Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 513.81

ВЕКТОРНАЯ КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ТЕОРЕМА ГАУССА

Ю. Ф. Борисов

Аннотация: Если F^n — C^2-регулярная n-мерная поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ произвольной, в частности, бесконечной размерности, $X_0 \in F^n$, $P^n_{X_0}$ — касательная плоскость в точке X_0, Λ_{F^n,X_0} — множество всех прямых $l \subset P^n_{X_0}$, проходящих через X_0 и $l \in \Lambda_{F^n,X_0}$, то нормальная составляющая $\vec{\varkappa}^n_L(X_0)$ вектора кривизны C^2-регулярной кривой $L \subset F^n$, касающейся l в точке X_0, имеет значение $\vec{K}_{F^n,X_0}(l)$, не зависящее, как установлено в § 3, от L. Так определенная функция $\vec{K}_{F^n,X_0}$ называется векторной кривизной F^n в точке X_0. Если $\widetilde{F}^n$ — риманово пространство, соответствующее поверхности F^n, W — 2-мерное направление $\widetilde{F}^n$ в точке X_0, $\vec{K}^W_{F^n,X_0}$ — сужение $\vec{K}_{F^n,X_0}$ на подмножество Λ_{F^n,X_0}, соответствующее W, то существует универсальная характеристика функции $K^W_{F^n,X_0}$, равная при $F^n \in C^3$ секционной кривизне $K^W_{\widetilde{F}^n,X_0}$ пространства $\widetilde{F}^n$ в точке X_0 в направлении W. Различные варианты такого обобщения теоремы Гаусса, получающейся при $n = 2$, $\dim = 3$, доказываемые в § 4, соответствуют различным интерпретациям значений векторной кривизны, установленным в § 3.

§ 1. О содержании статьи

Пусть F^n — n-мерная C^2-регулярная поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ произвольной, в том числе бесконечной, размерности $\dim \mathbb{E}$ (т. е. $\dim \mathbb{E} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел), $X_0 \in F^n$, $P^n_{X_0}$ — касательная плоскость к F^n в точке X_0, $L \subset F^n$ — C^2-регулярная кривая, $X_0 \in L$, l — касательная к L в точке X_0, $\vec{\varkappa}_L(X_0)$ — вектор кривизны L в точке X_0, $\vec{\varkappa}^g_L(X_0)$, $\vec{\varkappa}^n_L(X_0)$ — его касательная и нормальная составляющие относительно плоскости $P^n_{X_0}$ (надлежащие уточнения употребляемых терминов будут даны по ходу изложения). Без уменьшения общности пространство $\mathbb{E}$ можно считать гильбертовым. Как и при $n = 2$, $\dim \mathbb{E} = 3$, в общем случае $\varkappa^g_L(X_0) \overset{\text{def}}{=} \left|\vec{\varkappa}^g_L(X_0)\right|$ совпадает с кривизной L в римановом пространстве $\widetilde{F}^n$, полученном заданием на F^n римановой метрики, индуцированной метрикой объемлющего пространства $\mathbb{E}$, а вектор $\vec{\varkappa}^n_L(X_0)$ однозначно определен поверхностью F^n, точкой X_0 и прямой l, в связи с чем обозначается в дальнейшем $\vec{K}_{F^n,X_0}(l)$. Функцию $l \mapsto \vec{K}_{F^n,X_0}(l)$, заданную на множестве Λ_{F^n,X_0} всевозможных прямых, лежащих в касательной плоскости $P^n_{X_0}$ и проходящих через точку X_0, называем *векторной кривизной поверхности* F^n в точке X_0 (если $n = 1$, т. е. $F^n = F^1 = L$ — кривая в $\mathbb{E}$, то единственным значением аргумента $\vec{K}_{F^1,X_0}$ является касательная l к L в точке X_0 и $\vec{K}_{F^1,X_0}(l) = \vec{\varkappa}_L(X_0)$). Функция $\vec{K}_{F^n,X_0}$ доставляет в точности ту информацию о свойствах поверхности F^n вблизи точки X_0, которая позволяет по вектору кривизны кривой L в римановом пространстве $\widetilde{F}^n$ и касательной к L в точке X_0 находить вектор $\vec{\varkappa}_L(X_0)$.

Согласно определению векторной кривизны условие

$$\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{K}_{F^n,X_0}(l),$$

где l — касательная к L в точке X_0, равносильно тому, что $\varkappa_L^g(X_0) = 0$ (в частности, $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{K}_{F^n,X_0}(l)$, когда L — геодезическая). Другой критерий такого рода: $\varkappa_L(X_0) = |\vec{\varkappa}_L(X_0)|$ — наименьшая из кривизн C^2-регулярных кривых на F^n, касающихся l в точке X_0 (*вынужденная кривизна*). Если $\dim\mathbb{E} = n+1$, то условие $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{K}_{F^n,X_0}(l)$ очевидным образом выполнено, когда L — нормальное сечение F^n в точке X_0 в направлении l. Это верно и при всех $\dim\mathbb{E} \in \vec{N} \cup \{\infty\}$, если под нормальным сечением F^n в точке X_0 в направлении l понимать C^2-регулярную кривую $L \subset F^n$, проходящую через X_0, проекция которой на $P^n_{X_0}$ содержится в l. Используя такую интерпретацию значений векторной кривизны, нетрудно заметить, что классическая теорема Гаусса для C^3-регулярной поверхности F^2 в $\mathbb{E}^3$ выражает риманову (*секционную*) кривизну $K_{\widetilde{F}^2}(X_0)$ пространства $\widetilde{F}^2$ в точке X_0 (внутреннюю кривизну поверхности в точке X_0) через некоторую характеристику векторной кривизны $\vec{K}_{F^2,X_0}$. Оказывается, существует характеристика $\vec{K}_{F^2,X_0}$, равная $K_{\widetilde{F}^2}(X_0)$ при всех $\dim\mathbb{E} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Вот один из вариантов такого обобщения теоремы Гаусса.

Теорема. *Пусть* $l_1, l_2, l \in \Lambda_{F^2,X_0}$, $l_1 \perp l_2$, l — *биссектриса любого из углов между* l_1, l_2,

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_{F^2,X_0}(l_1), \quad \vec{K}_2 = \vec{K}_{F^2,X_0}(l_2), \quad \vec{K} = \vec{K}_{F^2,X_0}(l), \quad \dim\mathbb{E} \in \vec{\mathbb{N}} \cup \{\infty\}.$$

Тогда

$$K_{\widetilde{F}^2}(X_0) = \vec{K}_1\vec{K}_2 - [\vec{K} - 1/2(\vec{K}_1 + \vec{K}_2)]^2.$$

Любой из вариантов обобщенной теоремы Гаусса для двумерных поверхностей приводит к выражению секционных кривизн риманова пространства $\widetilde{F}^n$, соответствующего C^3-регулярной поверхности $F^n \subset \mathbb{E}$, $n > 2$, через характеристики ее векторных кривизн.

Установлению корректности определения векторной кривизны для всех размерностей $\dim\mathbb{E}$ и доказательствам ее свойств посвящен § 3, а обобщенной теореме Гаусса — § 4. В § 2 приведены начальные определения и доказаны два свойства поверхностей в $\mathbb{E}$ при $\dim\mathbb{E} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, используемых в дальнейшем.

Упоминание в заглавии статьи и § 2 лишь бесконечномерного пространства вызвано следующими обстоятельствами. Во-первых, при рассмотрении пространств произвольной размерности можно считать, что $\dim\mathbb{E} = \infty$, поскольку всякое $\mathbb{E}^n$ вкладывается в такое $\mathbb{E}$ (лучше было бы говорить о *безразмерном пространстве*, однако такой термин не распространен). Во-вторых, именно в случае $\dim\mathbb{E} = \infty$ требуются приведенные в § 2 дополнительные соображения при установлении фактов, хорошо известных при $\dim\mathbb{E} \in \mathbb{N}$.

§ 2. Конечномерные регулярные поверхности в бесконечномерном евклидовом пространстве

Евклидовым пространством называем множество $\mathbb{E} \neq \varnothing$ с отношением эквивалентности $\sim$ в $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ и структурой евклидова векторного пространства над $\mathbb{R}$ в $\mathbb{V}(\mathbb{E}) = \mathbb{E} \times \mathbb{E}/\sim$ при условии, что если для $X, Y \in \mathbb{E}$ вектор $\overrightarrow{XY} \in$

$\mathbb{V}(\mathbb{E})$ определен условием $(X,Y)\in\mathbb{E}$, то для любых $X,Y,Z,O\in\mathbb{E}$ выполнено равенство

$$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XZ},$$

а отображение $\vec r_O:\mathbb{E}\to\mathbb{V}(\mathbb{E})$, заданное формулой $\vec r_O(X)=\overrightarrow{OX}$, является биекцией $\mathbb{E}$ на $\mathbb{V}(\mathbb{E})$. Под *размерностью* $\dim\mathbb{E}$, $\dim\mathbb{E}\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, пространства $\mathbb{E}$ понимается размерность $\mathbb{V}(\mathbb{E})$. Для любых векторов $\vec a,\vec b\in\mathbb{V}(\mathbb{E})$ или функций $\vec a,\vec b:\mathfrak{M}\to\mathbb{V}(\mathbb{E})$ при произвольном $\mathfrak{M}$, символ $\vec a\vec b$ — их скалярное произведение, $\vec a^2=\vec a\vec a$, $|\vec a|=\sqrt{\vec a^2}$.

Метрика $\rho_{\mathbb{E}}$ задается формулой $\rho_{\mathbb{E}}(X,Y)=|\overrightarrow{XY}|$. Связное n-мерное многообразие $F^n\subset\mathbb{E}$ без края называем *n-мерной поверхностью* (при $n=1$ — кривой), а гомеоморфизмы открытых в F^n множеств на открытые множества в $\mathbb{R}^n$ — ее картами.

Если $O\in\mathbb{E}$, $\mathfrak{M}\subset\mathbb{R}^n$, $f:\mathfrak{M}\to\mathbb{E}$, то частные производные функции $\vec f_O=\vec r_O\circ f:\mathfrak{M}\to\mathbb{V}(\mathbb{E})$ (*векторной записи f относительно O*), не зависящие от O, называются *частными производными функции f* и обозначаются обычным образом. Сказанное распространяется на производные высших порядков и запись $f\in C^k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, подразумевающую открытость $\operatorname{dom} f$.

Поверхность F^n в $\mathbb{E}$ называем *C^k-регулярной* и пишем $F^n\in C^k$, если для любой точки $X\in F^n$ найдется такая ее карта φ, что $X\in\operatorname{dom}\varphi$, $\psi=\varphi^{-1}\in C^k$ и производные $\psi_{u_1},\dots,\psi_{u_n}$ всюду линейно независимы, иначе говоря, $\dim d\psi_u\big(\mathbb{R}^n\big)=n$ при всех $u\in\operatorname{dom}\psi=\operatorname{im}\varphi$. Множество всех таких карт обозначаем через $\Phi^k(F^n)$ и для любой точки $X_0\in F^n$ полагаем

$$\Phi^k_{X_0}(F^n)=\{\varphi\in\Phi^k(F^n)\mid X_0\in\operatorname{dom}\varphi\}.$$

Известным рассуждением устанавливается, что объединение лучей контингенции F^n в точке X_0 является n-мерной плоскостью $P^n_{X_0}$ (касательной плоскостью к F^n в точке X_0) и если

$$\varphi\in\Phi^k_{X_0}(F^n),\quad \varphi(X_0)=u_0,\quad \psi=\varphi^{-1},$$

то $\psi_{u^1}(u_0),\dots,\psi_{u^n}(u_0)$ — базис ее направляющего пространства $T_{X_0}F^n$.

