Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 513.763

О КЛАССЕ СОБОЛЕВА $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ И КВАЗИРЕГУЛЯРНОСТИ

Я. Мали, С. П. Пономарев

Аннотация: Используя базис дифференцирования, составленный из семейства борелевских множеств конечного периметра, а также весьма общий вариант дифференциальной теоремы Гаусса — Грина — Остроградского, авторы доказывают интегральный признак принадлежности непрерывной функции классу Соболева. С помощью этого признака доказывается критерий типа теоремы Мореры о квазирегулярности непрерывного открытого дискретного отображения многомерных областей. Библиогр. 18.

Теория квазирегулярных отображений или, иными словами, отображений с ограниченным искажением является естественным и полезным обобщением комплексного анализа. Это понятие введено Ю. Г. Решетняком в серии работ, начинающихся с [1] и затем развито Мартио, Рикманом, Вяйсяля [2] и др.

Наиболее важные результаты собраны в монографиях [3–7]. В этих книгах можно также найти исторический экскурс и ссылки на литературу.

Определение квазирегулярного отображения аналитично и использует слабую производную, см. ниже определение 1. Естественно встает вопрос о нахождении чисто геометрических условий, характеризующих ограниченность искажения. Одна из возможностей состоит в использовании дилатации. Согласно классическому результату Мартио, Рикмана и Вяйсяля [2] отображение квазирегулярно тогда и только тогда, когда оно непрерывно, дискретно, открыто, сохраняет или обращает ориентацию и удовлетворяет дилатационному неравенству (точную формулировку см. в [8, теорема 6.2]).

В данной работе мы предлагаем другой критерий, основанный на граничном интегрировании и напоминающий теорему Морера в комплексном анализе. В [9, 10] такой критерий доказан вторым из авторов посредством интегрирования по границам интервалов или кубов в $\mathbb{R}^n$. В нашей статье мы имеем дело с более общей «базой дифференцирования» (см. определения ниже).

Как и в [10], удобно сначала доказать принадлежность функции соболевскому классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, $p > 1$. Начнем с предварительных сведений и определений.

Обозначим через $\mathscr{D}$ область (т. е. открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $x \cdot y$ скалярное произведение x и y и через $|x|$ — евклидову норму x. Положим $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < r\}$.

Если $E \subset \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, то $x + E = \{x + y : y \in E\}$. Характеристическая функция множества E обозначается через χ_E. Включение $E \Subset \mathscr{D}$ означает, что замыкание $\overline{E}$ множества E компактно и содержится в $\mathscr{D}$. Символ $|E|$ означает

Работа первого автора поддержана исследовательским проектом CEZ J13/98113200007, Grant № 201/97/1161 Чешского грантового центра (GAČR), и Charles University (GAUK), грант № 165/99.

внешнюю лебегову меру множества E и $H^k(E)$ — внешнюю k-мерную меру Хаусдорфа множества E. Мы используем сокращение

$$\fint_E f\,dx = |E|^{-1}\int_E f\,dx.$$

Будем говорить, что отображение *слабо дифференцируемо*, если его обобщенная производная локально интегрируема. Для слабо дифференцируемого отображения символом $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ мы обозначаем линейный оператор, матрица которого в каноническом базисе есть матрица Якоби $(\partial f_i(x)/\partial x_j)$. Под нормой $\|f'(x)\|$ понимается операторная норма. Через $J(f,x)$ обозначается якобиан f в x, т. е. определитель $f'(x)$.

Через $\mathscr{C}_c^k(\mathscr{D})$ будем обозначать множество всех дифференцируемых до порядка k функций с компактным носителем в $\mathscr{D}$.

Определение 1 [5,8]. Непрерывное отображение $f = (f_1,\dots,f_n) : \mathscr{D} \to \mathbb{R}^n$ называется *квазирегулярным*, если выполнены следующие условия:

(a) $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{D},\mathbb{R}^n)$,

(b) якобиан $J(f,\cdot)$ сохраняет знак в $\mathscr{D}$, т. е. либо $J(f,\cdot) \geq 0$, либо $J(f,\cdot) \leq 0$ почти всюду в $\mathscr{D}$,

(c) существует константа $K \geq 1$ такая, что $\|f'(x)\| \leq K|J(f,x)|$ для почти всех $x \in \mathscr{D}$.

