Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.98

ОПИСАНИЕ ВСЕХ РЕГУЛЯРНЫХ КОНУСОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Т. Худалов

Аннотация: Доказано, что регулярные конусы в гильбертовом пространстве — это максимальные элементы в множестве 1-нормальных конусов, упорядоченном по включению. Дано двойственное описание: регулярные конусы являются минимальными элементами в классе замкнутых 1-несплющенных конусов. Библиогр. 5.

В статье [1] отмечено, что задача описания всех конусов, превращающих данное банахово пространство в банахову решетку, по-видимому, трудна. Поскольку конус в банаховой решетке — частный случай регулярного конуса, задача описания всех регулярных конусов в данном банаховом пространстве представляется не менее трудной.

Описание всех регулярных конусов специального вида получено в [2]. В работе [3] доказано, что H_+ — регулярный конус в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда он является самосопряженным. Данный результат уже дает описание класса регулярных конусов в гильбертовом пространстве H. В этой статье будет получено другое описание регулярных (а значит, и самосопряженных) конусов в H, которое позволит установить, что даже в трехмерном пространстве H класс регулярных конусов не исчерпывается решеточными конусами, изоморфными естественному конусу

$$K = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in H : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\},$$

и круглыми конусами

$$K\left(a, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left\{x \in H : (a, x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|\right\},$$

где $a \in H$, $\|a\| = 1$.

А именно, мы покажем, что регулярные (самосопряженные) конусы в H — это максимальные элементы в множестве 1-нормальных конусов, упорядоченном по включению. Двойственное описание: регулярные конусы являются минимальными элементами в классе замкнутых 1-несплющенных конусов.

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, H_+ — конус в H.

Определение 1. Конус H_+ в H называется
1) 1-*нормальным*, если $\pm x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|$;
2) 1-*несплющенным*, если $\forall x \in H\ \exists y \in H_+ : \pm x \leq y$, $\|x\| = \|y\|$.

Конус называется *регулярным*, если он одновременно 1-нормальный и 1-несплющенный.

Определение 2. Через H_+^* в сопряженном пространстве H^* обозначим конус

$$H_+^* = \{z \in H^* : (z, x) \geq 0 \ \forall x \in H_+\}.$$

Если $H_+ = H_+^*$ при естественном отождествлении H и H^*, то конус H_+ называется *самосопряженным.* Ясно, что всякий самосопряженный конус является замкнутым.

Утверждение 1. *Конус H_+ 1-нормален тогда и только тогда, когда $(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in H_+$.*

Доказательство. Пусть H_+ — 1-нормальный конус. Возьмем произвольные $x, y \in H_+$. Тогда

$$x - y \leq x + y; y - x \leq x + y \Longrightarrow \pm(x - y) \leq x + y$$
$$\Longrightarrow \|x - y\| \leq \|x + y\| \Longrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x + y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \Longrightarrow (x, y) \geq 0.$$

Обратно, пусть $(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in H_+$. Пусть $\pm u \leq v$. Тогда найдутся $x, y \in H_+$ такие, что $u = x - y$, $v = x + y$. Имеем

$$\|u\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 = \|v\|^2,$$

т. е. $\|u\| \leq \|v\|$. $\square$

Из утверждения 1 следует

Утверждение 2. *H_+ — 1-нормальный $\Longleftrightarrow H_+ \subset H_+^*$.*

Дадим теперь характеризацию 1-несплющенных конусов.

Утверждение 3. *Конус H_+ является 1-несплющенным в том и только в том случае, когда $\forall x \in H \ \exists u, v \in H_+$ такие, что $x = u - v$ и $u \perp v$.*

Доказательство. Действительно, если H_+ 1-несплющенный, то $\forall x \in H$ $\exists y \in H_+$: $y \geq \pm x$, $\|y\| = \|x\|$. Положим $u = \frac{1}{2}(y + x)$, $v = \frac{1}{2}(y - x)$. Тогда $u, v \in H_+$, $x = u - v$ и

$$(u, v) = \frac{1}{4}(y + x, y - x) = \frac{1}{4}(\|y\|^2 - \|x\|^2) = 0.$$

Обратно, пусть $\forall x \in H \ \exists u, v \in H_+$: $x = u - v$, $u \perp v$. Положим $y = u + v$. Тогда $y \geq \pm x$ и $\|y\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2} = \|x\|$. $\square$

Утверждение 4. *Пусть H_+ — 1-несплющенный конус. Тогда $H_+^* \subset H_+$.*

Доказательство. Пусть $y \in H_+^*$, т. е. $(y, x) \geq 0 \ \forall x \in H_+$. Предположим, что $y \notin H_+$. Тогда $\exists z \in H_+$: $z \geq \pm y$, $\|y\| = \|z\|$. Положим $u = \frac{1}{2}(z + y)$, $v = \frac{1}{2}(z - y)$. Тогда $y = u - v$, $u \perp v$ и $v \neq 0$. Отсюда $(y, v) = -(v, v) < 0$; противоречие. $\square$

Теорема 5. *Пусть H_+ — регулярный конус в H. Тогда он самосопряженный, т. е. $H_+ = H_+^*$.*

Теорема 5 вытекает из утверждений 2 и 4. Заметим, что другим способом теорема 5 доказана в [3].