Взяв в $T_{X_0}F^n$ ортобазис $\vec e_1,\dots,\vec e_n$, зададим отображение $h:F^n\to\mathbb{R}^n$ формулой

$$h(X)=(\overrightarrow{X_0X}\vec e_1,\dots,\overrightarrow{X_0X}\vec e_n),$$

и пусть $f=h\circ\psi:\operatorname{im}\varphi\to\mathbb{R}^n$, J_f — якобиан f и $\vec r=\vec\psi_{X_0}:\operatorname{im}\varphi\to\mathbb{V}(\mathbb{E})$. Тогда

$$f=(\vec r\vec e_1,\dots,\vec r\vec e_n),\ f_{u^\alpha}=\big(\vec r_{u^\alpha}\vec e_1,\dots,\vec r_{u^\alpha}\vec e_n\big),\quad \vec r_{u^\alpha}=\psi_{u^\alpha},\ \alpha=1,\dots,n.$$

Так как $\vec r_{u^1}(u_0),\dots,\vec r_{u^n}(u_0)$ линейно независимы, то $J_f(u_0)\neq0$. Поэтому существует такая открытая окрестность $G\subset\operatorname{dom}f$ точки u_0, что $f_0=f|_G$ — C^k-диффеоморфизм G на открытую окрестность G_0 точки $(0,\dots,0)=f(u_0)$. Положим

$$\psi_0=\psi|_G,\quad U=\psi_0(G),\quad \varphi_0=\varphi|_U,\quad h_0=h|_U.$$

Тогда

$$f_0=h_0\circ\psi_0=h_0\circ\varphi_0^{-1},\quad f_0\circ\varphi_0=h_0$$

и поэтому h_0 — гомеоморфизм U на G_0. Поскольку множество $U=\psi_0(G)=\psi(G)$ открыто в $\mathbb{F}^n$, отображение h_0 — карта F^n. Кроме того,

$$h_0^{-1}=(f_0\circ\varphi_0)^{-1}=\varphi_0^{-1}\circ f_0^{-1},\quad f_0^{-1}\in C^k(\mathbb{R}^n),$$

где $C^k(\mathbb{R}^n)$ — множество всех C^k-диффеоморфизмов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Так как $\varphi_0 = \varphi|_U \in \Phi^k(\mathbb{F}^n)$, то $\dim\bigl(d\varphi_0^{-1}\bigr)_u(\mathbb{R}^n) = n$ при всех $u \in G$. В силу того, что $\bigl(df_0^{-1}\bigr)_v(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, где $v \in G_0$, имеем $\dim\bigl(dh_0^{-1}\bigr)_v(\mathbb{R}^n) = n$ и $h_0 \in \Phi^k_{X_0}(\mathbb{F}^n)$. Кроме того, $h_0 \circ \psi_0 = h_0 \circ \varphi_0^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n)$. В результате доказана

Лемма 1. *Пусть $F^n \in C^k$, $X_0 \in F^n$, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ — ортобазис $T_{X_0}F^n$, $h : F^n \to \mathbb{R}^n$ задано формулой*

$$h(X) = (\overrightarrow{X_0X}\vec{e}_1, \dots, \overrightarrow{X_0X}\vec{e}_n), \quad \varphi \in \Phi^k_{X_0}(F^n), \quad \varphi(X_0) = u_0.$$

Существует такая открытая окрестность $G \subset \operatorname{im}\varphi$ точки u_0, что если $U = \varphi^{-1}(G)$, $h_0 = h|_U$, $\varphi_0 = \varphi|_U$, то $h_0 \in \Phi^k_{X_0}(F^n)$ и $h_0 \circ \varphi_0^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Множество всех карт вида h_0, фигурирующих в лемме 1, обозначаем через $\Phi^*_{X_0}(F^n)$. Лемма 1 позволяет распространить на случай $\dim\mathbb{E} = \infty$ ряд свойств регулярных поверхностей в конечномерном пространстве.

Лемма 2. $\Phi^k(F^n)$ — *полный C^k-атлас (дифференциальная структура класса C^k) на F^n.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^k(F^n)$, $X_0 \in \operatorname{dom}\varphi_1 \cap \operatorname{dom}\varphi_2$. Из леммы 1 легко следует существование такого $h \in \Phi^*_{X_0}(F^n)$, что

$$U = \operatorname{dom} h \subset \operatorname{dom}\varphi_1 \cap \operatorname{dom}\varphi_2, \quad h \circ \bigl(\varphi_1^0\bigr)^{-1}, \quad h_0\bigl(\varphi_2^0\bigr)^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n),$$

где $\varphi_1^0 = \varphi_1|_U$, $\varphi_2^0 = \varphi_2|_U$. Поэтому $\varphi_2^0 \circ \bigl(\varphi_1^0\bigr)^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n)$, откуда следует, что $\Phi^k(F^n)$ — C^k-атлас F^n. Пусть $\varphi_1 \in \Phi^k(F^n)$, φ_2 — карта многообразия F^n, $\operatorname{dom}\varphi_2 = \operatorname{dom}\varphi_1$ и $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$f^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n), \quad \varphi_2^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ f^{-1},$$

и, как установлено при выводе леммы 1, $\dim\bigl(d\varphi_2^{-1}\bigr)_v(\mathbb{R}^n) = n$ при $v \in \operatorname{im}\varphi_2$. Поэтому $\varphi_2 \in \Phi^k(F^n)$ и C^k-атлас $\Phi^k(F^n)$ полный.

Абстрактное n-мерное C^k-гладкое многообразие, полученное из топологического многообразия F^n заданием на нем дифференциальной структуры $\Phi^k(F^n)$, обозначаем символом $\widetilde{F}^n$ и рассматриваем как C^{k-1}-риманово пространство, метрический тензор G которого известным образом определяет длины путей $\gamma \in C^1$ на F^n и определяется ими (с помощью леммы 1 легко устанавливается, что речь идет о путях класса C^1 в $\widetilde{F}^n$, после чего воспроизводится не зависящий от $\dim\mathbb{E}$ вывод формул $g_{ij} = \vec{r}_{u_i}\vec{r}_{u_j}$, где g_{ij} — компоненты тензора G в карте $\varphi \in \Phi^k(F^n)$, для которой $\vec{r}$ — векторная запись φ^{-1}). Риманово пространство F^n называем *соответствующим поверхности* F^n.

Пусть $X_0 \in F^n (\Leftrightarrow X_0 \in \widetilde{F}^n)$, $T_{X_0}\widetilde{F}^n$ — касательное пространство $\widetilde{F}^n$ в точке X_0, $\varphi \in \Phi^k_{X_0}(F^n)$, $\varphi(X_0) = u_0$, $\vec{r}$ — векторная запись φ^{-1} и отображение $\vec{P}^{F^n}_{X_0} : T_{X_0}\widetilde{F}^n \to T_{X_0}F^n$ задано формулой

$$\vec{P}^{F^n}_{X_0}(\xi) = \vec{r}_{u^\alpha}(u_0)\xi^\alpha,$$

где ξ^α — координаты вектора ξ в карте φ. Здесь и дальше употребляется сокращенная запись сумм, в частности,

$$\vec{r}_{u_\alpha}(u_0)\xi^\alpha \overset{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{r}_{u_\alpha}(u_0)\xi^\alpha.$$

Легко заметить, что при всех $\dim\mathbb{E}$ отображение $\vec{P}^{F^n}_{X_0}$ не зависит от φ и является изоморфизмом $T_{X_0}\widetilde{F}^n$ на $T_{X_0}F^n$.

§ 3. Векторная кривизна регулярной поверхности

Лемма 3. *Пусть $F^n \subset \mathbb{E}$, $F^n \in C^k$, $\varphi \in \Phi^k(F^n)$, $\vec{r}$ — векторная запись φ^{-1} относительно полюса O, $g_{ij} = \vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^j}$, $i, j = 1, \dots, n$, — компоненты метрического тензора G C^{k-1}-риманова пространства $\widetilde{F}^n$ в карте φ, $k \geq 2$. Тогда существуют и единственны такие функции $\Gamma^\alpha_{ij} : \operatorname{im}\varphi \to \mathbb{R}$, $\vec{b}_{ij} : \operatorname{im}\varphi \to \mathbb{V}(\mathbb{E})$, что*

$$\vec{b}_{ij}\vec{r}_{u^\beta} \equiv 0 \tag{1}$$

и

$$\vec{r}_{uiuj} = \Gamma^\alpha_{ij}\vec{r}_{u^\alpha} + \vec{b}_{ij} \tag{2}$$

при всех $i, j, \beta = 1, \dots, n$. Функции Γ^α_{ij} определяются из системы уравнений

$$g_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{ij} = \Gamma_{ij,\beta}, \tag{3}$$

в которых

$$\Gamma_{ij,\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{j\beta}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\beta i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta}\right). \tag{4}$$

Доказательство. При всяком $u \in \operatorname{im}\varphi$ существуют и единственны такие векторы

$$\vec{a}_{ij}(u) \in T_{\varphi^{-1}(u)}F^n, \quad \vec{b}_{ij}(u) \in (T_{\varphi^{-1}(u)}F^n)^\perp,$$

что

$$\vec{r}_{u^iu^j}(u) = \vec{a}_{ij}(u) + \vec{b}_{ij}(u)$$

($\vec{a}_{ij}(u)$ — ортогональная проекция вектора $\vec{r}_{u^iu^j}(u) \in \mathbb{V}(\mathbb{E})$ на n-мерное подпространство $T_{\varphi^{-1}(u)}F^n \subset \mathbb{V}(\mathbb{E})$). Так как $\vec{r}_{u^1}(u), \dots, \vec{r}_{u_n}(u)$ — базис $T_{\varphi^{-1}(u)}F^n$, из сказанного вытекают существование и единственность функций $\vec{b}_{ij}$, Γ^α_{ij}, удовлетворяющих соотношениям (1) и (2). Из (1), (2) и формул $\vec{r}_{u^\alpha}\vec{r}_{u^\beta} = g_{\alpha\beta}$ следует равенство

$$\vec{r}_{u^iu^j}\vec{r}_{u^\beta} = g_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{ij}. \tag{5}$$

Полагая

$$\Gamma_{ij,\beta} = \vec{r}_{u^iu^j}\vec{r}_{u^\beta}, \tag{6}$$

получим формулы (3). Вывод формул (4) из формул (6) и формул $\vec{r}_{u^i}\vec{r}_{u^j} = g_{ij}$ известен. □

Лемма 4. *Если в условиях леммы* 3 $X_0 \in \operatorname{dom}\varphi$ *и* $\varphi \in \Phi^*_{X_0}(F^n)$ (*см.* § 2), *то*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta}(0, \dots, 0) = 0$$

при всех $i, j, \beta = 1, \dots, n$, $g_{ij}(0, \dots 0) = \delta_{ij}$.