Замечание 2. Всякое непостоянное квазирегулярное отображение открыто, дискретно, почти всюду дифференцируемо и удовлетворяет условию Лузина (N), см. [5,8].

Обобщение условия типа Морера включает в себя вычисление поверхностных интегралов по границам «пробных множеств». Таким образом, мы должны придать смысл поверхностному интегрированию для пробных множеств. Поверхностный интеграл может вычисляться в терминах дифференциальных форм, как в [9,10], или, что равносильно, с помощью внешней нормали, а именно

$$\int_{\partial G} (-1)^{j+1} g(x)\,dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\partial G} g(x)\nu_j(x,G)\,dS(x),$$

где $\nu(x,G) = (\nu_1(x,G),\dots,\nu_n(x,G))$ — единичная внешняя нормаль и dS — поверхностная мера. Для осмысления этих понятий в нашем обобщении последний подход, возможно, удобнее. Существенным требованием является справедливость в какой-либо форме дивергентной теоремы (Гаусса — Грина — Остроградского). Читатель, интересующийся только специальными семействами пробных множеств, может пропустить следующее определение и использовать дивергентную теорему в удобной для него форме. Например, в качестве пробных могут быть взяты липшицевы или кусочно-гладкие области.

Для поверхностного интегрирования будем использовать $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа.

Определение 3. Борелевское множество G называется *множеством с конечным периметром*, если обобщенная производная его характеристической функции χ_G является знакопеременной мерой Радона, т. е. линейным непрерывным функционалом на банаховом пространстве $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ всех непрерывных векторнозначных функций на $\mathbb{R}^n$, обращающихся в нуль на бесконечности. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \partial B(0,1)$. Будем говорить, что ν — *внешняя нормаль в смысле меры* к G в точке x, если

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}|B(x,r) \cap \{y : (y-x)\cdot\nu > 0,\ y \in G\}| = 0$$

и

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}|B(x,r)\cap\{y:(y-x)\cdot\nu<0,\ y\notin G\}|=0.$$

Будем считать $\nu(x,G)$ (внешней) нормалью в смысле меры к G в точке x и полагать $\nu(x,G)=0$ во всех точках x, в которых нормаль в смысле меры не существует.

Напомним следующую версию дивергентной теоремы, которая в такой общности изложена Де Джорджи [11] и Федерером [12] (введение в предмет см., например, в [13]). Обе формулировки хорошо известны. Для удобства читателя мы сообщим вкратце, как выводить их из легко доступных версий.

Предложение 4. *Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$ — множество с конечным периметром, g — функция и $j\in\{1,\dots,n\}$. Предположим, что либо*

(a) $g\in\mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$,

либо

(b) $G\Subset\mathscr{D}$, $g\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{D})$ *и g непрерывно.*

Тогда

$$\int\limits_{\partial G} g(x)\cdot\nu_j(x,G)\,dH^{n-1}(x)=\int\limits_G \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. П. (a) см. в [13, теорема 5.8.2]. Формула (1) получается применением дивергентной теоремы

$$\int\limits_{\partial G} f(x)\cdot\nu(x,G)\,dH^{n-1}(x)=\int\limits_G \operatorname{div} f\,dx$$

к $f=ge_j$, где e_j — j-й вектор канонического базиса в $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства (b) можно считать, что $f\in W^{1,1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Действительно, если это не так, то рассмотрим гладкую функцию η с компактным носителем в $\mathscr{D}$ такую, что $\eta=1$ на $\overline{G}$, заменим f на $f\eta$ и распространим ее нулем на $\mathbb{R}^n$. Сглаживая, получим последовательность $\{f_m\}$ такую, что $f_m\in\mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, и имеет место сходимость $f_m\to f$ равномерно и в $W^{1,1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Согласно (a) формула (1) выполняется для функций f_m. Переходя к пределу, используем равномерную сходимость в левой части (1) и L^1-сходимость градиентов в правой части. Тогда (1) будет выполнено для предельной функции f.