С помощью двойственного условия, характеризующего ближайшую к элементу x точку конуса [4, теорема 2.2.11], приведем новое доказательство следующей теоремы Моро [5].

Теорема 6 (об ортогональной декомпозиции). *Пусть H — гильбертово пространство, H_+ — замкнутый конус в H и $K_+ = -H_+^*$ — его поляра, т. е.*

$$K_+ = \{x \in H : (x, y) \leq 0 \ \forall y \in H_+\}.$$

Тогда для элемента $x \in H$ следующие утверждения равносильны:

1) $x = y + z$, $y \in H_+$, $z \in K_+$, $(y, z) = 0$;

2) элементы y и z — проекции x на H_+ и K_+ соответственно.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $x = y + z$, $y \in H_+$, $z \in K_+$, $(y, z) = 0$. Если y или z равны 0, то все очевидно. Пусть $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Положим $f = -\frac{z}{\|z\|}$, тогда $\|f\| = 1$, $f \in H_+^*$, $f(y) = 0$ и

$$f(y - x) = f(-z) = \left(-\frac{z}{\|z\|}, -z\right) = \|z\| = \|y - x\|,$$

отсюда согласно теореме 2.2.11 из [4] получаем, что y — проекция элемента x на H_+. Аналогично, взяв $g = -\frac{y}{\|y\|}$, $\|g\| = 1$, $g \in K_+^*$, $g(z) = 0$, имеем

$$g(z - x) = g(-y) = (-y, -y/\|y\|) = \|y\| = \|z - x\|,$$

т. е. z является проекцией элемента x на K_+.

2) $\Longrightarrow$ 1). Обратно, пусть y и z — проекции x на H_+ и K_+ соответственно. Тогда для элемента y согласно теореме 2.2.11 из [4] $\exists u \in H_+^*$, $\|u\| = 1$: $(u, y) = 0$, $(y - x, u) = \|y - x\|$, откуда

$$(y - x, u) = \|y - x\| \, \|u\| \Longrightarrow y - x = \lambda u,$$

где $\lambda > 0$. Следовательно,

$$\lambda = \|y - x\| \Longrightarrow u = \frac{y - x}{\|y - x\|} \Longrightarrow \frac{x - y}{\|x - y\|} \in -H_+^* \\ \Longrightarrow x - y \in -H_+^* \Longrightarrow x = y + (x - y),$$

где $y \perp (x - y)$. Значит, проекция x на K_+ равна $x - y$, т. е. $x - y = z$ и $z \perp y$. $\square$

Теперь мы в состоянии привести другое доказательство импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) в теореме 1 из [3].

Теорема 7. *Пусть конус H_+ в H самосопряжен. Тогда H_+ регулярен.*

Доказательство. Так как $H_+ = H_+^*$, согласно утверждению 2 конус H_+ является 1-нормальным. По теореме 6 если x_+ и z — проекции элемента $x \in H$ на H_+ и $-H_+ = -H_+^*$ соответственно, то $x = x_+ - x_-$, где $x_- = -z \in H_+$ и $(x_+, x_-) = 0$, что согласно утверждению 3 влечет 1-несплющенность конуса H_+, т. е. H_+ — регулярный конус. $\square$

Следующие две теоремы дают описание всех регулярных (самосопряженных) конусов в гильбертовом пространстве.

Теорема 8. *Для любого 1-нормального конуса K в гильбертовом пространстве H существует регулярный конус H_+ в H, содержащий K.*

Доказательство. Пусть N — множество всех 1-нормальных конусов в H, содержащих K, упорядоченное по теоретико-множественному включению. Если L_α — линейно упорядоченное подмножество в N, где $\alpha \in A$, A — множество индексов, то $K_A = \bigcup\limits_{\alpha \in A} K_\alpha$ — 1-нормальный конус. Действительно, K_A — конус, так как если $x, y \in K_A$, то существуют $\alpha, \beta \in A$ такие, что $x \in K_\alpha$, $y \in K_\beta$, и если для определенности, например, $K_\alpha \subset K_\beta$, то

$$x, y \in K_\beta \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in K_\beta \quad \forall \lambda, \mu \geq 0,$$