Доказательство. Согласно определению $\Phi^*_{X_0}(F^n)$ карта φ задается формулой

$$\varphi(X) = (\overrightarrow{X_0X}\vec{e}_1, \dots, \overrightarrow{X_0X}\vec{e}_n), \tag{1}$$

где $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — некоторый ортобазис $T_{X_0}F^n$. Выбор полюса O не влияет на функции $\vec{r}_{u^\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$, а тем самым и на функции g_{ij}. Без уменьшения общности считаем, что $O = X_0$. Ввиду (1) при всех $(u^1, \dots, u^n) \in \operatorname{im}\varphi = \operatorname{dom}\vec{r}$ имеем

$$\vec{r}(u^1, \dots, u^n)\vec{e}_\alpha = u^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Положим

$$\vec{h} = \vec{r} - \sum_{\alpha=1}^{n} (\vec{r}\vec{e}_\alpha)\vec{e}_\alpha. \tag{3}$$

Ввиду (3) и ортонормированности $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

$$\vec{h}\vec{e}_i \equiv O, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

а в силу (2) и (3)

$$(u^1, \dots, u^n) \in \operatorname{dom} \vec{r} \Rightarrow \vec{r}(u^1, \dots, u^n) = \vec{h}(u^1, \dots, u^n) + \sum_{\alpha=1}^{n} u^\alpha \vec{e}_\alpha, \tag{5}$$

$$\vec{r}_{u^i} = \vec{h}_{u^i} + \vec{e}_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Кроме того, из (4) следует, что

$$\vec{h}_{u^\alpha}\vec{e}_i \equiv O, \quad \alpha, i = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Поскольку $\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij}$, из (6), (7) имеем

$$g_{ij} = \vec{r}_{u^i}\vec{r}_{u^j} = \vec{h}_{u^i}\vec{h}_{u^j} + \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{8}$$

Ввиду (1) $\varphi(X_0) = (0, \dots, 0)$ и поэтому

$$\vec{r}_{u^i}(0, \dots, 0) \in T_{X_0}F^n, \quad i = 1, \dots, n.$$

А поскольку $\vec{e}_i \in T_{X_0}F^n$, из (6) следует, что

$$\vec{h}_{u^i}(0, \dots, 0) \in T_{X_0}F^n, \quad i = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Так как $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — ортобазис $T_{X_0}F^n$, ввиду (7) и (9)

$$h_{u^i}(0, \dots, 0) = \vec{0}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Из (8) и (10) следуют формулы $g_{ij}(0, \dots, 0) = \delta_{ij}$. Продифференцировав равенства (8) в точке $(0, \dots, 0)$ (возможность дифференцирования обеспечена равенствами (6) и условием $k \geq 2$), из (10) выводим формулы

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta}(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad \square$$

Пусть $L \subset F^n$ — C^2-регулярная кривая (одномерная C^2-регулярная поверхность), $X_0 \in L$. Известным рассуждением, не зависящим от $\dim \mathbb{E}$, устанавливается существование такого пути $\gamma : J \to L$, где $J \subset \mathbb{R}$ — открытый промежуток, $0 \in J$, $\gamma(0) = X_0$, что γ — гомеоморфизм J на открытую окрестность точки X_0 в L, $\gamma \in C^2$ и $|\gamma'| \equiv 1$. Множество всех таких путей обозначаем через L_{X_0}. Нетрудно проверить, что $\gamma''(0)$ не зависит от выбора $\gamma \in L_{X_0}$. Распространяя на случай $\dim \mathbb{E} = \infty$ известные определения вектора кривизны $\vec{\varkappa}_L(X_0)$ и кривизны $\varkappa_L(X_0)$ кривой L в точке X_0, полагаем $\vec{\varkappa}_L(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma''(0)$, где $\gamma \in L_{X_0}$, $\varkappa_L(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{\varkappa}_L(X_0)|$.

Лемма 5. *Пусть в условиях леммы 3 $X_0 \in F^n$, $\varphi \in \Phi^k_{X_0}(F^n)$, $\varphi(X_0) = u_0$, $L \subset F^n$ — C^2-регулярная кривая, $X_0 \in L$, $L_{X_0,\varphi} = \{\gamma \in L_{X_0} \mid \operatorname{im}\gamma \subset \operatorname{dom}\varphi\}$, $\vec{\varkappa}^g(X_0)$, $\vec{\varkappa}^n(X_0)$ — касательная и нормальная составляющие $\vec{\varkappa}_L(X_0)$ относительно $T_{X_0}F^n$. Тогда $L_{X_0,\varphi} \neq \varnothing$ и если*

$$\gamma \in L_{X_0,\varphi}, \quad \underset{(\varphi)}{\gamma} = \varphi \circ \gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n) : \operatorname{dom}\gamma \to \mathbb{R}^n,$$

то $\underset{(\varphi)}{\gamma} \in C^2$ и справедливы формулы

$$\vec{\varkappa}^g_L(X_0) = \left[\ddot{\gamma}^\alpha(0) + \Gamma^\alpha_{ij}(u_0)\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0)\right]\vec{r}_{u^\alpha}(u_0), \tag{1}$$

$$\vec{\varkappa}^n_L(X_0) = \vec{b}_{ij}(u_0)\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0), \tag{2}$$

где Γ^α_{ij}, $\vec{b}_{ij}$ — функции, указанные в лемме 3.

Доказательство. Существование $\gamma \in L_{X_0,\varphi}$ очевидно. Пусть $\tau \in J = \operatorname{dom}\gamma$, $\gamma(\tau) = X_1$. Ввиду леммы 1 (§ 2) найдется такая карта $\widetilde{\varphi} \in \Phi^*_{X_1}(F^n)$, что $U = \operatorname{dom}\widetilde{\varphi} \subset \operatorname{dom}\varphi$ и если $\varphi_0 = \varphi|_U$, то $\varphi_0 \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Существует такой промежуток J_1, что J_1 — окрестность τ в J и $\gamma(J_1) \subset U$. Положим $\gamma_1 = \gamma|_{J_1}$. Тогда $\operatorname{im}\gamma_1 \subset \operatorname{dom}\widetilde{\varphi} \cap \operatorname{dom}\varphi_0$ и поэтому $\underset{(\varphi_0)}{\gamma}{}_1 = (\varphi_0 \circ \widetilde{\varphi}^{-1}) \circ \underset{(\widetilde{\varphi})}{\gamma}{}_1$. Если $\vec{\rho}$ — векторная запись γ_1 относительно полюса X_1, то $\underset{(\widetilde{\varphi})}{\gamma}{}_1 = (\vec{\rho}\vec{e}_1, \dots, \vec{\rho}\vec{e}_n)$, где $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — некоторый ортобазис пространства $T_{X_1}F^n \subset \mathbb{V}(\mathbb{E})$. Так как $\varphi_0 \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ и $k \geq 2$, отсюда следует, что

$$\underset{(\varphi_0)}{\gamma}{}_1 = \underset{(\varphi)}{\gamma}{}_1 = \underset{(\varphi)}{\gamma}|_{J_1} \in C^2.$$

Поскольку точка $\tau \in \operatorname{dom}\gamma$ произвольна, а J_1 — ее окрестность в $\operatorname{dom}\gamma$, соотношение $\gamma \in C^2$ установлено.

В условиях леммы 3 $\vec{r}$ — векторная запись φ^{-1} относительно полюса O. Положим $\vec{\rho} = \vec{\gamma}_O$. Так как $\underset{(\varphi)}{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ и $\operatorname{im}\gamma \subset \operatorname{dom}\varphi$, то $\gamma = \varphi^{-1} \circ \underset{(\varphi)}{\gamma}$ и

$$\vec{\rho} = \vec{r} \circ \underset{(\varphi)}{\gamma} = \vec{r}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) : \operatorname{im}\gamma \to \mathbb{V}(\mathbb{E}), \tag{3}$$

$$\gamma'' = \vec{\rho}'' = \vec{r}_{u^\alpha}(\gamma^1, \dots, \gamma^n)\ddot{\gamma}^\alpha + \vec{r}_{u^i u^j}(\gamma^1, \dots, \gamma^n)\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j. \tag{4}$$

Ввиду (4) и леммы 3

$$\vec{\varkappa}_L(X_0) = \gamma''(0) = \left[\ddot{\gamma}^\alpha(0) + \Gamma^\alpha_{ij}(u_0)\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0)\right]\vec{r}_{u^\alpha}(u_0) + \vec{b}_{ij}(u_0)\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0). \tag{5}$$

Поскольку $(\vec{r}_{u^1}(u_0), \dots, \vec{r}_{u_n}(u_0))$ — базис $T_{X_0}F^n$, а $\vec{b}_{ij}(u_0)\vec{r}_{u^\alpha}(u_0) = 0$ при всех $i, j, \alpha = 1, \dots, n$, из (5) следуют формулы (1) и (2). $\square$

Лемма 6. *В условиях леммы* 5 *кривая $L \subset F^n$, рассматриваемая как кривая в римановом пространстве $\widetilde{F}^n$, обладает в точке X_0 вектором кривизны $\widetilde{\varkappa}_L(X_0)$ и*

$$\varkappa^g_L(X_0) \overset{\text{def}}{=} |\widetilde{\varkappa}_L(X_0)| = \left|\vec{\varkappa}^g_L(X_0)\right|.$$

Доказательство. Согласно лемме 5 существует путь $\gamma \in L_{X_0,\varphi}$ и $\underset{(\varphi)}{\gamma} = (\gamma^1, \dots, \gamma^n) \in C^2$. Функции $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ — компоненты γ, рассматриваемого как путь в $\widetilde{F}^n$, в карте φ, а $\dot\gamma^1,\dots,\dot\gamma^n$ — компоненты его производной $\tilde\gamma'$ ($\tilde\gamma'(t)\in T_{\gamma(t)}\widetilde{F}^n$, $t\in\operatorname{dom}\gamma$). Как известно, $|\tilde\gamma'|=|\gamma'|$ и поэтому $|\tilde\gamma'|\equiv 1$. Тем самым $\widetilde{\varkappa}_L(X_0)$ существует, а его α-я координата в карте φ равна

$$\ddot\gamma^\alpha(0)+\Gamma^\alpha_{ij}(u_0)\dot\gamma^i(0)\dot\gamma^j(0),$$

поскольку функции Γ^α_{ij}, связанные с компонентами g_{ij} метрического тензора риманова пространства $\widetilde{F}^n$ соотношениями (3) и (4) из леммы 3, — коэффициенты Кристоффеля этого пространства в карте φ. Ввиду формул (1) из леммы 5 и определения $\vec{P}^{F^n}_{X_0}$ отсюда следует, что

$$\vec{\varkappa}^g_L(X_0)=\vec{P}^{F^n}_{X_0}[\widetilde{\varkappa}_L(X_0)].$$

Остается заметить, что отображение $\vec{P}^{F^n}_{X_0}$ сохраняет длины векторов. $\square$

Согласно определению $\vec{\varkappa}^g_L(X_0)$ — проекция вектора кривизны $\vec{\varkappa}_L(X_0)$ на $T_{X_0}F^n$ (см. лемму 5) или, что равносильно, на касательную плоскость $P^n_{X_0}$ к F^n в точке X_0, для которой $T_{X_0}F^n$ является направляющим пространством. Длина этой проекции согласно лемме 6 равна геодезической кривизне $\varkappa^g_L(X_0)$ кривой $L\subset F^n$ в точке X_0, определяемой как кривизна L в римановом пространстве $\widetilde{F}^n$. При $\dim\mathbb{E}=n+1$ отсюда следует, что если L — нормальное сечение F^n в точке X_0, то $\varkappa^g_L(X_0)=0$. Понятие нормального сечения поверхности F^n естественно распространяется на случай произвольной размерности $\dim\mathbb{E}$. При этом остаются в силе локальная определяемость нормального сечения L в точке X_0 его касательной в этой точке и равенство $\varkappa^g_L(X_0)=0$.