В дальнейшем мы будем рассматривать семейство $\mathscr{G}$ множеств, которое будет играть роль «базиса дифференцирования». Перечислим некоторые важные для нас свойства $\mathscr{G}$:

(G1) если $G\in\mathscr{G}$ и $x\in\mathbb{R}^n$, то $x+G\in\mathscr{G}$ ($\mathscr{G}$ «инвариантно относительно сдвигов»);

(G2) каждое $G\in\mathscr{G}$ имеет конечный периметр;

(G3) $|G|>0$ для любого $G\in\mathscr{G}$;

(G4) $\inf\{\operatorname{diam}G: G\in\mathscr{G}\}=0$;

(G5) $\inf\colon\left\{\frac{|G|}{(\operatorname{diam}G)^n}: G\in\mathscr{G}\right\}>0$ («регулярность» базиса дифференцирования).

Например, в качестве $\mathscr{G}$ можно взять семейство $\{x+G_m: x\in\mathbb{R}^n,\ m=1,2,\dots\}$, где $\{G_m\}$ — последовательность шаров (или кубов) со стремящимися к нулю диаметрами.

Лемма 5. *Пусть $u\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ и G — множество с конечным периметром. Тогда функция*

$$x\mapsto\int\limits_G u(x+y)\,dy$$

непрерывно дифференцируема и

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_G u(x+y)\,dy=\int\limits_{\partial G} u(x+y)\,\nu_j(y,G)\,dH^{n-1}(y).$$

Доказательство. Поскольку $\mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$, существует последовательность $\{u_m\}$ гладких функций $u_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ с компактным носителем такая, что $u_m\to u$ равномерно. Используя дифференцирование под знаком интеграла и предложение 4, для любого $j=1,\dots,n$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_G u_m(x+y)\,dy=\int\limits_G \frac{\partial u_m}{\partial x_j}(x+y)\,dy=\int\limits_{\partial G} u_m(x+y)\nu_j(y,G)\,dH^{n-1}(y). \quad (2)$$

Очевидно, можно перейти к пределу в правой части равенства (2) равномерно по x. Это показывает, что производные в левой части сходятся равномерно и тем самым предельный переход возможен. Отсюда вытекает требуемый результат.

Следующее утверждение составляет первую часть основного результата, в которой дается условие типа Морера принадлежности функции соболевскому классу. Отметим, что свойство (G5) пока не используется.

Теорема 6. *Предположим, что $h:\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ непрерывно. Пусть $\mathscr{G}$ — семейство борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$ удовлетворяющее* (G1)–(G4). *Предположим, что существуют число $p>1$ и локально конечная борелевская мера μ на $\mathscr{D}$ такие, что*

$$\sup_{j=1,\dots,n}\left|\int\limits_{\partial G} h(y)\,\nu_j(y,G)\,dH^{n-1}(y)\right|\le\mu(G)^{1/p}\,|G|^{1-1/p} \quad (3)$$

для любого $G\in\mathscr{G}$ с $\overline{G}\subset\mathscr{D}$. Тогда $h\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{D})$.

Доказательство. Зафиксируем открытое множество $\Omega\Subset\mathscr{D}$. Имеем

$$\rho:=\operatorname{dist}(\Omega,\partial\mathscr{D})>0.$$

Положим $\Omega'=\Omega+B(0,\rho/2)$ и заметим, что $\Omega'\Subset\mathscr{D}$. Пусть $\eta\in\mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$ — срезающая функция с носителем в $\mathscr{D}$ такая, что $\eta=1$ на Ω'. Пусть

$$g=\begin{cases} h\eta & \text{на } \mathscr{D},\\ 0 & \text{вне } \mathscr{D}.\end{cases}$$

Тогда $g\in\mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^n)$ и $g=h$ на Ω'. Используя (G1), (G3) и (G4), найдем последовательность $\{X_m\}$ множеств из $\mathscr{G}$ такую, что

$$X_m\subset B(0,2^{-m}\rho),\quad |X_m|>0,$$

и определим последовательность функций $g_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$$g_m(x)=\fint\limits_{x+X_m} g(y)\,dy\quad\Bigl(=\fint\limits_{X_m} g(x+y)\,dy\Bigr).$$

Согласно (G2) и лемме 5 функции g_m $\mathscr{C}^1$-гладкие на $\mathbb{R}^n$ и

$$\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x)=|X_m|^{-1}\int\limits_{\partial X_m} g(x+y)\,\nu_j(y,X_m)\,dH^{n-1}(y) \quad (4)$$

