*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6*

*УДК 512.5*

# ТЕСТОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ТЕСТОВЫЙ РАНГ СВОБОДНОЙ МЕТАБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

**Е. И. Тимошенко**

**Аннотация:** Определяется тестовый ранг свободной метабелевой группы. Приводятся необходимые и достаточные условия для наборов элементов свободной метабелевой группы, чтобы они были тестовыми. Библиогр. 10.

Элемент $g$ группы $G$ называется *тестовым*, если любой эндоморфизм $\varphi$ группы $G$, оставляющий элемент $g$ на месте, является автоморфизмом, т. е. из условия $\varphi(g) = g$ следует, что $\varphi$ — автоморфизм.

Определение. Пусть $G$ — $r$-порожденная группа. Набор элементов $g_1, \dots, g_n$, $n \leq r$, называется *тестовым*, если для всякого эндоморфизма $\phi$ группы $G$ из условий $\phi(g_i) = g_i$ при $i = 1, \dots, n$ вытекает, что $\phi$ — автоморфизм.

Определение. *Тестовым рангом* группы $G$ называется наименьшая длина тестового набора.

Нильсен [1] в 1918 г. доказал, что любой эндоморфизм свободной группы ранга два, который переводит коммутатор свободных порождающих в сопряженный к нему или к его обратному, является автоморфизмом. Из работы А. И. Мальцева [2] также следует, что коммутатор $[x_1, x_2]$ представляет собой тестовый элемент в свободной группе ранга два с базисом $x_1, x_2$. Тестовые элементы для свободных групп произвольного конечного ранга описаны Тернером в [3]. Из [4] вытекает, что коммутатор $[a, b]$ является тестовым элементом в свободной метабелевой группе ранга два с базисом $a, b$.

Мы получим описание тестовых наборов для свободной метабелевой группы.

В списке открытых проблем в Internet на сайте проблемы Магнуса (см. www.grouptheory.org) сформулирован вопрос FP15 Б. Файна: *Может ли тестовый ранг быть равным* 2, *если* $r > 2$? Мы покажем, что положительный ответ на этот вопрос дает свободная метабелева группа ранга 3.

**Теорема.** *Пусть $S_r$ — свободная метабелева группа ранга $r \geq 2$. Тогда*

1) *при $r = 2$ все неединичные элементы из коммутанта $S_2'$, и только они, являются тестовыми;*

2) *тестовый ранг группы $S_r$ равен $r - 1$;*

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00567), а также научной программы Министерства образования Российской федерации «Фундаментальные исследования высшей школы. Университеты России».

3) *при* $r \geq 2$ *элементы* $g_1, \ldots, g_{r-1}$ *образуют тестовый набор тогда и только тогда, когда они лежат в коммутанте, независимы над кольцом* $\mathbf{Z}(S_r/S_r')$ *и любой эндоморфизм* $\varphi$*, действующий тождественно на этих элементах, индуцирует автоморфизм* $\overline{\varphi}$ *группы* $S_r/S_r'$.

Доказательство. Обозначим через $x_1, \ldots, x_r$ базис группы $S_r$.

Пусть $\overline{S}_r = S_r/S_r', c \in S_r', \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — элементы из кольца $\mathbf{Z}\overline{S}_r$. Образ элемента из $S_r$ при естественном гомоморфизме на группу $\overline{S}_r$ будем обозначать чертой. Эндоморфизм $\varphi = \{x_1 \to c^{\lambda_1}x_1, \ldots, x_r \to c^{\lambda_r}x_r\}$ группы $S_r$ назовем *стандартным, соответствующим элементам* $\lambda_i$ *и* $c$.

Напомним некоторые результаты из [5].

Элемент $g \in S_r$ остается неподвижным под действием $\varphi$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda_1 \partial_1 g + \cdots + \lambda_r \partial_r g = 0, \tag{1}$$

где $\partial_i g$ — значение левой производной Фокса в кольце $\mathbf{Z}\overline{S}_r$. Определение и свойства производных Фокса даны, например, в [6].