Сохраняя принятые обозначения до конца параграфа, введем следующее

Определение 1. Пусть Λ_{F^n,X_0} — множество всех прямых $l\subset P^n_{X_0}$, проходящих через точку X_0. Кривую $L\subset F^n$, проходящую через точку X_0, называем *нормальным сечением поверхности F^n в точке X_0 в направлении* $l\in\Lambda_{F^n,X_0}$, если ее проекция на $P^n_{X_0}$ содержится в l. Множество всех таких кривых обозначаем через $\mathfrak{N}_{F^n}(X_0,l)$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\mathfrak{N}_{F^n}(X_0,l)\neq\varnothing$ *при всех* $l\in\Lambda_{F^n,X_0}$.

2. *Для любых* $l\in\Lambda_{F^n,X_0}$, $L_1,L_2\in\mathfrak{N}_{F^n}(X_0,l)$ *существует такая C^k-регулярная кривая* $L\in\mathfrak{N}_{F^n}(X_0,l)$, *что L — окрестность X_0 в L и в L_0, l — касательная к L в точке X_0 и* $\varkappa^g_L(X_0)=0$.

Доказательство. Пусть $l\in\Lambda_{F^n,X_0}$. Так как $l\subset P^n_{X_0}$, а $T_{X_0}F^n$ — направляющее пространство $P^n_{X_0}$, то в $T_{X_0}F^n$ существует такой ортобазис $(\vec e_1,\dots,\vec e_n)$, что $\vec e_1$ — направляющий вектор прямой l. Ввиду леммы 1 (§ 2) существует такая карта $\varphi\in\Phi^*_{X_0}(F^n)$, что если $\vec r$ — векторная запись φ^{-1} относительно X_0, то

$$u=(u^1,\dots,u_n)\in\dim\varphi\Rightarrow\vec r(u)\vec e_i=u^i,\quad i=1,\dots,n. \tag{1}$$

Пусть Pr — проектирование F^n на $P^n_{X_0}$, $\vec r_P=(\overrightarrow{\mathrm{Pr}\circ\varphi^{-1}})_{X_0}$, $u\in\operatorname{im}\varphi$. Тогда

$$\vec r_P(u)=\sum_{i=1}^n(\vec r(u)\vec e_i)\vec e_i$$

и ввиду (1) $\vec r_P$ задается формулой

$$\vec r_P(u^1,\dots,u^n)=u^i\vec e_i. \tag{2}$$

Взяв такое $\delta > 0$, что $(t, 0, \dots, 0) \in \operatorname{im}\varphi$ при $|t| < \delta$, зададим путь $\gamma : (-\delta, \delta) \to \operatorname{dom}\varphi$ формулой

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(t, \dots, 0) \tag{3}$$

и положим $\gamma_P = \operatorname{Pr}\circ\gamma$, $\vec{\rho} = (\vec{\gamma}_P)_{X_0}$. Тогда при $t \in (-\delta, \delta)$ будет

$$\gamma_P(t) = (\operatorname{Pr}\circ\varphi^{-1})(t, \dots, 0), \quad \vec{\rho}(t) = \vec{r}_P(t, \dots, 0)$$

и ввиду (2) $\vec{\rho}$ задается формулой

$$\vec{\rho}(t) = t\vec{e}_1. \tag{4}$$

Поскольку $X_0 \in l$ и $\vec{e}_1$ — направляющий вектор прямой l, отсюда вытекает, что

$$\operatorname{Pr}(\operatorname{im}\gamma) \subset l. \tag{5}$$

Так как φ^{-1} — гомеоморфизм $\operatorname{im}\varphi$ на $\operatorname{dom}\varphi$, из (3) следует, что $L = \operatorname{im}\gamma$ — кривая на F^n, $X_0 = \varphi^{-1}(0, \dots, 0) = \gamma(0) \in L$, а ввиду (5) проекция L на $P^n_{X_0}$ содержится в l. В результате $L \in \mathfrak{N}_{F^n}(X_0, l)$ и $\mathfrak{N}_{F^n}(X_0, l) \neq \varnothing$.

2. Пусть $l \in \Lambda_{F^n, X_0}$, $L_1, L_2 \in \mathfrak{N}_{F^n}(X_0, l)$, а ортобазис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ в $T_{X_0}F^n_0$, задающий карту $\varphi \in \Phi^*_{X_0}(F^n)$, связан с l прежним условием. Найдутся $\delta > 0$ и гомеоморфизмы γ_1, γ_2 промежутка $(-\delta, \delta)$ на открытые окрестности $L^0_1, L^0_2 \subset \operatorname{dom}\varphi$ точки X_0 в L_1, L_2. Положим

$$\tilde{\gamma}_1 = \varphi \circ \gamma_1 = \left(\gamma^1_1, \dots, \gamma^n_1\right).$$

Тогда

$$\gamma_1 = \varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma}_1, \quad \operatorname{Pr}\circ\gamma_1 = (\operatorname{Pr}\circ\varphi^{-1}) \circ \tilde{\gamma}_1, \quad (\overrightarrow{\operatorname{Pr}\circ\gamma_1})_{X_0} = \vec{r}_P \circ \tilde{\gamma}_1$$

и ввиду (2)

$$(\overrightarrow{\operatorname{Pr}\circ\gamma_1})_{X_0} = \tilde{\gamma}^i_1\vec{e}_i. \tag{6}$$

Так как $\operatorname{Pr}(L_1) \subset l$, $\operatorname{im}\gamma_1 \subset L_1$, то $\operatorname{im}(\operatorname{Pr}\circ\gamma_1) \subset l$, и ввиду связи X_0 и $\vec{e}_1$ с прямой l

$$\operatorname{im}(\overrightarrow{\operatorname{Pr}\circ\gamma_1})_{X_0} \subset \{t\vec{e}_1 \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает, что

$$\gamma^2_1 = \dots = \gamma^n_1 \equiv 0. \tag{8}$$

Из (8) легко следует, что $J_1 = \operatorname{im}\gamma^1_1$ — открытый промежуток и γ^1_1 — гомеоморфизм $(-\delta, \delta)$ на J_1, ибо $\tilde{\gamma}_1 = \varphi\circ\gamma_1$ — гомеоморфизм $(-\delta, \delta)$ на $\operatorname{im}\tilde{\gamma}_1 \subset \mathbb{R}^n$. Кроме того, $X_0 \in L^o_1 = \operatorname{im}\gamma_1$. Пусть $t_0 = (\gamma_1)^{-1}(X_0)$. Тогда $\tilde{\gamma}_1(t_0) = \varphi(X_0) = (0, \dots 0)$ по определению карты φ и поэтому $\gamma^1_1(t_0) = 0$, $0 \in J_1$. Положим

$$\gamma^*_1 = \gamma_1 \circ \left(\gamma^1_1\right)^{-1} : J_1 \to L^0_1. \tag{9}$$

В силу того, что $\gamma_1 = \varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma}_1$, ввиду (8) получаем

$$t \in J_1 \Rightarrow \gamma^*_1(t) = \varphi^{-1}(t, 0, \dots, 0). \tag{10}$$

Применяя аналогичные рассуждения к γ_2, найдем открытый промежуток J_2 и его гомеоморфизм γ^*_2 на L^0_2 такие, что $0 \in J_2$ и

$$t \in J_2 \Rightarrow \gamma^*_2(t) = \varphi^{-1}(t, 0, \dots 0). \tag{11}$$

Положим $J = J_1 \cap J_2$. Тогда J — открытый промежуток, являющийся окрестностью нуля, $\gamma^*_1|_J = \gamma^*_2|_J$ ввиду (10) и (11), а путь γ^*, заданный на J формулой

$\gamma^*(t) = \varphi^{-1}(t, 0, \dots, 0)$, — гомеоморфизм J на кривую $L \subset L_1^0 \cap L_2^0$, являющуюся открытой окрестностью точки X_0 в L_1 и в L_2. Из свойств φ^{-1} вытекает C^k-регулярность L.

Пусть $\vec{\rho} = \overrightarrow{\gamma^*_{X_0}}$. Тогда

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t, \dots, 0),\ t \in J, \quad \vec{\rho}\,'(0) = \vec{r}_{u^1}(0, \dots, 0).$$

Как установлено при доказательстве леммы 4 (соотношения (6) и (10)), $\vec{r}_{u^i} = \vec{h}_{u^i} + \vec{e}_i$, где функция h такова, что

$$\vec{h}_{u^i}(0, \dots, 0) = \vec{0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому $\vec{\rho}\,'(0) = \vec{e}_1$, откуда следует, что l — касательная к L в точке X_0.

Зададим функцию $s : J \to \mathbb{R}$ формулой

$$s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{g_{11}(\tau, \dots, 0)}\, d\tau. \tag{12}$$

Очевидно, s — гомеоморфизм J на открытый промежуток $\widetilde{J}$. Положим

$$\gamma = \gamma^* \circ s^{-1}. \tag{13}$$

Тогда γ — гомеоморфизм $\widetilde{J}$ на L. Из формулы $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t, \dots, 0)$ для $\vec{\rho} = \vec{\gamma}^*_{X_0}$ и (12) легко вывести, что

$$u \in \widetilde{J} \Rightarrow \gamma'(u) = \frac{\vec{r}_{u^1}[s^{-1}(u), \dots, 0]}{\sqrt{g_{11}[s^{-1}(u), \dots, 0]}},$$

откуда следует, что

$$|\gamma'| \equiv 1. \tag{14}$$

Кроме того, $\gamma \in C^2$ ввиду условий $\vec{r} \in C^k$, $k \geq 2$. Учитывая еще соотношения $\gamma(0) = \gamma^*(0) = X_0$ и $\operatorname{im}\gamma \subset \operatorname{dom}\varphi$, заключаем, что $\gamma \in L_{X_0,\varphi}$ (см. лемму 5).

Положим

$$\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n).$$

Тогда ввиду (13)

$$(\gamma^1, \dots, \gamma^n) = (\varphi \circ \gamma^*) \circ s^{-1},$$

а так как $\gamma^*(t) = \varphi^{-1}(t, \dots, 0)$ при всех $t \in J$, то

$$u \in \widetilde{J} \Rightarrow \gamma^1(u) = s^{-1}(u), \quad \gamma^2(u) = \dots = \gamma^n(u) = 0. \tag{15}$$

Согласно (12) и (15) всюду на $\widetilde{J}$

$$\dot{\gamma}^1(u) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}[s^{-1}(u), \dots, 0]}}, \quad \dot{\gamma}^2(u) = \dots = \dot{\gamma}^n(u) = 0. \tag{16}$$

Так как ввиду (12) $s^{-1}(0) = 0$, а по лемме 4

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta}(0, \dots, 0) = 0, \quad i, j, \beta = 1, \dots, n, \tag{17}$$

из (16) следует, что

$$\ddot{\gamma}^1(0) = \dots = \ddot{\gamma}^n(0) = 0. \tag{18}$$

С помощью (17) и леммы 3 получаем

$$\Gamma^\alpha_{ij}(0, \dots, 0) = 0, \quad i, j, \alpha = 1, \dots, n. \tag{19}$$

Применяя к L формулы (1) из леммы 5 при $u_0 = \varphi(X_0) = (0, \dots, 0)$, находим, что ввиду (18) и (19) $\vec{\varkappa}^g_L(X_0) = \vec{0}$ и в силу леммы 6 $\varkappa^g_L(X_0) = 0$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $L_{F^n}(X_0)$ — множество всех C^2-регулярных кривых на F^n, проходящих через точку X_0, $l \in \Lambda_{F_0^n, X_0}$, $L_{F^n}(X_0, l)$ — множество всех тех $L \in L_{F^n}(X_0)$, для которых l — касательная в точке X_0. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для всех $L \in L_{F^n}(X_0, l)$ $\quad \vec{\varkappa}_L^n(X_0)$ — один и тот же вектор $\vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l)$.*

2. *Для всякой кривой $L \in L_{F^n}(X_0, l)$ условие $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l)$ равносильно любому из следующих:*

a) *$\varkappa_L^g(X_0) = 0$;*

b) *$L_1 \in L_{F^n}(X_0, l) \Rightarrow \varkappa_L(X_0) \leq \varkappa_{L_1}(X_0)$.*

3. *Если $L \in L_{F_n}(X_0)$ — геодезическая или $L \in \mathfrak{N}_{F^n}(X_0, l)$, то $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{\varkappa}_{F_n}(X_0, l)$.*

4. *Пусть φ, u_0, $\vec{r}$, g_{ij}, $\vec{b}_{ij}$ имеют смысл, указанный в лемме 3. Если $\vec{\xi} = \xi^i \vec{r}_{u^i}(u_0)$ — направляющий вектор прямой $l \in \Lambda_{F^n, X_0}$, то*

$$\vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l) = \frac{\vec{b}_{ij}(u_0)\xi^i\xi^j}{g_{ij}(u_0)\xi^i\xi^j}.$$

Доказательство. Пусть φ, u_0, $\vec{r}$, g_{ij}, $\vec{b}_{ij}$, l и $\xi^1, \dots, \xi^n$ имеют смысл, указанный в утверждении 4, $L \in L_{F^n}(X_0, l)$ и $\gamma \in L_{X_0, \varphi}$ (см. лемму 5). Тогда по лемме 5

$$\vec{\varkappa}_L^n(X_0) = \vec{b}_{ij}(u_0)\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0), \tag{1}$$

где $(\gamma^1, \dots, \gamma^n) = \varphi \circ \gamma$.