для каждого $x \in \Omega$ и $j = 1, \dots, n$. Покажем, что последовательность $\left\{\frac{\partial g_m}{\partial x_j}\right\}_m$ ограничена в $L^p(\Omega)$. Так как ввиду (G1) $\mathscr{G}$ инвариантно относительно сдвигов, имеем $x + X_m \in \mathscr{G}$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, $h = g$ на замыкании $x + X_m$. Согласно (3)

$$\left|\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x)\right| = \left||X_m|^{-1} \int\limits_{\partial X_m} g(x+y)\nu_j(y, X_m)\, dH^{n-1}(y)\right| \le |X_m|^{-1/p}\mu(x + X_m)^{1/p}. \tag{5}$$

Возводя (5) в степень p и интегрируя по Ω, получим

$$\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x)\right|^p dx \le |X_m|^{-1} \int\limits_\Omega \mu(x + X_m)\, dx \le |X_m|^{-1} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_{\mathscr{D}} \chi_{x+X_m}(y)\, d\mu(y)\right) dx. \tag{6}$$

Изменим порядок интегрирования в (6). Легко проверить, что функция

$$\Omega \times \mathscr{D} \ni (x, y) \mapsto \chi_{x+X_m}(y)$$

есть не что иное, как характеристическая функция множества

$$\{(x, y) \in \Omega \times \mathscr{D} : y - x \in X_m\},$$

которое является борелевским, потому что X_m борелевское. В частности, эта функция измерима относительно произведения мер $dx \otimes d\mu(y)$ (произведение лебеговской меры и меры μ). Следовательно, мы можем применить теорему Фубини к последнему интегралу в (6):

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x)\right|^p dx \le |X_m|^{-1} \int\limits_{\Omega\times\mathscr{D}} \chi_{x+X_m}(y)\, dx \otimes d\mu(y) \\
&= |X_m|^{-1} \int\limits_{\mathscr{D}} \left(\int\limits_\Omega \chi_{x+X_m}(y)\, dx\right) d\mu(y) = |X_m|^{-1} \int\limits_{\mathscr{D}} \left(\int\limits_\Omega \chi_{y-X_m}(x)\, dx\right) d\mu(y).
\end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что для каждого $y \in \Omega'$

$$\int\limits_\Omega \chi_{y-X_m}(x)\, dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{y-X_m}(x)\, dx = |X_m|.$$

С другой стороны, для любого $y \notin \Omega'$ будет $(y - X_m) \cap \Omega = \varnothing$ и тем самым

$$\int\limits_\Omega \chi_{y-X_m}(x)\, dx = 0.$$

Комбинируя последние два замечания, из (7) получаем

$$\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x)\right|^p dx \le \int\limits_{\Omega'} d\mu(y) = \mu(\Omega') < \infty, \tag{8}$$

так как $\Omega' \Subset \mathscr{D}$ и μ конечна на компактных подмножествах $\mathscr{D}$. Итак, мы находимся в следующей ситуации: для фиксированного $\Omega \Subset \mathscr{D}$ существует последовательность $\{g_m\}$ $\mathscr{C}^1$-функций на $\mathbb{R}^n$ такая, что $g_m \to h$ равномерно на Ω (поскольку g непрерывна, $x + X_m \subset B(x, 2^{-m}\rho)$ и $g = h$ на Ω'), и $\{g_m|\Omega\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$. Используя рефлексивность $W^{1,p}(\Omega)$, легко выводим, что $g_m \rightharpoonup h$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$, в частности, $h|\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$. Но так как $\Omega \Subset \mathscr{D}$ выбрано произвольно, заключаем, что $h \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{D})$. Теорема 6 доказана.

Замечание 7. В [10] доказан аналогичный результат (теорема 1), где X_m суть кубы и вместо борелевской меры μ рассматривается супераддитивная функция Φ интервала, т. е. функция, заданная на интервалах и такая, что для любой системы $\{\sigma_i\}$, $1 \le i \le k$, интервалов $\mathscr{D}$ без общих внутренних точек справедливо неравенство

$$\Phi(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_k) \ge \Phi(\sigma_1) + \dots + \Phi(\sigma_k).$$

Таким образом, теорема 1 в [10] не зависит от теоремы 6 в настоящей работе.

Подготовим вторую часть основного результата, в которой критерий квазирегулярности типа Морера обобщается аналогично результатам из [9, 10] в направлении широких возможностей изменения «базы дифференцирования».