значит, $\lambda x + \mu y \in K_A$ $\forall \lambda, \mu \geq 0$. Если же $x, -x \in K_A$, то существует $\lambda_0 \in A$ такое, что $x, -x \in K_{\alpha_0} \Longrightarrow x = 0$. Конус K_A 1-нормальный, поскольку если $y \pm x \in K_A$, то аналогично существует $\alpha \in A$ такое, что $y \pm x \in K_\alpha$. Тем самым $\|x\| \leq \|y\|$. Следовательно, K_A — верхняя граница для L_α, так что по лемме Цорна существует максимальный элемент H_+ в N, т. е. максимальный 1-нормальный конус, содержащий K. Покажем, что он регулярен, т. е. является 1-несплющенным. В самом деле, согласно утверждению 2 имеем $H_+ \subset H_+^*$. Докажем, что $H_+ = H_+^*$. Предположим, что существует $y \in H_+^*$ такой, что $y \notin H_+$. Тогда $(y, x) \geq 0$ $\forall x \in H_+$. Рассмотрим конус $\widetilde{H}_+ = H_+ + \{\lambda y\}_{\lambda \geq 0}$. Имеем $\widetilde{H}_+ \supset H_+$, $\widetilde{H}_+ \neq H_+$. Кроме того, для любых двух элементов $z_1, z_2 \in \widetilde{H}_+$ будет $z_1 = x_1 + \lambda_1 y$, $z_2 = x_2 + \lambda_2 y$, где $x_1, x_2 \in H_+$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Отсюда

$$(z_1, z_2) = \lambda_1 \lambda_2 \|y\|^2 + \lambda_1 (y, x_2) + \lambda_2 (y, x_1) + (x_1, x_2) \geq 0.$$

Из утверждения 1 следует, что конус $\widetilde{H}_+$ является 1-нормальным, что противоречит максимальности конуса H_+. Следовательно, $H_+ = H_+^*$, что согласно теореме 7 влечет регулярность конуса H_+. □

Теорема 9. *Регулярные (самосопряженные) конусы в H — это максимальные элементы в множестве 1-нормальных конусов, упорядоченном по включению.*

Действительно, ввиду теоремы 8 максимальный элемент в множестве 1-нормальных конусов является регулярным конусом.

Обратно, всякий регулярный конус в H будет максимальным элементом в множестве 1-нормальных конусов, что вытекает из утверждения 7 и того факта, что гильбертово пространство строго выпукло.

Рассмотрим двойственное описание регулярных конусов.

Утверждение 10. *Пусть для замкнутого конуса H_+ в H верно включение $H_+^* \subset H_+$. Тогда H_+ — 1-несплющенный конус.*

Доказательство. Действительно, из $H_+^* \subset H_+$ следует, что $H_+^* \subset H_+^{**}$, т. е. конус H_+^* 1-нормальный (утверждение 2). Согласно теореме 8 существует регулярный конус K в H, содержащий H_+^*, т. е. $H_+^* \subset K$, откуда следует, что

$$K = K^* \subset H_+^{**} = H_+,$$

отсюда, в свою очередь, получаем, что H_+ — 1-несплющенный конус. □

Теорема 11. *Всякий замкнутый несплющенный конус H_+ содержит регулярный конус.*

Доказательство. Пусть H_+ — замкнутый несплющенный конус. Согласно утверждению 4 имеем $H_+^* \subset H_+$. Тогда $H_+^* \subset H_+^{**} = H_+$, т. е. в силу утверждения 2 конус H_+^* 1-нормальный. По теореме 8 существует регулярный конус K, содержащий H_+^* : $H_+^* \subset K$. Поскольку $K^* = K$, то $K \subset H_+^{**} = H_+$. □

Теорема 12. *Регулярные* (*самосопряженные*) *конусы в H — это минимальные элементы в множестве замкнутых* 1*-несплющенных конусов, упорядоченном по включению.*

Доказательство. В самом деле, если H_+ — регулярный конус, то в силу утверждения 7 и строгой выпуклости гильбертова пространства получаем, что H_+ — минимальный элемент в множестве замкнутых 1-несплющенных конусов. Обратно, пусть H_+ — минимальный элемент в множестве замкнутых 1-несплющенных конусов. В силу утверждения 4 имеем $H_+ \subset H_+$. Предположим, что $H_+^* \neq H_+$. Тогда, поскольку $H_+^{**} = H_+$ в силу замкнутости конуса H_+, выводим, что H_+^* — 1-нормальный конус (утверждение 2). Согласно теореме 8 найдется регулярный конус K такой, что $H_+^* \subset K$, отсюда $K^* = K \subset H_+^{**} = H_+$. Из минимальности H_+ получаем, что $H_+ = K$, а значит, $H_+^* = H_+$; противоречие. $\square$

Следствие 13. 1. *Пусть H_+ —* 1*-нормальный конус. Тогда существует регулярный конус K такой, что $H_+ \subset K \subset H_+^*$.*

2. *Пусть C —* 1*-несплющенный замкнутый конус. Тогда найдется регулярный конус K такой, что $C^* \subset K \subset C$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я.* Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 2. С. 137–183.
2. *Худалов В. Т.* Регулярные конусы в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 193–196.
3. *Худалов В. Т.* В гильбертовом пространстве регулярность конуса равносильна самосопряженности // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 4. С. 616–621.
4. *Худалов В. Т.* Упорядоченные банаховы пространства и их приложения. Владикавказ: Иристон, 1999.
5. *Moreau J.-J.* Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1962. V. 225. P. 238–240.

Статья поступила 5 мая 2000 г.

г. Владикавказ
Северо-Осетинский гос. университет
sid@rno.ssc.ac.ru