Отображение $\varphi$ автоморфизм тогда и только тогда, когда

$$\lambda_1 \partial_1 c + \cdots + \lambda_r \partial_r c = 0. \tag{2}$$

1. Рассмотрим случай $r = 2$. Проверим, что все неединичные элементы из коммутанта $S_2'$ тестовые. Любой элемент $g$ из коммутанта можно записать в виде $g = [x_1, x_2]^{\alpha(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}$, где $\alpha(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbf{Z}\overline{S}_2$. Пусть $\psi = \{x_1 \to y_1, x_2 \to y_2\}$ — некоторый эндоморфизм группы $S_2$. Обозначим $\det(\psi) = \det(\partial_i y_j)$. Используя лемму 4 из [6], получим

$$\psi(g) = \psi([x_1, x_2]^{\alpha(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}) = [x_1, x_2]^{\det \psi \cdot \alpha(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}. \tag{3}$$

Если элемент $g$ неподвижен под действием $\psi$, то

$$\det \psi \cdot \alpha(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \alpha(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \tag{4}$$

Можно считать, что элементы $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ независимы в группе $\overline{S}_2$. В противном случае легко доказать, используя, например, тот факт, что пересечение степеней фундаментального идеала кольца $\mathbf{Z}\overline{S}_2$ нулевое, что элемент $g \neq 1$ не может оставаться неподвижным при действии эндоморфизма $\psi$. По лемме 3 из [7] равенство (4) возможно лишь при условии, что $\det \psi$ — обратимый элемент кольца $\mathbf{Z}\overline{S}_2$. Это означает (см., например, [8]), что $\psi$ — автоморфизм.

Пусть $g \notin S_2'$. Рассмотрим эндоморфизм

$$\chi = \{x_1 \to [x_1, x_2]^{\lambda_1} x_1, x_2 \to [x_1, x_2]^{\lambda_2} x_2\}.$$

Положим $\lambda_1 = -\partial_2 g, \lambda_2 = \partial_1 g$. Тогда условие (1) выполнено, т. е. элемент $g$ неподвижен под действием $\psi$. Но

$$-\partial_2 g(1 - \bar{x}_2) + \partial_1 g(\bar{x}_1 - 1) = \bar{g} - 1.$$

Так как $g \notin S_2'$, условие (2) нарушено.

2. Пусть теперь $r \geq 3$ и $g_1, \ldots, g_{r-2}$ — тестовый набор элементов.

Стандартный эндоморфизм $\varphi$ оставляет этот набор элементов на месте тогда и только тогда, когда

$$\lambda_1 \partial_1 g_j + \cdots + \lambda_r \partial_r g_j = 0 \tag{5}$$

при $j = 1, \dots, r-2$. Система уравнений (5) имеет как минимум два линейно независимых решения над кольцом $\mathbf{Z}\overline{S}_r$.

С другой стороны, для любого из этих решений и для любого $c \in S'_r$ должно выполняться условие (2). Пусть $c$ пробегает множество коммутаторов $c_j = [x_1, x_j]$, $j = 2, \dots, r$. Векторы $(\partial_1 c_j, \dots, \partial_r c_j)$ независимы над $\mathbf{Z}\overline{S}_r$ при $j = 2, \dots, r$. Поэтому одно из решений (5) не удовлетворяет уравнению (2). Значит, соответствующий стандартный эндоморфизм оставляет набор $g_1, \dots, g_{r-2}$ на месте, но не является автоморфизмом.

Покажем теперь, что набор элементов $c_2, \dots, c_r$ тестовый. Рассмотрим эндоморфизм, переводящий элементы $x_1, \dots, x_r$ соответственно в элементы $y_1, \dots, y_r$, и пусть $[x_1, x_j] = [y_1, y_j]$ при $j = 2, \dots, r$. Вычисляя производные Фокса в кольце $\mathbf{Z}\overline{S}_r$, получим

$$\begin{gathered}\partial_1 y_1(\bar{y}_i - 1) + \partial_1 y_i(\bar{y}_1 - 1) = 1 - \bar{x}_i, \quad \partial_i y_1(\bar{y}_i - 1) + \partial_i y_i(\bar{y}_1 - 1) = \bar{x}_1 - 1, \\ \partial_j y_1(\bar{y}_i - 1) + \partial_j y_i(\bar{y}_1 - 1) = 0\end{gathered} \tag{6}$$