В дальнейшем будем рассматривать непрерывное открытое дискретное отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathscr{D} \to \mathbb{R}^n$. Для $E \subset \mathscr{D}$ символом $N(f|E, \cdot)$ обозначим функцию кратности f на E. Для $y \in \mathbb{R}^n$ через $N(f|E, y)$ обозначается мощность множества $\{x \in E : f(x) = y\}$. Положим $\|N(f|E)\| = \sup\{N(f|E, y) : y \in \mathbb{R}^n\}$.

Наш результат использует тот факт, что непрерывные открытые дискретные отображения либо сохраняют ориентацию, либо меняют ее. Это, по существу, доказано в [14, 15].

Известно, что если f непрерывно и E — борелевское подмножество $\mathscr{D}$, то функция $N(f|E, \cdot)$ измерима по Лебегу [16, IV.1.2]. Кроме того, если f непрерывно, открыто и дискретно, то $\|N(f|E)\| < \infty$ для любого $E \Subset \mathscr{D}$, см. [2; 8, предложение 4.10; 5, лемма II.8.1] или краткий комментарий в [9, лемма 2].

Заметим, что формула замены переменной

$$\int_E |J(f, x)|\, dx = \int_{f(E)} N(f|E, y)\, dy \tag{9}$$

выполняется для $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{D}; \mathbb{R}^n)$, f удовлетворяет условию Лузина (N) и $E \Subset \mathscr{D}$, см. [15, V.3.3, лемма 3].

Теорема 8. *Пусть $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретной отображение и $\mathscr{G}$ — семейство борелевских множеств, удовлетворяющее всем свойствам* (G1)–(G5). *Тогда f квазирегулярно в том и только в том случае, когда существует константа $M > 0$ такая, что неравенство*

$$\left| \int_{\partial G} f_i(y) \nu_j(y, G)\, dH^{n-1}(y) \right| \le M(\|N(f|G)\| |f(G)| |G|^{n-1})^{1/n} \tag{10}$$

выполняется для любых $i, j = 1, \dots, n$ и $G \in \mathscr{G}$ с $G \Subset \mathscr{D}$.

Доказательство. Необходимость условия (10) доказывается точно так же, как соответствующая часть в теореме 2 из [9]. А именно, используя п. (b) предложения 4 и (9), имеем

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial G} f_i(y) \nu_j(y, G)\, dH^{n-1}(y) \right| &= \left| \int_G \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, dx \right| \le \int_G \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| dx \\
&\le |G|^{1-1/n} \left(\int_G \|f'(x)\|^n\, dx \right)^{1/n} \le |G|^{1-1/n} \left(K \int_G |J(f, x)|\, dx \right)^{1/n} \\
&\le |G|^{1-1/n} \Big(K\, \|N(f|G)\|\, |f(G)| \Big)^{1/n}
\end{aligned}$$

для любого $G \in \mathscr{G}$.

Для доказательства достаточности (10) сначала фиксируем открытое множество $\Omega \Subset \mathscr{D}$. Затем определим борелевскую меру μ на Ω, для каждого борелевского множества $E \subset \Omega$ полагая

$$\mu(E) = M^n \|N(f|\Omega)\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} N(f|E, y)\, dy.$$

Из свойств функции кратности непрерывного открытого дискретного отображения легко следует, что μ конечна на Ω. Так как, очевидно,

$$|f(G)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} N(f|G, y)\, dy \tag{11}$$

для любого $G \in \mathscr{G}$, из (10) нетрудно получить, что неравенство

$$\left| \int\limits_{\partial G} f_i(y)\, \nu_j(y, G)\, dH^{n-1}(y) \right| \leq \mu(G)^{1/n} |G|^{1-1/n}$$

выполнено для всех $i, j = 1, \dots, n$ и $G \in \mathscr{G}$ с $G \Subset \mathscr{D}$. Тогда по теореме 6 имеем, что $f|\Omega \in W^{1,n}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и, следовательно, $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{D}; \mathbb{R}^n)$.

Теперь мы можем показать, что f квазирегулярно. Основная идея доказательства аналогична таковой из [9], но так как интервалы заменяются более общими множествами из $\mathscr{G}$, мы не можем использовать непосредственно соотношение (29) из [9]. Вместо него используем [17, теорема A] для проверки непрерывности отображения $f|\Omega \in W^{1,n}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, которое, будучи открытым, удовлетворяет условию Лузина (N). Это позволит нам применить (9).