Так как γ — гомеоморфизм $(-\delta, \delta)$ на открытую окрестность точки $X_0 \in L$, L — C^2-регулярная кривая, $\gamma \in C^2$, $|\gamma'| \equiv 1$ и $\gamma(0) = X_0$, то согласно указанному в § 2 предложению о базисе направляющего пространства касательной плоскости вектор $\gamma'(0)$, как и вектор $\vec{\xi}$, является направляющим для прямой l. Поэтому $\vec{\xi} = \lambda\gamma'(0)$ при некотором $\lambda \neq 0$. Вместе с тем $\gamma = \varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma} = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, откуда следует, что

$$\gamma'(0) = \dot{\gamma}^i(0)\vec{r}_{u^i}[\gamma^1(0), \dots, \gamma^n(0)], \quad \gamma'(0) = \dot{\gamma}^i(0)\vec{r}_{u^i}(u_0)$$

и ввиду соотношений

$$\vec{\xi} = \lambda\gamma'(0), \quad \vec{\xi} = \xi^i\vec{r}_{u^i}(u_0)$$

будет

$$\xi^i = \lambda\dot{\gamma}^i(0), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

В силу того, что

$$\gamma'(0)^2 = g_{ij}(u_0)\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0) = 1,$$

из (2) имеем

$$g_{ij}(u_0)\xi^i\xi^j = \lambda^2, \quad \vec{b}_{ij}(u_0)\xi^i\xi^j = \lambda^2\vec{b}_{ij}(u_0)\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0). \tag{3}$$

Вследствие (1) и (3)

$$\vec{\varkappa}_L^{(n)}(X_0) = \frac{\vec{b}_{ij}(u_0)\xi^i\xi^j}{g_{ij}(u_0)\xi^i\xi^j}. \tag{4}$$

Так как l и $L \in L_{F^n}(X_0, l)$ взяты произвольно, утверждения 1 и 4 доказаны. Поскольку $\vec{\varkappa}_L^g(X_0)$, $\vec{\varkappa}_L^n(X_0)$ — касательная и нормальная составляющие $\vec{\varkappa}_L(X_0)$ относительно $T_{X_0}F^n$, условие $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l)$ для кривой $L \in L_{F^n}(X_0, l)$, означающее, что $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{\varkappa}_L^n(X_0)$, равносильно условию $\vec{\varkappa}_L^g(X_0) = \vec{0}$, а ввиду леммы 6 — условию $\varkappa_L^g(X_0) = 0$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает утверждение 3.

Для всякой кривой $L \in L_{F^n}(X_0, l)$ согласно определению $\vec{\varkappa}_L^g(X_0)$, $\vec{\varkappa}_L^n(X_0) = \vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l)$ и лемме 6

$$[\varkappa_L(X_0)]^2 = [\vec{\varkappa}_L(X_0)]^2 = [\varkappa_L^g(X_0)]^2 + [\vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l)]^2. \tag{5}$$

Поэтому если $L, L_1 \in L_{F^n}(X_0, l)$ и $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l)$, то

$$\varkappa_L(X_0) \leq \varkappa_{L_1}(X_0). \tag{6}$$

Пусть для кривой $L \in L_{F^n}(X_0, l)$ неравенство (6) верно для всех $L_1 \in L_{F^n}(X_0, l)$. По теореме 1 $\mathfrak{N}_{F^n}(X_0, l) \neq \varnothing$ и при $\widetilde{L} \in \mathfrak{N}_{F^n}(X_0, l)$ существует кривая $L_1 \in L_{F^n}(X_0, l)$, являющаяся окрестностью X_0 в $\widetilde{L}$, для которой $\varkappa_{L_1}^g(X_0) = 0$. Ввиду (5) и (6) отсюда следует, что $\varkappa_L^g(X_0) = 0$, а по доказанному $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l)$. Утверждение 2 также доказано. $\square$

Определение 2. Функцию $\vec{K}_{F^n, X_0} : \Lambda_{F^n, X_0} \to \mathbb{V}(\mathbb{E})$, заданную формулой

$$\vec{K}_{F^n, X_0}(l) = \vec{\varkappa}_{F^n}(X_0, l),$$

где $\varkappa_{F^n}(X_0, l) = \vec{\varkappa}_L^n(X_0)$ при $L \in L_{F^n}(X_0, l)$ (определение корректно ввиду утверждения 1 теоремы 2), называем *векторной кривизной* F^n *в точке* X_0.

В утверждении 2 теоремы 2 содержится полная геометрическая характеристика кривых $L \in L_{F^n}(X_0, l)$, для которых $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{K}_{F^n, X_0}(l)$, а согласно утверждению 3 функция $\vec{K}_{F^n, X_0}$ допускает и такие определения:

1) $\vec{K}_{F^n, X_0}(l) = \vec{\varkappa}_L(X_0)$, где $L \in L_{F^n}(X_0, l)$ — геодезическая;

2) $\vec{K}_{F^n, X_0}(l) = \vec{\varkappa}_L(X_0)$, где $L \in \mathfrak{N}_{F^n}(X_0, l)$ (т. е. L — нормальное сечение F^n в точке X_0 в направлении прямой l в смысле определения 1).

Если речь идет о поверхности F^2 в $\mathbb{E}^3$, оснащенной в окрестности точки X_0 полем $\vec{m}$ единичных нормалей, и $\vec{m}_0 = \vec{m}(X_0)$, то $L \in \mathfrak{N}_{F^n}(X_0, l)$ — нормальное сечение в обычном смысле и поэтому $\vec{K}_{F^2, X_0}(l)\vec{m}_0 = \vec{\varkappa}_L(X_0)\vec{m}_0$ — нормальная кривизна $k(l)$ оснащенной поверхности $(F^2, \vec{m})$ в точке X_0 в направлении l. Так как $\vec{K}_{F^2, X_0}(l) \| \vec{m}_0$, то

$$\vec{K}_{F^2, X_0}(l) = k(l)\vec{m}_0.$$

Пусть

$$k_1 = \min_{l \in \Lambda_{F^2, X_0}} k(l), \quad k_2 = \max_{l \in \Lambda_{F^2, X_0}} k(l)$$

— главные кривизны $(F^2, \vec{m})$ в точке X_0 и для всех $l \in \Lambda_{F^2, X_0}$ прямая $l^* \in \Lambda_{F^2, X_0}$ определена условием $l^* \perp l$. Если $k_1 = k(l_0)$, то, как известно, $k_2 = k(l_0^*)$. Кроме того, из формулы Эйлера следует, что

$$k(l) + k(l^*) = k_1 + k_2$$

при всех $l \in \Lambda_{F^2, X_0}$. Из сказанного нетрудно вывести (соответствующее рассуждение мы опускаем), что

$$k_1 k_2 = \min_{l \in \Lambda_{F^2, X_0}} k(l)k(l^*) = \min_{l \in \Lambda_{F^2, X_0}} \vec{K}_{F^2, X_0}(l)\vec{K}_{F^2, X_0}(l^*),$$

а при $F^2 \in C^3$ по теореме Гаусса

$$\min_{l \in \Lambda_{F^2, X_0}} \vec{K}_{F^2, X_0}(l)\vec{K}_{F^2, X_0}(l^*) = K_{\widetilde{F}^2}(X_0), \tag{$*$}$$

где $K_{\widetilde{F}^2}(X_0)$ — секционная кривизна $\widetilde{F}^2$ в точке X_0. Левая часть $(*)$ в отличие от произведения k_1k_2 главных кривизн имеет смысл при любой размерности объемлющего пространства $\mathbb{E}$, однако равенство $(*)$ при $\dim\mathbb{E} > 3$ в общем случае не имеет места. Вместе с тем при $F^2 \in C^3$ и любой размерности $\dim\mathbb{E} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$

$$\min_{l\in\Lambda_{F^2,X_0}} \vec{K}_{F^2,X_0}(l)\vec{K}_{F^2,X_0}(l^*) - \frac{1}{4}\min_{l\in\Lambda_{F^2,X_0}}\big[\vec{K}_{F^2,X_0}(l) - \vec{K}_{F^2,X_0}(l^*)\big]^2 = K_{\widetilde{F}^2}(X_0). \quad (**)$$

Это обобщение теоремы Гаусса доказывается в § 4. Там же приводятся другие выражения для характеристики векторной кривизны $\vec{K}_{F^2,X_0}$, стоящей в левой части равенства $(**)$, и формулы для секционных кривизн риманова пространства $\widetilde{F}^n$ при всех $n\in\mathbb{N}$, $n>2$, и условии $F^n \in C^3$.

§ 4. Обобщенная теорема Гаусса

Теорема 3. *Пусть F^2 — C^3-регулярная двумерная поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ произвольной размерности $\dim\mathbb{E}\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $X_0\in F^2$, $K_{\widetilde{F}^2}(X_0)$ — секционная кривизна риманова пространства $\widetilde{F}^2$ в точке X_0, $\varphi\in\Phi^3_{X_0}(F^2)$, $\varphi(X_0)=u_0$, $\vec{r}$ — векторная запись φ^{-1}, $g_{ij}=\vec{r}_{u_i}\vec{r}_{u_j}$, а функции $\vec{b}_{ij}:\operatorname{im}\varphi\to\mathbb{V}(\mathbb{E})$ определяются из разложений*

$$\vec{r}_{u^iu^j} = \Gamma^\alpha_{ij}\vec{r}_{u^\alpha} + \vec{b}_{ij}, \quad i,j=1,2,\dots. \quad (1)$$

и условий

$$\vec{b}_{ij}\vec{r}_{u^\beta}\equiv 0, \quad i,j,\beta=1,2,\dots. \quad (2)$$

согласно лемме 3 (§ 3).