при $i = 2, \dots, r$; $j \neq 1, i$. Используя (6), вычислим определитель $D$ матрицы $(\partial_i g_j)$:

$$D(\bar{y}_1 - 1)^{r-1} = (\bar{x}_1 - 1)^{r-2} \sum_{j=1}^{r} \partial_j y_1(\bar{x}_j - 1) = (\bar{x}_1 - 1)^{r-2}(\bar{y}_1 - 1).$$

Следовательно, $D(\bar{y}_1 - 1)^{r-2} = (\bar{x}_1 - 1)^{r-2}$. Так как $\bar{x}_1 - 1$ — неразложимый элемент кольца $\mathbf{Z}\overline{S}_r$, то $D$ — единица этого кольца. Значит, $y_1, \dots, y_r$ — базис группы $S_r$.

3. Докажем, что все элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ тестового набора обязаны лежать в коммутанте $S'_r$.

Предположим, что $g_1$ не лежит в $S'_r$. Можно считать, что $g_1 = dx_1^t$ для некоторого $t \neq 0, d \in S'_r$. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \partial_j g_i = 0, \tag{7}$$

где $i = 1, \dots, r-1$. Предположим, что система имеет решение, для которого $\lambda_1$ не равно 0. Рассмотрим стандартный эндоморфизм $\varphi$, соответствующий этому решению и элементу $d$. Эндоморфизм $\varphi$ оставляет элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ на месте. Поэтому должно выполняться условие

$$\lambda_1 \partial_1 d + \dots + \lambda_r \partial_r d = 0.$$

Но из (7) получаем

$$\lambda_1 \bigl(\partial_1 d + \bigl(x_1^t - 1\bigr)/(x_1 - 1)\bigr) + \lambda_2 \partial_2 d + \dots + \lambda_r \partial_r d = 0.$$

Значит, $\lambda_1 \bigl(x_1^t - 1\bigr)/(x_1 - 1) = 0$. Это невозможно.

Предположим теперь, что $0, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ — некоторое ненулевое решение системы (7). Для $c_j = [x_1, x_j]$, $j = 2, \dots, r$, должны выполняться условия

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \partial_i c_j = 0.$$

Получаем отсюда, что $\lambda_i = 0$ для любого $i = 1, \dots, r$.

Покажем, что элементы тестового набора $g_1, \dots, g_{r-1}$ независимы над $\mathbf{Z}\overline{S}_r$. Пусть, например, $g_1^{\alpha_1} = g_2^{\alpha_2} \dots g_{r-1}^{\alpha_{r-1}}$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1} \in \mathbf{Z}\overline{S}_r$, причем $\alpha_1 \neq 0$. Как было показано, для набора $g_2, \dots, g_r$ существует стандартный эндоморфизм, оставляющий эти элементы на месте и не являющийся автоморфизмом. Тогда

$$\varphi\big(g_1^{\alpha_1}\big) = \varphi\big(g_2^{\alpha_2} \dots g_{r-1}^{\alpha_{r-1}}\big) = g_2^{\alpha_2} \dots g_{r-1}^{\alpha_{r-1}} = g_1^{\alpha_1}.$$

С другой стороны, $\varphi\big(g_1^{\alpha_1}\big) = (\varphi(g_1))^{\alpha_1}$. Поэтому $\varphi(g_1) = g_1$. Таким образом, эндоморфизм $\varphi$ оставляет все элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ на месте, но не является автоморфизмом.

Предположим теперь, что условия третьего пункта теоремы выполнены.

Каждый элемент $c$ из коммутанта $S_r'$ можно записать в виде

$$c = \prod_{1 \leq i < j \leq r} [x_i, x_j]^{\gamma_{ij}},$$

где $\gamma_{ij} \in \mathbf{Z}\overline{S}_r$. Но

$$[x_1, x_i]^{1-x_j} [x_1, x_j]^{x_i - 1} [x_i, x_j]^{1-x_1} = 1.$$

Поэтому каждый элемент $g_l$, $l = 1, \dots, r-1$, имеет вид

$$g_l = \prod_{j=2}^{r} [x_1, x_j]^{\alpha_{lj}},$$

где $\alpha_{lj} = \beta_{lj}/(x_1 - 1), \beta_{lj} \in \mathbf{Z}\overline{S}_r$.

Элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ независимы над кольцом $\mathbf{Z}\overline{S}_r$ тогда и только тогда, когда матрица $A(x) = (\alpha_{lj})_{(r-1, r-1)}$, где $j = 2, \dots, r$; $l = 1, \dots, r-1$, имеет обратную над полем частных $P$ кольца $\mathbf{Z}\overline{S}_r$. Действительно, элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ независимы над $\mathbf{Z}\overline{S}_r$ тогда и только тогда, когда элементы $g_1^{1-\bar{x}_1}, \dots, g_{r-1}^{1-\bar{x}_1}$ независимы над тем же кольцом. Так как элементы $g_l^{1-\bar{x}_1}$ можно выразить через коммутаторы $[x_1, x_2], [x_1, x_3], \dots, [x_1, x_r]$, причем

$$g_l^{1-\bar{x}_1} = [x_1, x_2]^{\alpha_{l2}(1-\bar{x}_1)} \dots [x_1, x_r]^{\alpha_{lr}(1-\bar{x}_1)},$$

то строки матрицы $A(x)$ независимы.

Пусть

$$\varphi = \{x_i \to y_i; i = 1, \dots, r\}.$$

Обозначим

$$z_j^{(l)} = \partial_j y_1 (1 - \bar{y}_l) + \partial_j y_l (\bar{y}_1 - 1).$$

Пусть $A(y)$ — образ матрицы $A(x)$ при гомоморфизме $\varphi$. Заметим, что матрица $A(y)$ имеет обратную над полем $P$.

По условию $g_l(y_1, \dots, y_r) = g_l$. Вычислим значения производных Фокса от левых и правых частей этих равенств. Эти значения лежат в поле $P$.

Получим следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ \vdots \\ z_r^{(1)} \end{pmatrix} = A(y)^{-1} A(x) \begin{pmatrix} 1 - \bar{x}_2 \\ 1 - \bar{x}_3 \\ \vdots \\ 1 - \bar{x}_r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_2^{(2)} \\ \vdots \\ z_r^{(2)} \end{pmatrix} = A(y)^{-1} A(x) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\begin{pmatrix} z_2^{(r)} \\ \vdots \\ z_r^{(r)} \end{pmatrix} = A(y)^{-1}A(x)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{x}_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Используя эти соотношения, вычислим определитель $D$ матрицы $(\partial_i y_j)_{(r,r)}$. Пусть $A(y)^{-1}A(x) = (\beta_{lj})_{(r-1,r-1)}$.

Имеем

$$D(\bar{y}_1-1)^{r-1} = \begin{vmatrix} \partial_1 y_1 & \partial_1 y_2(\bar{y}_1 - 1) & \dots & \partial_1 y_r(\bar{y}_1 - 1) \\ \partial_2 y_1 & \partial_2 y_2(\bar{y}_1 - 1) & \dots & \partial_2 y_r(\bar{y}_1 - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_r y_1 & \partial_r y_2(\bar{y}_1 - 1) & \dots & \partial_r y_r(\bar{y}_1 - 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_1 y_1 & z_2^{(1)} & \dots & z_r^{(1)} \\ \partial_2 y_1 & z_2^{(2)} & \dots & z_r^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_r y_1 & z_2^{(r)} & \dots & z_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \partial_1 y_1 & \beta_{12}(1-\bar{x}_2)+\dots+\beta_{1r}(1-\bar{x}_r) & \dots & \beta_{r-1,2}(1-\bar{x}_2)+\dots+\beta_{r-1,r}(1-\bar{x}_r) \\ \partial_2 y_1 & \beta_{12}(\bar{x}_1 - 1) & \dots & \beta_{r-1,r}(\bar{x}_1 - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_r y_1 & \beta_{1,r}(\bar{x}_1 - 1) & \dots & \beta_{r-1.r}(\bar{x}_1 - 1) \end{vmatrix}$$

$$= (\bar{x}_1 - 1)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{y}_1 - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & A(y)^{-1} \cdot A(x) & \cdot(\bar{x}_1 - 1) & \\ * & \dots & \dots & \dots\dots & \end{vmatrix}$$
$$= (\bar{y}_1 - 1)(\bar{x}_1 - 1)^{r-2}\det(A(y)^{-1}A(x)).$$