Вновь фиксируем открытое множество $\Omega \Subset \mathscr{D}$. Используя предложение 4 и соотношения (9), (11), из (10) легко выводим, что

$$\left| \fint\limits_G \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\, dy \right| \leq M \|N(f|\Omega)\|^{1/n} \left(\fint\limits_G |J(f, y)|\, dy \right)^{1/n} \tag{12}$$

для любого $g \in \mathscr{G}$ с $G \subset \Omega \Subset \mathscr{D}$.

Фиксируем $x \in \Omega$. На основе свойств (G1)–(G5) найдем последовательность $\{G_m\}$ множеств из $\mathscr{G}$ и последовательность шаров $\{B(x, r_m)\}$ с $r_m \to 0$ такие, что

$$G_m \subset B(x, r_m) \Subset \Omega, \quad \inf_m \frac{|G_m|}{|B(x, r_m)|} > 0.$$

Тогда

$$\fint\limits_{G_m} |J(f, y)|\, dy \to |J(f, x)|, \tag{13}$$

как только x является лебеговой точкой для $J(f, \cdot)$ и

$$\fint\limits_{G_m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\, dy \to \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \tag{14}$$

при условии, что x — лебегова точка для f'. Считая, что (13) и (14) выполнены в точке x, применяя (12) к последовательности G_m и переходя к пределу, получим

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M \|N(f|\Omega)\|^{1/n} |J(f, x)|^{1/m}. \tag{15}$$

По теореме Лебега о дифференцировании (см., например, [18, теорема 8.8]) исключительное множество, на котором (13) или (14) не выполняется, имеет нулевую лебегову меру. Значит, (15) выполняется почти всюду в Ω. Коли это неравенство установлено (ср. (31) в [9]), оставшаяся часть доказательства теоремы 2 из [9] может быть применена без изменений, откуда вытекает квазирегулярность f. Вторая часть основного результата доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8. С. 629–659.

2. *Martio, O., Rickman, S and Väisälä, J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1969. V. 448. P. 1–40.

3. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; 229).

4. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1988. (Lecture Notes in Math.; 1319).

5. *Reshetnyak Yu. G.* Space mappings with bounded distortion. Providence: Amer. Math. Soc., 1989. (Transl. Math. Monographs).

6. *Gol'dshtein V. M., Reshetnyak Yu. G.* Quasiconformal mappings and Sobolev spaces. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1990.

7. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford: Clarendon Press, 1993.

8. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete).

9. *Пономарев С. П.* Интегральный критерий квазирегулярности // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 173–181.

10. *Ponomarev, S. P.* On some characterization of quasiregularity // Acta Univ. Carolinae. Math. Phys. 1997. V. 38, N 2. P. 13–18.

11. *De Giorgi E.* Nuovi teoremi relative alle misure $r-1$-dimensionale in spazio ad r dimensioni // Ric. Mat. 1955. V. 4. P. 95–113.

12. *Federer H.* Geometric measure theory. Berlin: Springer-Verl., 1969. (Second edition 1996).

13. *Ziemer W. P.* Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and function of bounded variation. Berlin: Springer-Verl., 1989. (Graduate Text in Math.; 120).

14. *Чернавский А. В.* Конечнократные открытые отображения многообразий // Мат. сб. 1964. Т. 65. С. 357–369.

15. *Чернавский А. В.* Письмо в редакцию. Дополнение к статье «О конечнократных открытых отображениях многообразий» // Мат. сб. 1965. Т. 66. С. 471–472.

16. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis. Berlin: Springer-Verl., 1955.

17. *Malý J., Martio O.* Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 458. P. 19–36.

18. *Rudin W.* Real and complex analysis. New York; London: McGraw-Hill Book Comp., 1966.

Статья поступила 24 января 2000 г.

Department of Mathematical Analysis, Charles University
Sokolovská 83, 18600 Praha, Czech Republic
maly@karlin.mff.cuni.cz

Department of Mathematics, Pedagogical Academy,
Arciszewskiego 22 b, 76-200 Słupsk, Poland
stapon@admin.wsp.slupsk.pl