Тогда

$$K_{\widetilde{F}^2}(X_0) = \frac{\vec{b}_{11}(u_0)\vec{b}_{22}(u_0) - \vec{b}^2_{12}(u_0)}{g_{11}(u_0)g_{22}(u_0) - g^2_{12}(u_0)}. \quad (3)$$

Доказательство. Из равенств, определяющих g_{ij}, Γ^α_{ij} (см. лемму 3), условия $F^2\in C^3$ и равенств (1) следует:

$$\vec{r}\in C^3, \quad g_{ij}\in C^2, \quad \Gamma^\alpha_{ij}\in C^1, \quad \vec{b}_{ij}\in C^1, \qquad i,j,\alpha=1,2,\dots. \quad (4)$$

Ввиду (1), (4) и (2)

$$\vec{r}_{u^1u^1u^2}\vec{r}_{u^2} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{11}}{\partial u^2}g_{\alpha2} + \Gamma^\alpha_{11}\Gamma^\beta_{\alpha2}g_{\beta2} + \frac{\partial\vec{b}_{11}}{\partial u^2}\vec{r}_{u^2}. \quad (5)$$

Так как $\vec{b}_{11}\vec{r}_{u^2}\equiv 0$, то

$$\frac{\partial\vec{b}_{11}}{\partial u^2}\vec{r}_{u^2} = -\vec{b}_{11}\vec{r}_{u^2u^2} = -\vec{b}_{11}\vec{b}_{22}$$

(мы учли (1) и (2)) и ввиду (5)

$$\vec{r}_{u^1u^1u^2}\vec{r}_{u^2} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{11}}{\partial u^2}g_{\alpha2} + \Gamma^\alpha_{11}\Gamma^\beta_{\alpha2}g_{\beta2} - \vec{b}_{11}\vec{b}_{22}. \quad (6)$$

Аналогично найдем, что

$$\vec{r}_{u^1u^2u^1}\vec{r}_{u^2} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{12}}{\partial u^1}g_{\alpha2} + \Gamma^\alpha_{12}\Gamma^\beta_{\alpha1}g_{\beta2} - \vec{b}^2_{12}. \quad (7)$$

Поскольку $\vec{r}_{u^1u^1u^2} = \vec{r}_{u^1u^2u^1}$ и $g_{11}g_{22}-g^2_{12}>0$ всюду в $\operatorname{im}\varphi$, из (6), (7), связи функций Γ^α_{ij} с g_{ij}, указанной в лемме 3, и известной формулы для секционной кривизны двумерного риманова пространства вытекает (3). □

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы 3* $l_1, l_2, l \in \Lambda_{F^2,X_0}$, $l_1 \neq l_2$, l — *биссектриса угла величины* α, $0 < \alpha < \pi$, *между* l_1, l_2,

$$\vec{k}_1 = \vec{K}_{F^2,X_0}(l_1), \quad \vec{k}_2 = \vec{K}_{F^2,X_0}(l_2), \quad \vec{k} = \vec{K}_{F^2,X_0}(l).$$

Тогда

$$K_{\widetilde{F}^2}(X_0) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[\vec{k}_1\vec{k}_2 - \left[2\cos^2\frac{\alpha}{2}\vec{k} - \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\right]^2\right]. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть φ, u_0, $\vec{r}$, g_{ij} и $\vec{b}_{ij}$ те же, что и в теореме 3. Не уменьшая общности, считаем, что $\vec{r}_{u^1}(u_0)$, $\vec{r}_{u^2}(u_0)$ — направляющие векторы прямых l_1, l_2, $g_{11}(u_0) = g_{22}(u_0) = 1$ и α — угол между $\vec{r}_{u^1}(u_0)$, $\vec{r}_{u^2}(u_0)$. Тогда

$$g_{12}(u_0) = \cos\alpha, \quad g_{11}(u_0)g_{22}(u_0) - g_{12}^2(u_0) = \sin^2\alpha, \tag{2}$$

а $\vec{r}_{u^1}(u_0) + \vec{r}_{u^2}(u_0)$ — направляющий вектор прямой l. Отсюда ввиду утверждения 4 теоремы 2 следует, что

$$\vec{k}_1 = \vec{b}_{11}(u_0), \quad \vec{k}_2 = \vec{b}_{22}(u_0), \quad \vec{k} = \frac{\vec{b}_{11}(u_0) + 2\vec{b}_{12}(u_0) + \vec{b}_{22}(u_0)}{2(1+\cos\alpha)}, \tag{3}$$

$$\vec{b}_{12}(u_0) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\vec{k} - \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2). \tag{4}$$

Из (2)–(4) и теоремы 3 вытекает (1). □

Теорема 4 выражает $\vec{K}_{\widetilde{F}^2}(X_0)$ через характеристику векторной кривизны $\vec{K}_{\widetilde{F}^2,X_0}$, стоящую в правой части формулы (1), и является одним из вариантов обобщенной теоремы Гаусса. Приведем еще два варианта этой теоремы, опирающиеся на следующее свойство векторной кривизны.

Лемма 7. *Пусть* F^2 — C^2*-регулярная поверхность в* $\mathbb{E}$, $\dim\mathbb{E} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $X_0 \in F^2$, $l_1, l_2 \in \Lambda_{F^2,X_0}$ *и* $l_1 \perp l_2$. *Тогда вектор*

$$\vec{K}_{F^2,X_0}(l_1) + \vec{K}_{F^2,X_0}(l_2)$$

не зависит от выбора l_1.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Phi^2_{X_0}(F^2)$, $\varphi(X_0) = u_0$, $\vec{r}$, g_{ij}, $\vec{b}_{ij}$ имеют прежний смысл, карта φ такова, что

$$g_{11}(u_0) = g_{22}(u_0) = 1, \quad g_{12}(u_0) = 0, \tag{1}$$

а $\vec{e}_1$ — единичный направляющий вектор прямой l_1. Ввиду (1)

$$\vec{r}^{\,2}_{u^1}(u_0) = \vec{r}^{\,2}_{u^2}(u_0) = 1, \quad \vec{r}_{u^1}(u_0)\vec{r}_{u^2}(u_0) = 0.$$

Поэтому при некотором θ будет

$$\vec{e}_1 = \vec{r}_{u^1}(u_0)\cos\theta + \vec{r}_{u^2}(u_0)\sin\theta,$$

а

$$\vec{e}_2 = -\vec{r}_{u^1}(u_0)\sin\theta + \vec{r}_{u^2}(u_0)\cos\theta$$

— направляющий вектор прямой l_2. Из (1) и утверждения 4 теоремы 2 следует, что

$$\vec{K}_{F^2,X_0}(l_1) = \vec{b}_{11}(u_0)\cos^2\theta + 2\vec{b}_{12}(u_0)\cos\theta\sin\theta + \vec{b}_{22}(u_0)\sin^2\theta, \tag{2}$$

$$\vec{K}_{F^2,X_0}(l_2) = \vec{b}_{11}(u_0)\sin^2\theta - 2\vec{b}_{12}(u_0)\sin\theta\cos\theta + \vec{b}_{22}(u_0)\cos^2\theta. \tag{3}$$

Ввиду (2) и (3) при всех $l_1 \in \Lambda_{F^2,X_0}$

$$\vec{K}_{F^2,X_0}(l_1) + \vec{K}_{F^2,X_0}(l_2) = \vec{b}_{11}(u_0) + \vec{b}_{22}(u_0). \quad \square \tag{4}$$

В связи с леммой 7 естественно ввести

Определение 3. В условиях леммы 7 вектор

$$\vec{H}_{F^2}(X_0) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[\vec{K}_{F^2,X_0}(l_1) + \vec{K}_{F^2,X_0}(l_2)],$$

где $l_1, l_2 \in \Lambda_{F^2,X_0}$ и $l_1 \perp l_2$, будем называть *вектором средней кривизны поверхности F^2 в точке X_0*.

Нетрудно заметить, что для оснащенной поверхности $(F^2, \vec{m})$ в $\mathbb{E}^3$ будет

$$\vec{H}_{F^2}(X_0) = H_{F^2}(X_0)\vec{m}(X_0),$$

где $H_{F^2}(X_0)$ — средняя кривизна $(F^2, \vec{m})$ в обычном смысле.

Теорема 5. *Пусть в условиях теоремы* 3 *прямые* $l_i \in \Lambda_{F^2,X_0}$, $i = 1,2,3,4$, *таковы, что* $l_1 \perp l_2$, $l_3 \perp l_4$, l_3 *— биссектриса любого из углов между* l_1, l_2, $\vec{k}_i = \vec{K}_{F^2,X_0}(l_i)$ *и* $\vec{H} = \vec{H}_{F^2}(X_0)$. *Тогда*

$$K_{\widetilde{F}^2}(X_0) = \vec{k}_1\vec{k}_2 - (\vec{k}_3 - \vec{H})^2 = \vec{k}_1\vec{k}_2 - \frac{1}{4}(\vec{k}_3 - \vec{k}_4)^2. \tag{1}$$

Доказательство. Полагая в теореме 4 $\alpha = \pi/2$, $\vec{k} = \vec{k}_3$ и замечая, что ввиду условия $l_1 \perp l_2$ будет $\vec{H} = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$, получим первое из равенств (1). Для получения второго равенства достаточно учесть, что ввиду условия $l_3 \perp l_4$ имеем $\vec{H} = \frac{1}{2}(\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$, и поэтому

$$\vec{k}_3 - \vec{H} = \frac{1}{2}(\vec{k}_3 - \vec{k}_4). \quad \square$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и функции*

$$f_1, f_2 : \Lambda_{F^2,X_0} \to \mathbb{R}$$

заданы формулами

$$f_1(l) = \vec{K}_{F^2,X_0}(l)\vec{K}_{F^2,X_0}(l^*), \tag{1}$$

$$f_2(l) = [\vec{K}_{F^2,X_0}(l) - \vec{K}_{F^2,X_0}(l^*)]^2, \tag{2}$$

где $l^* \in \Lambda_{F^2,X_0}$ *и* $l^* \perp l$.

Справедливы следующие утверждения.

1. *Существуют наименьшие значения* $\min f_1$, $\min f_2$ *функций* f_1, f_2 *и*

$$K_{\widetilde{F}^2}(X_0) = \min f_1 - \frac{1}{4}\min f_2 \tag{3}$$

2. *Есть только две возможности:* 1) $f_1 = \mathrm{const}$ *и* $f_2 = \mathrm{const}$; 2) *существуют ровно две прямые* l_1, l_1^*, *для которых* $f_1(l_1) = f_1(l_1^*) = \min f_1$, *и ровно две прямые* l_2, l_2^*, *для которых* $f_2(l_2) = f_2(l_2^*) = \min f_2$; *при этом* $l_1^* \perp l_1$, $l_2^* \perp l_2$, *а* l_2, l_2^* *— биссектрисы углов, образованных прямыми* l_1, l_1^*.

Доказательство. Сохраняя прежние обозначения и условия, наложенные на карту $\varphi \in \Phi^3_{X_0}(F^2)$ в доказательстве леммы 7, положим $\vec{b}^0_{ij} = \vec{b}_{ij}(u_0)$, где $u_0 = \varphi(X_0)$, для всякого $\theta \in \mathbb{R}$ обозначим через $l(\theta)$ прямую из Λ_{F^2,X_0} с направляющим вектором

$$\vec{r}_{u_1}(u_0)\cos\theta + \vec{r}_{u_2}(u_0)\sin\theta,$$

и пусть $\vec{k}(\theta) = \vec{K}_{F^2,X_0}[l(\theta)]$. Тогда ввиду формул из доказательства леммы 7

$$\vec{k}(\theta) = \vec{b}^0_{11}\cos^2\theta + 2\vec{b}^0_{12}\cos\theta\sin\theta + \vec{b}^0_{22}\sin^2\theta. \tag{4}$$

Поэтому существуют

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}} \vec{k}(\theta)\vec{k}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \quad \min_{\theta\in\mathbb{R}} \left[\vec{k}(\theta)-\vec{k}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2,$$

а из определения функций f_1, f_2 вытекает, что

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}} \vec{k}(\theta)\vec{k}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \min f_1, \tag{5}$$

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}} \left[\vec{k}(\theta)-\vec{k}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \min f_2. \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что по теореме 5 при всех θ

$$K_{\widetilde{F}^2}(X_0) + \frac{1}{4}\left[\vec{k}(\theta)-\vec{k}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \vec{k}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\vec{k}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \tag{7}$$

а ввиду (5)

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}} \vec{k}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\vec{k}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \min f_1. \tag{8}$$

Из (7), (6) и (8) следует (3).