Отсюда

$$D \cdot \det A(y) \cdot (\bar{y}_1 - 1)^{r-1} = \det A(x) \cdot (\bar{x}_1 - 1)^{r-2}(\bar{y}_1 - 1).$$

Заметим, что $A(x) = F(x)/(\bar{x}_1 - 1)^{r-1}$, где $F(x) \in \mathbf{Z}\overline{S}_r$. Следовательно,

$$DF(y)(\bar{x}_1 - 1) = F(x)(\bar{y}_1 - 1).$$

Кольцо $\mathbf{Z}\overline{S}_r$ факториально. Разложим $F(x)$ на простые множители. Получим разложение $F(y)$. Элементы $\bar{x}_1 - 1$ и $\bar{y}_1 - 1$ неразложимы. Значит, $D$ — единица кольца $\mathbf{Z}\overline{S}_r$. Теорема доказана.

Определение. Эндоморфизм $\varphi$ группы $G$ называется *$IA$-эндоморфизмом*, если он тождествен на фактор-группе $G/G'$.

**Следствие 1.** *Набор элементов свободной метабелевой группы $S_r$ ранга $r > 1$ является тестовым минимальной длины для $IA$-эндоморфизмов тогда и только тогда, когда он состоит из $r - 1$ элементов, все элементы принадлежат коммутанту $S'_r$ и независимы над кольцом $\mathbf{Z}(S_r/S'_r)$.*

В [9] отмечено, что последний нееденичный коммутант свободной разрешимой группы естественно вложен в векторное пространство над телом частных группового кольца свободной разрешимой группы ступени на единицу меньше. Размерность пространства равна рангу свободной разрешимой группы минус единица. Базисы этого пространства, принадлежащие группе, и являются тестовыми наборами для $IA$-эндоморфизмов свободной метабелевой группы.

Заметим также, что из [10] следует, что в предположениях следствия 1 эндоморфизмы, оставляющие на месте тестовые наборы, являются на самом деле внутренними автоморфизмами.

**Следствие 2.** *Существует группа $G$, порожденная тремя элементами, для которой тестовый ранг равен 2.*

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Nielson J.* Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden // Math. Ann. 1918. V. 78. P. 269–272.
2. *Мальцев А. И.* Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, № 2. С. 45–50.
3. *Turner E.* Test words for automorphisms of free groups // Bull. London Math. Soc. 1996. V. 28. P. 255–263.
4. *Дурнев В. Г.* О свободных образующих свободной метабелевой группы ранга 2. Новосибирск, 1987. Деп. ВИНИТИ 04.06.87, № 4036-В87.
5. *Тимошенко Е. И.* Об определяемости эндоморфизмов свободной группы многообразия $\mathbf{AN}_c$ конечным множеством значений // Мат. заметки. 1997. Т. 61. С. 884–889.
6. *Ремесленников В. Н., Соколов В. Г.* Некоторые свойства вложения Магнуса // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 5. С. 566–578.
7. *Gupta C. K., Timoshenko E. I.* Automorphic and endomorphic reducibility and primitive endomorphisms of free metabelian groups // Comm. Algebra. 1997. V. 25. P. 3057–3070.
8. *Gupta C. K., Timoshenko E. I.* Primitivity in the free groups of variety $\mathbf{A}_m\mathbf{A}_n$ // Comm. Algebra. 1996. V. 24. P. 2859–2876.
9. *Романьков В. А.* Нормальные автоморфизмы дискретных групп // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 4. С. 138–149.
10. *Шмелькин А. Л.* Два замечания о свободных разрешимых группах // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 2. С. 95–109.


*Статья поступила 7 декабря 1999 г.,*
*Окончательный вариант — 29 февраля 2000 г.*

*г. Новосибирск*
etim@ngasu.nsk.su