержит подслово одного из четырех видов: $(xy)(zt)$, $x(y(zt))$, $A_i(A_j(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_j), z_1, \dots, z_i)$, $A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e)$, а $f_2(e)$ — такой многочлен, что ни один его одночлен не содержит подслов указанного вида. В силу разрешимости проблемы равенства в абсолютно свободном кольце, мы можем это сделать. Легко понять, что для выполнения соотношения $f(e) \in I$ необходимо, чтобы в кольце F имело место равенство $f_2(e) = 0$. Очевидно, что равенство $f_2(e) = 0$ выполняется в кольце F тогда и только тогда, когда оно выполняется в абсолютно свободном кольце. Поскольку в абсолютно свободном кольце проблема равенства разрешима, существует алгоритм, определяющий по многочлену $f_2(e)$, выполняется ли в кольце F равенство $f_2(e) = 0$. Следовательно, в дальнейшем мы можем считать, что $f_2(e) = 0$ и $f(e) = f_1(e)$, т. е. произвольный одночлен многочлена $f(e)$ содержит подслово вида $(xy)(zt)$, $x(y(zt))$, $A_i(A_j(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_j), z_1, \dots, z_i)$ или $A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e)$. Представим многочлен $f(e)$ в виде суммы $f_3(e) + f_4(e)$, где $f_3(e)$ — такой многочлен, что произвольный его одночлен содержит подслово вида $(xy)(zt)$, $x(y(zt))$ или $A_i(A_j(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_j), z_1, \dots, z_i)$, а $f_4(e)$ — такой многочлен, что ни один его одночлен не содержит подслов вида

$(xy)(zt)$, $x(y(zt))$, или $A_i(A_j(A_2(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_j), z_1, \dots, z_i)$ и произвольный его одночлен содержит подслово вида $A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e)$. В силу разрешимости проблемы равенства в абсолютно свободном кольце мы можем это сделать. По определению идеала I многочлен $f_3(e)$ принадлежит идеалу I. Следовательно, многочлен $f(e)$ принадлежит идеалу I тогда и только тогда, когда многочлен $f_4(e)$ принадлежит идеалу I. Легко понять, что соотношение $f_4(e) \in I$ выполняется в кольце F тогда и только тогда, когда оно выполняется в свободном кольце характеристики 2. Пусть $f_4(e) = w_1 + \dots + w_k$, где w_j является одночленом для любого j. Тогда можно рассмотреть набор множеств W_j, $1 < j < k$, где для любого j множество W_j состоит из пар натуральных чисел (m, n) таких, что одночлен w_j содержит подслово $A_m(A_{n+1}(e, \dots, e), e, \dots, e)$. Поскольку соотношение $f_4(e) \in I$ выполняется в кольце F тогда и только тогда, когда оно выполняется в свободном кольце характеристики 2, это соотношение имеет место тогда и только тогда, когда для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ найдется пара натуральных чисел $(m, n) \in W_j$ такая, что $m \in Q_n$. Поскольку для любого j множество W_j конечно и для любого n множество Q_n рекурсивно, существует алгоритм, определяющий по произвольному многочлену $f_4(e)$, принадлежит ли он идеалу I. Следовательно, проблема равенства в кольце $\mathscr{K}$ разрешима. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейман Ю. Г.* О тождествах в группах // Тр. Моск. мат. о-ва. 1982. Т. 44. С. 62–108.

2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 8 декабря 1998 г.

г. Екатеринбург