2. Рассмотрим функцию $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, заданную формулой

$$h(\theta) = \left[\vec{k}(\theta)-\vec{k}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2, \tag{9}$$

и положим

$$a_1 = 4\big(\vec{b}^0_{11}-\vec{b}^0_{22}\big)\vec{b}^0_{12}, \quad a_2 = -\big(\vec{b}^0_{11}-\vec{b}^0_{22}\big)^2 + 4\big(\vec{b}^0_{12}\big)^2. \tag{10}$$

Из (4), (9) и (10) нетрудно вывести, что при всех θ

$$h'(\theta) = a_1\cos 4\theta + a_2\sin 4\theta, \tag{11}$$

$$h''(\theta) = 2a_2\cos 4\theta - 2a_1\sin 4\theta. \tag{12}$$

Допустим, что $a_1 = a_2 = 0$. Тогда ввиду (11) $h = \mathrm{const}$, а из (9), определения $\vec{k}(\theta)$ и (2) следует, что $f_2 = \mathrm{const}$. Кроме того, ввиду (7) при $h = \mathrm{const}$ величина $\vec{k}\big(\theta-\frac{\pi}{4}\big)\vec{k}\big(\theta+\frac{\pi}{4}\big)$, а тем самым и $\vec{k}(\theta)\vec{k}\big(\theta+\frac{\pi}{2}\big)$ не зависит от θ. Поэтому ввиду (1) и определения $\vec{k}(\theta)$ оказывается $f_1 = \mathrm{const}$.

Пусть теперь $(a_1,a_2)\neq(0,0)$. Тогда $a_1^2+a_2^2>0$ и если

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 2a_2 & -2a_1 \end{pmatrix},$$

то $\det A < 0$ и ввиду (11), (12)

$$h'(\theta) = 0 \Longrightarrow h''(\theta)\neq 0. \tag{13}$$

Пусть $l_2 = l(\theta_0)$ и $f_2(l_2) = \min f_2$. Тогда, как видно из определения функций f_2 и h, имеем $h(\theta_0) = \min h$ и ввиду (13), (11) и (12)

$$a_1\cos 4\theta_0 + a_2\sin 4\theta_0 = 0, \tag{14}$$

$$2a_2\cos 4\theta_0 - 2a_1\sin 4\theta_0 > 0. \tag{15}$$

Поскольку $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, равенство (14) определяет $4\theta_0$ с точностью до слагаемого $m\pi$, $m \in \mathbb{N}$, а при нечетном m замена $4\theta_0$ на $4\theta_0 + m\pi$ нарушает неравенство (15). Поэтому условия (14) и (15) определяют $4\theta_0$ с точностью до $2m\pi$, а θ_0 — с точностью до кратного $\pi/2$. Отсюда следует, что прямая l_2 определена с точностью до замены ее прямой $l_2^* \perp l_2$. Ввиду теоремы 5 прямая l_1, для которой $f_1(l_1) = \min f_1$, также определена с точностью до замены ее прямой $l_1^* \perp l_1$ и l_2, l_2^* — биссектрисы углов между l_1, l_1^*.

Мы установили, что все возможности исчерпываются указанными в теореме. Очевидно, что каждая из них реализуема при $\dim \mathbb{E} = 3$. $\square$

Замечание. Из (4) и (6) нетрудно вывести, что равенство $\min f_2 = 0$ равносильно разрешимости уравнения

$$\left(\vec{b}_{11}^0 - \vec{b}_{22}^0\right) \cos 2\theta + 2\vec{b}_{12}^0 \sin 2\theta = \vec{0}. \tag{16}$$

При $\dim \mathbb{E} = 3$ разрешимость (16) обеспечена коллинеарностью векторов $\vec{b}_{11}^0$, $\vec{b}_{22}^0$ и $\vec{b}_{12}^0$ и формула (3) превращается в формулу $(*)$ из § 3, выведенную из классической теоремы Гаусса. Вместе с тем нетрудно указать двумерную поверхность 2-го порядка в $\mathbb{E}^4$, для которой уравнение (16) неразрешимо, и поэтому при $\dim \mathbb{E} > 3$ необходима замена $(*)$ формулой $(**)$ из § 3, которая ввиду теоремы 6 верна при любой, в том числе бесконечной, размерности объемлющего пространства $\mathbb{E}$.

Теоремы 4–6 содержат различные варианты обобщения теоремы Гаусса на двумерные поверхности $F^2 \subset \mathbb{E}$ при $\dim \mathbb{E} > 3$. В каждой из этих теорем секционная кривизна $K_{\widetilde{F}^2}(X_0)$ риманова пространства $\widetilde{F}^2$, соответствующего поверхности F^2 (т. е. гауссова кривизна F^2 в смысле внутренней геометрии) выражается через те или иные числовые характеристики ее векторной кривизны $\vec{K}_{F^2,X_0}$. В теореме 7 будет установлена связь между числовыми характеристиками векторной кривизны $\vec{K}_{F^2,X_0}$ поверхности $F^n \subset \mathbb{E}$ при $n > 2$ и секционными кривизнами риманова пространства $\widetilde{F}^n$ в точке X_0.

Напомним (см. § 2), что $P_{X_0}^n$ — касательная плоскость к F^n в точке X_0, $T_{X_0}F^n$ — ее направляющее векторное подпространство $\mathbb{V}(\vec{\mathbb{E}})$, $T_{X_0}\widetilde{F}^n$ — касательное пространство риманова пространства $\widetilde{F}^n$ в точке X_0, а $\vec{P}_{x_0}^{F^n}$ — его изоморфизм на $T_{X_0}F^n$, определяемый независимо от выбора карты $\varphi \in \Phi_{X_0}^k(F^n)$ и ее векторной записи $\vec{r}$ формулой

$$\vec{P}_{X_0}^{F^n}(\xi) = \vec{r}_{u^\alpha}(u_0)\xi^\alpha,$$

где ξ^α — координаты вектора $\xi \in T_{X_0}\widetilde{F}^n$ в карте φ, $u_0 = \varphi(X_0)$.

Введем следующие термины и обозначения.

Определение 4. Пусть $F^n \in C^k$, $k \geq 2$, W — двумерное подпространство $T_{X_0}\widetilde{F}^n$, $P_{X_0,W}^2 \subset P_{X_0}^n$ — двумерная плоскость с направляющим пространством $\vec{P}_{x_0}^{F^n}(W)$, проходящая через X_0,

$$\Lambda_{F^n,X_0}^W = \left\{ l \in \Lambda_{F^n,X_0} \mid l \subset P_{X_0,W}^2 \right\}.$$

Сужение векторной кривизны $\vec{K}_{F^n,X_0}$ поверхности F^n в точке X_0 на множество Λ_{F^n,X_0}^W будем называть *векторной кривизной F^n в точке X_0 в направлении W* и обозначать через $\vec{K}_{F^n,X_0}^W$, а при $k \geq 3$ секционную кривизну риманова пространства $\widetilde{F}^n$ в точке X_0 в направлении W будем обозначать через $K_{\widetilde{F}^n}^W(X_0)$.

Теорема 7. *В условиях определения 4 справедливы следующие утверждения.*

1. Лемма 7 остается в силе при замене F^2 на F^n, Λ_{F^2,X_0} на $\Lambda^W_{F^n,X_0}$ и $\vec{K}_{F^2,X_0}$ на $\vec{K}^W_{F^n,X_0}$. Соответственно определение вектора $\vec{H}^W_{F^n}(X_0)$ средней кривизны F^n в точке X_0 в направлении W, получаемое из определения 3 при указанных заменах, является корректным.

2. Если $k \geq 3$, то теоремы 4, 5 и 6 остаются в силе при замене F^2 на F^n, Λ_{F^2,X_0} на $\Lambda^W_{F^n,X_0}$, $\vec{K}_{F^2,X_0}$ на $\vec{K}^W_{F^n,X_0}$, $K_{\widetilde{F}^2}(X_0)$ на $K^W_{\widetilde{F}^n}(X_0)$ и $\vec{H}_{F^2}(X_0)$ на $\widetilde{H}^W_{F^n}(X_0)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Phi^k_{X_0}(F^n)$, $u_0 = \varphi(X_0)$, g_{ij} — компоненты метрического тензора C^{k-1}-риманова пространства $\widetilde{F}^n$ в карте φ, $\tilde{g}_{ij}$ — их полиномы Тейлора степени $k-1$ в точке u_0. Найдется такая окрестность $U \subset \operatorname{im}\varphi$ точки u_0, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$, что при всех $u \in U$ квадратичная форма $\tilde{g}_{ij}(u)\xi^i\xi^j$ положительно определена. Положим $\tilde{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{g}_{ij}|_U$, и пусть $\varphi^{-1}(U) \subset F^n$ — n-мерное C^∞-риманово пространство $\widetilde{\widetilde{F}}^n$ с полным C^∞-атласом $\mathscr{A}(\widetilde{\widetilde{F}}^n) \subset \Phi^k(F^n)$, заданным картой $\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi|_U$, и метрическим тензором с компонентами $\tilde{\tilde{g}}_{ij} \in C^\infty$ в карте $\tilde{\tilde{\varphi}}$. Существование систем нормальных римановых координат в окрестности каждой точки пространства $\widetilde{\widetilde{F}}^n$ гарантирует наличие карты $\varphi_0 \in \mathscr{A}(\widetilde{\widetilde{F}}^n)$ с такими свойствами:

1) $X_0 \in \operatorname{dom}\varphi_0$ и $\varphi_0(X_0) = (0,\dots,0)$;

2) если $\tilde{\tilde{g}}^0_{ij}$ — компоненты метрического тензора пространства $\widetilde{\widetilde{F}}^n$ в карте φ_0, то

$$\tilde{\tilde{g}}^0_{ij}(0,\dots,0) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \tilde{\tilde{g}}^0_{ij}}{\partial v^k}(0,\dots,0) = 0$$

при всех $i,j,k = 1,\dots,n$ ($v^1,\dots,v^n$ — координаты точек в карте φ_0);

3) существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$(v^1,\dots,v^n) \in \operatorname{im}\varphi_0 \Longleftrightarrow v^i = \xi^i t,$$

где ξ^i — компоненты единичного вектора $\xi \in T_{X_0}\widetilde{\widetilde{F}}^n$ в карте φ_0, а $-\varepsilon < t < \varepsilon$, при этом путь γ в $\widetilde{\widetilde{F}}^n$, задаваемый в карте φ_0 уравнениями $v^i = \xi^i t$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, — естественная параметризация геодезической в $\widetilde{\widetilde{F}}^n$;

4) подпространство $W \subset T_{X_0}\widetilde{F}^n = T_{X_0}\widetilde{\widetilde{F}}^n$ натянуто на векторы, имеющие в карте φ_0 координаты $1,0,\dots,0$ и $0,1,\dots,0$ (из определения $\widetilde{\widetilde{F}}^n$ видно, что $T_X\widetilde{\widetilde{F}}^n = T_X\widetilde{F}^n$ для всех $X \in \widetilde{\widetilde{F}}^n$).

Положим

$$F^2 = \{\varphi_0^{-1}(v^1,v^2,0,\dots,0) \mid (v^1)^2 + (v^2)^2 < \varepsilon^2\}. \tag{1}$$

Поскольку $\varphi_0 \in \mathscr{A}(\widetilde{\widetilde{F}}^n) \subset \Phi^k(F^n)$, из (1) следует, что F^2 — двумерная C^k-регулярная поверхность в $\mathbb{E}$. Обозначим через $\widetilde{F}^2$ двумерное C^{k-1}-риманово пространство, соответствующее F^2 (см. § 2). Оно является подпространством риманова пространства $\widetilde{F}^n$. То же самое C^k-гладкое многообразие, рассматриваемое как подпространство риманова пространства $\widetilde{\widetilde{F}}^n$, обозначаем через $\widetilde{\widetilde{F}}^2$. Ввиду свойств 3 и 4 карты φ_0 подпространство $\widetilde{\widetilde{F}}^2$ является геодезическим в точке X_0 и $W = T_{X_0}\widetilde{\widetilde{F}}^2$. Отсюда вытекает, во-первых, что $P^2_{X_0,W}$ — касательная плоскость к F^2 в точке X_0 и поэтому

$$\Lambda^W_{F^n,X_0} = \Lambda_{F^2,X_0}, \tag{2}$$

а во-вторых,

$$k \geq 3 \Longrightarrow K^W_{\widetilde{\widetilde{F}}^n}(X_0) = K_{\widetilde{\widetilde{F}}^2}(X_0). \tag{3}$$

Пусть $l \in \Lambda_{F^2,X_0}$. Ввиду (2) найдется такой единичный вектор $\xi \in W \subset T_{X_0}\widetilde{F}^n = T_{X_0}\widetilde{\widetilde{F}}^n$ пространства $\widetilde{\widetilde{F}}^n$ в точке X_0, что $\vec{\xi} = \vec{P}^{F^n}_{X_0}(\xi) \in T_{X_0}F^n$ — направляющий вектор прямой l. Если ξ^i — компоненты ξ в карте φ_0, то путь $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to F^n$, задаваемый в карте φ_0 параметрическими уравнениями $v^i = \xi^i t$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, по свойству 3 является естественной параметризацией геодезической L в римановом пространстве $\widetilde{\widetilde{F}}^n$, проходящей через X_0. Вместе с тем L — C^k-регулярная кривая на F^n (не являющаяся, вообще говоря, геодезической) и l — касательная к ней в точке X_0. Покажем, что

$$\varkappa^g_L(X_0) = 0. \tag{4}$$

Из определения компонент $\tilde{\tilde{g}}_{ij}$ метрического тензора пространства $\widetilde{\widetilde{F}}^n$ в карте φ следует, что

$$\tilde{\tilde{g}}_{ij}(u_o) = g_{ij}(u_0), \quad \frac{\partial \tilde{\tilde{g}}_{ij}}{\partial u^k}(u_0) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(u_0), \tag{5}$$

$$k \geq 3 \Longrightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{g}}_{ij}}{\partial u^k \partial u^p}(u_0) = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^p}(u_0) \tag{6}$$

при всех $i, j, k, p = 1, \ldots, n$ (напомним, что g_{ij} — компоненты метрического тензора риманова пространства $\widetilde{F}^n$, соответствующего поверхности F^n, в карте φ). Пусть g^0_{ij} — компоненты метрического тензора пространства $\widetilde{F}^n$ в карте φ_0, $v_0 = \varphi_0(X_0) = (0, \ldots, 0)$. Ввиду формул преобразования компонент метрического тензора и их производных из соотношений (5), (6) вытекают аналогичные соотношения для карты φ_0, которые по свойству 2 карты φ_0 таковы:

$$\tilde{\tilde{g}}^0_{ij}(v_0) = g^0_{ij}(v_0) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \tilde{\tilde{g}}^0_{ij}}{\partial v^k}(v_0) = \frac{\partial g^0_{ij}}{\partial v^k}(v_0) = 0, \tag{7}$$

$$k \geq 3 \Longrightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{g}}^0_{ij}}{\partial v^k \partial v^p}(v_0) = \frac{\partial^2 g^0_{ij}}{\partial v^k \partial v^p}(v_0), \tag{8}$$

где $i, j, k, p = 1, \ldots, n$. Ввиду формул, задающих компоненты γ^i записи пути γ в карте φ_0, имеем

$$\dot{\gamma}^i \equiv \xi^i, \ddot{\gamma}^i \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Зададим функцию $s : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ формулой

$$s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{g^0_{ij}(\xi^1\tau, \ldots, \xi^n\tau)\xi^i\xi^j}\, d\tau. \tag{10}$$

Очевидно, что s обратима и $s, s^{-1} \in C^2$. Положим $\gamma_0 = \gamma \circ s^{-1}$. Поскольку g^0_{ij} — компоненты метрического тензора $\widetilde{F}^n$ в карте φ_0, из (9) и (10) легко вытекает, что

$$|\gamma_0'| \equiv 1. \tag{11}$$

Учитывая еще соотношения

$$\frac{\partial g^0_{ij}}{\partial v^k}(v_0) = 0$$

из (7), нетрудно установить, что если γ^i_0 — компоненты записи пути γ_0 в карте φ_0, то

$$\ddot{\gamma}^i_0(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{12}$$

Если Γ^k_{ij} — коэффициенты Кристоффеля пространства $\widetilde{F}^n$ в карте φ_0, то ввиду (7)

$$\Gamma^k_{ij}(v_0) = 0. \tag{13}$$

Путь γ_0 наряду с γ является параметризацией L, при этом $\gamma_0(0) = X_0$, поскольку $\gamma^i_0(0) = \gamma^i(0) = 0$ при всех $i = 1, \dots, n$, а $\varphi(X_0) = (0, \dots, 0)$. Поэтому из (11)–(13) следует (4).

Согласно теореме 2 из § 3 из (4) выводим, что вектор $\vec{\varkappa}_L(X_0)$ кривизны кривой L в точке X_0 ортогонален касательной плоскости $P^n_{X_0}$ к F^n, а тем самым и касательной плоскости $P^2_{X_0,W} \subset P^n_{X_0}$ к $F^2 \subset F^n$ в точке X_0. Так как l — касательная к L в точке X_0, из определения 2 следует, что $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{K}_{F^n,X_0}(l)$ и $\vec{\varkappa}_L(X_0) = \vec{K}_{F^2,X_0}(l)$. Ввиду (2), произвольности $l \in \Lambda_{F^2,X_0}$ и определения 4 доказано, что

$$\vec{K}^W_{F^n,X_0} = \vec{K}_{F^2,X_0}. \tag{14}$$

Для доказательства первого утверждения теоремы остается применить лемму 7 к поверхности F^2.

Пусть $k \geq 3$. Тогда из выражений секционных кривизн пространств $\widetilde{F}^n$, $\widetilde{\widetilde{F}}^n$ в точке X_0 через компоненты g^0_{ij}, $\tilde{g}^0_{ij}$ их метрических тензоров в карте φ_0 и аналогичных формул для $K_{\widetilde{F}^2}(X_0)$, $K_{\widetilde{\widetilde{F}}^2}(X_0)$ ввиду соотношений (7) и (8) следует, что

$$K^W_{\widetilde{F}^n}(X_0) = K^W_{\widetilde{\widetilde{F}}^n}(X_0), \quad K_{\widetilde{F}^2}(X_0) = K_{\widetilde{\widetilde{F}}^2}(X_0). \tag{15}$$

Ввиду (15) и (3)

$$K^W_{\widetilde{F}^n}(X_0) = K_{\widetilde{F}^2}(X_0). \tag{16}$$

Из (2), (14), (16) и теорем 4–6 вытекает второе утверждение теоремы. □

Отметим два очевидных следствия теорем 7, 4 и 2.

Следствие 1. *Пусть $n \geq 2$, F^n — C^3-регулярная n-мерная поверхность в $\mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $X_0 \in F^n$, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}$ — геодезические, проходящие через X_0, l_1, l_2, l — касательные к ним в точке X_0, l — биссектриса угла величины α $(0 < \alpha < \pi)$ между l_1, l_2, P^2 — двумерная плоскость, проходящая через l_1, l_2, $W \subset T_{X_0}\widetilde{F}^n$ и $\vec{P}^{F^n}_{X_0}(W)$ — направляющее пространство плоскости P^2. Тогда*

$$K^W_{\widetilde{F}^n}(X_0) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\biggl(\vec{\varkappa}_{\mathscr{L}_1}(X_0)\vec{\varkappa}_{\mathscr{L}_2}(X_0) - \biggl[2\cos^2\frac{\alpha}{2}\vec{\varkappa}_{\mathscr{L}}(X_0) - \frac{1}{2}(\vec{\varkappa}_{\mathscr{L}_1}(X_0) + \vec{\varkappa}_{\mathscr{L}_2}(X_0))\biggr]^2\biggr).$$

Следствие 2. *Если при тех же условиях на поверхность F^n все секционные кривизны пространства $\widetilde{F}^n$ положительны (соответственно неотрицательны), то для любой точки $X_0 \in F^n$ и проходящих через X_0 геодезических $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ будет $\vec{\varkappa}_{\mathscr{L}_1}(X_0)\vec{\varkappa}_{\mathscr{L}_2}(X_0) > 0$ (соответственно $\vec{\varkappa}_{\mathscr{L}_1}(X_0)\vec{\varkappa}_{\mathscr{L}_2}(X_0) \geq 0$), а для* *любого двумерного направления* $W \subset T_{X_0}F^n$ *существует проходящая через* X_0 *геодезическая* $\mathscr{L}$ *с такими свойствами:*

1) *касательная к* $\mathscr{L}$ *в точке* X_0 *лежит в плоскости с направляющим пространством* $\vec{P}^{F^n}_{X_0}(W)$;

2) $\varkappa_{\mathscr{L}}(X_0) \geq \sqrt{K^W_{\widetilde{F}^n}(X_0)}$.

Следствие 2 вытекает из предыдущего (для доказательства второго утверждения полагаем $\alpha = \pi/2$).

Оценка в свойстве 2, очевидно, неулучшаема.

В заключение заметим, что характеристики векторной кривизны, равные согласно теоремам 4–7 секционным кривизнам, определены для C^2-регулярной поверхности, тогда как выражения секционных кривизн через компоненты метрического тензора, на которые мы ссылаемся, требуют C^3-регулярности. Что касается самого понятия секционных кривизн, то оно имеет известное геометрическое определение, применимое к C^1-римановым пространствам, которые соответствуют C^2-регулярным поверхностям. Однако доказательство теоремы 3, лежащей в основе теорем 4–7, опирается на C^3-регулярность рассматриваемых поверхностей, так что естественный вопрос об ослаблении этого условия остается открытым (исключение составляют двумерные поверхности в $\mathbb{E}^3$, для которых возможность замены C^3-регулярности C^2-регулярностью нетрудно вывести из теорем Погорелова о поверхностях ограниченной внешней кривизны). Представляется интересным и «облегченный вариант» поставленного вопроса: верно ли, что если C^2-регулярные поверхности F^n_1, F^n_2 в $\mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, таковы, что римановы пространства $\widetilde{F}^n_1$, $\widetilde{F}^n_2$ изоморфны, то в точках и двумерных направлениях, соответствующих при изоморфизме, характеристики векторных кривизн, указанные в теореме 7, совпадают.

Статья поступила 6 октября 2000 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН