Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.929

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Б. Г. Гребенщиков

Аннотация: Изложены методы исследования асимптотической устойчивости и неустойчивости систем с линейным запаздыванием. При некоторых ограничениях на правую часть квазилинейной системы доказана теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Библиогр. 10.

1. Рассмотрим нестационарную линейную систему с последействием следующего вида:

$$dx(t)/dt = e^{\nu t}\left[A(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t)x(t-\tau_k)\right], \quad \nu = \text{const},\ \nu > -1, \tag{1.1}$$

$$\tau_k = \text{const}, \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m, \quad t \ge t_0. \tag{1.2}$$

Здесь $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B_k(t) = \left\{b_{ij}^k(t)\right\}$ — ограниченные достаточное число раз дифференцируемые матрицы размерности n, $x(t) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ является n-мерной вектор-функцией времени t. Запаздывания τ_k $(k = 1, 2, \dots, m)$ постоянны. На начальном множестве $s \in [t_0 - \tau_m, t_0]$ задается начальная вектор-функция $\phi(s)$, определяющая решение в момент времени t_0. Отметим, что к данным системам путем замены аргумента (времени) $t = \ln(\hat{t})$ сводятся системы с несколькими линейными запаздываниями [1] вида

$$d\hat{x}(\hat{t})/d\hat{t} = \hat{t}^{\nu-1}\left[\widehat{A}(\hat{t})\hat{x}(\hat{t}) + \sum_{k=1}^{m} \widehat{B}_k(\hat{t})\hat{x}(\mu_k\hat{t})\right], \quad \hat{t} \ge \hat{t}_0 > 0,\ t_0 = \ln(\hat{t}_0);$$

$$\mu_k = \text{const}, \quad 0 < \mu_k < 1, \quad \hat{x}(\hat{t}) = \hat{\phi}(\hat{t}),\ \hat{t} \le \hat{t}_0 \tag{1.3}$$

(здесь $\hat{\phi}(\hat{t})$ — начальная вектор-функция $\phi(t)$ от переменной $\hat{t}$).

Система (1.1) имеет экспоненциальный множитель в правой части, что является весьма существенным фактором; именно наличие данного множителя не позволяет применять для получения достаточных условий асимптотической устойчивости знакоопределенные функционалы Ляпунова — Красовского [2] (условием применения данных функционалов является ограниченность правой части системы (1.1)). Получение же эффективных достаточных признаков неустойчивости данной системы с помощью знакопеременных функционалов Ляпунова — Красовского мы сейчас покажем. Рассмотрим функционал следующего вида:

$$V(t, x_t) = e^{-\nu t}W(t, x(t)) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \int_{-\tau_k}^{0} x_j^2(t+s)\,ds. \tag{1.4}$$

Здесь $W(t,x(t))$ — ограниченная квадратичная форма переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ (не обязательно знакоопределенная),

$$W(t,x(t))=\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}(t)x_i(t)x_j(t);$$

функции $p_{ij}(t)$ непрерывны и имеют непрерывную производную; α_{kj} — постоянные коэффициенты. Очевидно, данный функционал может не быть знакоопределенным [2]. Составим полную производную функционала в силу выражения (1.1). Имеем равенство

$$\frac{dV(t,x_t)}{dt}=-\nu e^{-\nu t}W(t,x(t))+e^{-\nu t}\frac{\partial W(t,x(t))}{\partial t}+\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(t,x(t))}{\partial x_i}$$
$$\times\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)+b_{ij}^1(t)x_j(t-\tau_1)+b_{ij}^2(t)x_j(t-\tau_2)+\dots+b_{ij}^m(t)x_j(t-\tau_m)\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{k1}\big(x_1^2(t)-x_1^2(t-\tau_k)\big)+\alpha_{k2}\big(x_2^2(t)-x_2^2(t-\tau_k)\big)+\dots+\alpha_{kn}\big(x_n^2(t)-x_n^2(t-\tau_k)\big)\Bigg]. \tag{1.5}$$

Рассмотрим теперь выражение в квадратных скобках в правой части соотношения (1.5), являющееся квадратичной формой переменных $x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)$, $x_1(t-\tau_1),x_1(t-\tau_2),\dots,x_1(t-\tau_m),x_2(t-\tau_1),x_2(t-\tau_2),\dots,x_n(t-\tau_m)$. Допустим, что за счет выбора $W(t,x(t))$ и постоянных α_{kj} нам удалось добиться того, что данная квадратичная форма определенно положительна [2]. Тогда если функционал $V(t,x_t)$ не знакопостоянен (отрицателен), то решение системы (1.1) неустойчиво. В самом деле, остальные члены в правой части равенства (1.5) являются исчезающими функциями, так как содержат множитель $e^{-\nu t}$, следовательно, при достаточно больших t не влияют на знак величины $dV(t,x_t)/dt$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы (аналога теоремы Четаева) о неустойчивости решения систем с запаздыванием [3], откуда и следует неустойчивость решения системы (1.1).

Рассмотрим исходную систему (1.1). Пусть система без запаздывающих членов

$$\frac{d\bar y(t)}{dt}=e^{\nu t}A(t)\bar y(t) \tag{1.6}$$

асимптотически устойчива и ее фундаментальная матрица $\overline{Y}(t,s)$ допускает оценку по норме

$$\|\overline{Y}(t,s,\nu)\|\le Ce^{-\beta(e^{\nu t}-e^{\nu s})},\quad C=\mathrm{const},\ \ C\ge 1,\ \ \beta=\mathrm{const},\ \ \beta>0,\ \ t_0\le s\le t \tag{1.7}$$

(т. е. если рассматривать систему без запаздывающих членов в переменной $\hat t$, то она экспоненциально устойчива); полагаем, что существует матрица $A^{-1}(t)$ (в работе [4] приведен достаточно большой класс систем, для которых данные условия, по крайней мере для достаточно больших t, выполняются). Отметим, что в соотношении (1.7) и далее полагаем $\|x\|=\sup\limits_i|x_i|$, где x_i — компоненты данного вектора. В работах [5, 6] показано, что асимптотическая устойчивость исходной системы (1.1) (или неустойчивость) зависит от асимптотической устойчивости (или неустойчивости) вырожденной (разностной) системы вида

$$z(t)=-\sum_{k=1}^{m}A^{-1}(t)B_k(t)z(t-\tau_k),\qquad z(t)=\varphi(s),\ \ t_0-\tau_m\le s\le t_0. \tag{1.8}$$

Очевидно, система (1.8) является более простой, нежели исходная система (1.1). В то же время исследование устойчивости данных разностных систем хорошо разработано лишь в следующих случаях: либо система (1.8) стационарна [1], либо данная система имеет лишь одно запаздывание (в этом случае можно эффективно использовать аппарат разностных систем [7]). В случае же наличия нескольких запаздываний исследование устойчивости осложняется тем, что данные системы даже в стационарном случае не обладают свойством сохранения устойчивости при малых изменениях запаздываний [3]. В связи с этим представляется весьма полезной следующая теорема (аналог соответствующей теоремы Н. Н. Красовского для систем с запаздыванием [2]), позволяющая получить достаточные условия асимптотической устойчивости решения разностной системы (1.8), учитывающие лишь соотношение (1.2).

Теорема 1. *Решение системы* (1.8) *асимптотически устойчиво, если существует определенно положительная функция* $V(t, z(t))$, *удовлетворяющая оценкам*

$$a\|z(t)\|^2 \leq V(t, z(t)) \leq b\|z(t)\|^2, \quad a = \text{const},\ b = \text{const},\ 0 < a < b, \tag{1.9}$$

такая, что ее первая разность

$$\Delta V(t, z(t)) = V(t, z(t)) - V(t - \tau_m, z(t - \tau_m)),$$

вычисленная вдоль траекторий системы (1.8), *для которых*

$$V(\zeta, z(\zeta) < F(V(t, z(t))), \quad t - \tau_m \leq \zeta < t, \tag{1.10}$$

где $F(r)$ — *какая-либо непрерывная функция такая, что*

$$F(r) > r,\ r \neq 0; \quad F(r'') - F(r') > 0,\ r'' > r', \tag{1.11}$$

удовлетворяет неравенству

$$\Delta V(t, z(t)) < -\Psi(\|z(t)\|), \tag{1.12}$$

где $\Psi(r)$ — *непрерывная положительная функция при* $r \neq 0$, *не зависящая от* $F(r)$.

Доказательство. Вначале покажем, что любое решение $z(t, t_0, \varphi(s))$ при любом $t > t_0$ не выходит из области

$$\|z(t)\|^2 \leq \frac{b}{a} \sup_s \|\varphi(s)\|^2. \tag{1.13}$$

В самом деле, на начальном множестве $s \in [t_0 - \tau_m, t_0]$ данное соотношение выполнено вследствие того, что

$$\|z(t)\|^2 \leq \frac{1}{a} V(t, z(s)) \leq \frac{b}{a} \sup_s \|z(s)\|^2. \tag{1.14}$$

Допустим противное: пусть найдется такой момент $t_* > t_0$, когда впервые

$$\|z(t_*, t_0, \varphi(s)\|^2 > \frac{b}{a} \sup_s \|\varphi(s)\|^2. \tag{1.15}$$

Тогда

$$\|z(t_*, t_0, \varphi(s))\| > \|z(t, t_0, \varphi(s))\|, \quad t_0 - \tau_m \leq t < t_*. \tag{1.16}$$

При этом из (1.15) имеем

$$V(t_*, z(t_*, t_0, \varphi(s))) \geq a\|z(t_*, t_0, \varphi(s))\|^2 > b \sup_s \|\varphi(s)\|^2.$$

Но тогда

$$V(t_*, z(t_*, t_0, \varphi(s))) > V(t, z(t, t_0, \varphi(s))), \quad t < t_*. \tag{1.17}$$

С другой стороны, из неравенств (1.10), (1.12), (1.16) имеем

$$V(t_*, z(t_*, t_0, \varphi(s))) < V(t, z(t, t_0, \varphi(s))). \tag{1.18}$$

Полученное противоречие показывает, что предположение о возможности нарушения неравенства (1.13) неверно, тем самым все решения системы (1.8) остаются в области, определяемой неравенством (1.13).

Покажем теперь, что для любого решения системы (1.8) имеет место предельное равенство

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0,$$

для чего докажем одно вспомогательное утверждение: в случае выполнения неравенства

$$V(t+\tau_m, z(t+\tau_m)) - V(t, z(t)) < -\alpha, \quad \alpha = \text{const}, \ \alpha > 0, \tag{1.19}$$

$$t \geq t_0 + t_{**}: \ t_{**} = \text{const}, \quad t_{**} > 0,$$

на кривых, принадлежащих области (1.13) и удовлетворяющих условию

$$V(t, z(t)) \geq \gamma, \quad \gamma = \text{const}, \ \gamma > 0, \tag{1.20}$$

справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \sup_V (t, z(t)) \leq \gamma_0, \quad 0 < \gamma_0 < \gamma. \tag{1.21}$$

В самом деле, если вдоль некоторой траектории имеет место неравенство $V(t, z(t)) \leq \gamma$ при $t_0 + t_{**} \leq t \leq t_0 + t_{**} + \tau_m$, то оно сохранится при всех $t > t_0 + t_{**} + \tau_m$. Предположим противное: пусть найдется $t = t_1 > t_0 + t_{**} + \tau_m$ такое, что впервые

$$V(t_1, z(t_1)) > \gamma. \tag{1.22}$$

Тогда, учитывая (1.19), (1.20), из (1.22) получаем

$$\gamma < V(t_1, z(t_1)) < V(t_1 - \tau_m, z(t_1 - \tau_m)) \leq \gamma;$$

противоречие. Значит, при любых $t \geq t_0 + t_{**} + \tau_m$ неравенство $V(t, z(t)) \leq \gamma$ справедливо.

Далее, ввиду неравенства (1.19) на траекториях, удовлетворяющих соотношениям (1.20), функция $V(t, z(t))$ остается монотонно убывающей все время, пока выполняется неравенство (1.20), следовательно, траектории, удовлетворяющие данному неравенству, во всяком случае остаются в области (1.13). Теперь для функции $V(t, z(t))$ из неравенства (1.19) последовательно получаем соотношения

$$V(t, z(t)) - V(t-\tau_m, z(t-\tau_m)) < -\alpha, \quad t_0 + t_{**} + \tau_m < t \leq t_0 + t_{**} + 2\tau_m,$$

$$V(t, z(t)) - V(t-2\tau_m, z(t-2\tau_m)) < -2\alpha, \quad t_0 + t_{**} + 2\tau_m < t \leq t_0 + t_{**} + 3\tau_m, \ldots,$$

$$V(t, z(t)) - V(t-k\tau_m, z(t-k\tau_m)) < -k\alpha, \quad t_0 + t_{**} + k\tau_m < t \leq t_0 + t_{**} + (k+1)\tau_m.$$

Но тогда при $t > t_2 = t_0 + t_{**} + \hat{k}\tau_m$, где $\hat{k}$ равно целой части числа

$$\frac{2}{\alpha}\sup_{\xi} V(\xi, z(\xi)) + 1, \quad t_0 + t_{**} \le \xi \le t_0 + t_{**} + \tau_m,$$

в силу оценки (1.13) траектория $z(t, t_0, \phi(s))$ должна войти в область $V(t, z(t)) \le \gamma$ (откуда ввиду доказанного ранее выйти уже не может); допустив противное, мы получим (вследствие наличия неравенства (1.22)), что $V(t, z(t)) < 0$ при $t > t_2$, но это противоречит тому, что данная функция является определенно положительной (при выполнении неравенства (1.22)). Поскольку $\gamma > \gamma_0$ можно выбрать произвольным, предельное соотношение (1.21) верно. Утверждение доказано.

Для доказательства теоремы, учитывая доказанное утверждение, достаточно показать, что для каждого $\gamma > 0$ найдется такое $t_{**}(\gamma) > 0$, что при $t > t_0 + t_{**}(\gamma)$ семейство кривых $z(t, t_0, \phi(s))$, удовлетворяющих условию (1.10), включает в себя все траектории системы (1.8), для которых имеет место неравенство

$$V(t, z(t)) \ge \gamma, \quad t \ge t_0. \tag{1.23}$$

Это утверждение справедливо для числа

$$\gamma_1 = 1 + \frac{b^2}{a}\sup_{s}\|\phi(s)\|^2,$$

так как по доказанному выше траекторий $z(t, t_0, \phi(s))$ в данной области вообще нет. Пусть γ_0 — нижняя грань тех значений γ, для которых наше утверждение справедливо. Тогда по свойствам функции $F(r)$ можно указать такое число $\gamma^*: \ 0 < \gamma^* < \gamma_0$, что

$$F(r) - r > 2\gamma^*, \quad 0 < \gamma_0 - \gamma^* \le r \le \gamma_0 + \gamma^*. \tag{1.24}$$

В свою очередь, по доказанному выше существует число $t_1 \ge \hat{k}\tau_m$ такое, что

$$V(t, z(t, t_0, \phi(s))) < \gamma_0 + \gamma^* \tag{1.25}$$

при всех $t \ge t_0 + t_1$ для данных траекторий $z(t, t_0, \phi(s))$. Следовательно, траектория, удовлетворяющая неравенству

$$V(t, z(t, t_0, \phi(s))) \ge \gamma_0 - \gamma^*, \quad t \ge t_0 + t_1 + \tau_m, \tag{1.26}$$

удовлетворяет также соотношениям

$$V(\zeta, z(\zeta)) < \gamma_0 + \gamma^* < F(V(t, z(t))), \quad t - \tau_m \le \zeta \le t. \tag{1.27}$$

Таким образом, число $t_1 + \tau_m$ таково, что на кривых

$$V(t, z(t)) \ge \gamma_0 - \gamma^*, \quad t \le t_0 + t_1 + \tau_m, \tag{1.28}$$

выполняется соотношение (1.19), что противоречит условию выбора числа γ_0 как нижней грани чисел γ. Полученное противоречие и доказывает теорему.

2. Рассмотрим нелинейную систему

$$d\hat{x}(\hat{t})/d\hat{t} = \widehat{A}(\hat{t})\hat{x}(\hat{t}) + \sum_{k=1}^{m}\widehat{B}_k(\hat{t})\hat{x}(\mu_k\hat{t}) + \widehat{R}(\hat{t}, \hat{x}(\hat{t}), \hat{x}_\mu(\hat{t}))$$
$$+ \widehat{H}(\hat{t}, \hat{x}(\hat{t}), \hat{x}_\mu(\hat{t})), \ \ \hat{t} \ge \hat{t}_0 > 0; \quad \hat{x}(\hat{t}) = \hat{\phi}(\hat{t}), \quad \hat{t} \le \hat{t}_0. \tag{2.1}$$

Здесь $\widehat{R}(\hat{t}, \hat{x}(\hat{t}), \hat{x}_\mu(\hat{t}))$, $\widehat{H}(\hat{t}, \hat{x}(\hat{t}), \hat{x}_\mu(\hat{t}))$ — нелинейные вектор-функции, зависящие от времени $\hat{t}$, вектор-функции $\hat{x}(\hat{t})$ и запаздывающих членов, собранных в вектор-функцию $\hat{x}_\mu(\hat{t})$. Полагаем, что нелинейная вектор-функция $\widehat{R}(\hat{t}, u, v)$ удовлетворяет равенству

$$\widehat{R}(\hat{t}, 0, 0) = 0 \tag{2.2}$$

и в области, определяемой соотношением

$$\|\hat{x}\| < h, \quad h = \text{const}, \;\; h > 0, \tag{2.3}$$

справедливо неравенство

$$\|\widehat{R}(\hat{t}, u, v)\| \le \varepsilon(\|u\| + \|v\|); \tag{2.4}$$

ε — достаточно малое положительное число; в свою очередь, нелинейная вектор-функция $\widehat{H}(\hat{t}, \hat{x}(\hat{t}), \hat{x}_\mu(\hat{t}))$ в этой же области удовлетворяет неравенству

$$\|\widehat{H}(\hat{t}, \hat{x}(\hat{t}), \hat{x}_\mu(\hat{t}))\| \le \eta(\hat{t}), \tag{2.5}$$

где $\eta(\hat{t})$ — непрерывная ограниченная функция. Далее, полагаем, что линейная однородная система с запаздыванием

$$\frac{d\hat{y}(\hat{t})}{d\hat{t}} = \widehat{A}(\hat{t})\hat{y}(\hat{t}) + \sum_{k=1}^{m} \widehat{B}_k(\hat{t})\hat{y}_(\mu_k\hat{t}), \;\; \hat{t} \ge \hat{t}_0 > 0, \quad \hat{y}(s_0) = \hat{\phi}(s_0): \;\; s_0 \le t_0 \tag{2.6}$$

асимптотически устойчива, причем ее решение удовлетворяет оценке

$$\hat{y}(\hat{t}) \le C_1 \left(\frac{\hat{t}}{\hat{t}_0}\right)^{-\beta_1} \sup_{s_0} \|\hat{\phi}(s_0)\|, \quad C_1 = \text{const}, \;\; C_1 > 1, \;\; \beta_1 = \text{const}, \;\; \beta_1 > 0. \tag{2.7}$$

Отметим, что константы C_1, β_1 одни и те же для любых начальных моментов времени, удовлетворяющих неравенству $\hat{t}_0 \ge \bar{t}_0$; при этом также считаем, что система (1.6) — линейная система без запаздывающих членов — асимптотически устойчива, причем справедлива оценка (1.7) (в работах [5, 7] автором указаны методы, позволяющие получать (при выполнении соотношения (1.7)) оценки вида (2.7).

Переходя к переменной t, рассмотрим следующую возмущенную систему:

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^t \left(A(t)y(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t)y(t - \tau_k) + H(t, y(t), y_\tau(t)) \right), \quad t \ge t_0. \tag{2.8}$$

Здесь $H(t, y(t), y_\tau(t))$ — нелинейная вектор-функция $\widehat{H}(\hat{t}, \hat{y}(\hat{t}), \hat{y}_\mu(\hat{t}))$, полученная при переходе к переменной t. Полагаем, что при $\|y(t)\| < h_1 < h$, где $h_1 = \text{const}$, $h_1 > 0$, для вектор-функции $\hat{y}(\hat{t})$ справедливо неравенство (2.3).

Теорема 2. *Пусть решение $y(t)$ возмущенной системы* (2.8) *определяется начальной вектор-функцией $\phi(s_0)$, $t_0 - \tau_m \le s_0 \le t_0$, удовлетворяющей оценке $\|\phi(s_0)\| < \delta < h_1 < h$, где δ — положительная постоянная. Тогда при выполнении неравенства* (2.5) *справедлива оценка*

$$\max_t \|y(t)\| \le C_1 q^n \sup_{s_0} \|\phi(s_0)\| + M_1 \sup_t \|\eta(t)\|, \quad t_0 + n\tau_m < t \le t_0 + (n+1)\tau_m, \tag{2.9}$$

$$q = \text{const}, \;\; 0 < q < 1, \;\; M_1 = \text{const}, \;\; M_1 > 0$$

(*константы* q, M_1 *одни и те же при любых* $t_0 \geq \bar{t}_0$ *и более подробно будут определены в ходе доказательства*).

Доказательство. Учитывая (1.6), запишем решение возмущенной системы (2.8) в интегральной форме [1]:

$$y(t) = Y(t,t_0)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{m} Y(t,s)e^s B_k(s)y(s-\tau_k)\,ds$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} Y(t,s)e^s H((s),y(s),y_\tau(s))\,ds : Y(t,s) = \overline{Y}(t,s,1). \qquad (2.10)$$

Будем исследовать поведение возмущенной системы по шагам длиной τ_m. Пусть $\bar{i}\tau_1 \leq \tau_m \leq (\bar{i}+1)\tau_1$, где $\bar{i}$ — целое число. Исходя из равенства (2.10), при $t \in l_1$, где полуинтервал времени l_1 равен $(t_0, t_0+\tau_m]$, представим решение системы (2.8) в операторном виде:

$$y(t) = T_{t,0}y(s) + J_{t,0}H(s,y(s),y_\tau(s)). \qquad (2.11)$$

Здесь $T_{t,0}$ — линейный оператор (оператор сдвига [1]), имеющий следующий вид:

$$T_{t,0}w(s) = Y(t,t_0)w(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \left[\sum_{k=1}^{m} Y(t,s)e^s B_k(s)w(s-\tau_k)\right] ds. \qquad (2.12)$$

Очевидно, данный оператор переводит вектор-функцию $w(t)$, заданную на интервале $L_0 = [t_0-\tau_m, t_0]$, в вектор-функцию $w(t)$, определенную уже на полуинтервале L_1. Аналогично можно определить оператор $T_{t,i}$, переводящий вектор-функцию $w(t)$, заданную на полуинтервале $L_i = (t_0+(i-1)\tau_m, t_0+i\tau_m])$, в вектор-функцию, определенную на полуинтервале L_{i+1}. Отметим еще некоторые свойства данного оператора. Оператор $T_{t,0}$ равномерно ограничен, а именно справедливо неравенство

$$\|T_{t,0}w(s)\| \leq M_2 \sup_{s_0} \|w(s_0)\|, \quad s_0 \in L_0, \quad M_2 = \text{const},\ M_2 > 1. \qquad (2.13)$$

Докажем это свойство. Учитывая соотношение (2.6), рассмотрим равенство (2.12). Пусть $\hat{y}(t) = T_{t,0}\phi(s)$. Положим

$$\bar{y}_i = \max_{t_0+i\tau_m \leq t \leq (i+1)\tau_m} \|\bar{y}(t)\|, \quad i = 0,1,\ldots,\bar{i}.$$

Ввиду неравенства (1.7) для любой непрерывной вектор-функции $w(t)$ верна оценка

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t} Y(t,s)e^s B_k(s)w(s)\,ds\right\| \leq \int\limits_{t_0}^{t} Ce^{-\beta(e^t-e^s)}e^s b_k\|w(s)\|\,ds \leq \frac{C}{\beta}b_k \sup_s \|w(s)\|, \qquad (2.14)$$
$$\|B_k(t)\| \leq b_k, \quad b_k = \text{const}, \quad b_k > 0, \quad k = 1,2,\ldots,m.$$

Тогда при $t_0 \leq t \leq t_0+\tau_1$ из соотношений (2.10), (2.14) получаем

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_0+\tau_1} \|\bar{y}(t)\| = \bar{y}_0 \leq C\left(1 + \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{m} b_k\right) \sup_{s_0} \|\phi(s_0)\|. \qquad (2.15)$$

Вследствие того, что $C \geq 1$, имеем неравенство

$$C\left(1+\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{m} b_k\right)\sup_{s_0}\|\phi(s_0)\| = M_3\sup_{s_0}\|\phi(s_0)\| > \sup_{s_0}\|\phi(s_0)\|. \tag{2.16}$$

Далее, на следующем шаге при $t_0+\tau_1 \leq t \leq t_0+2\tau_1$ из соотношения, аналогичного (2.15), принимая во внимание неравенство (2.16), выводим оценку

$$\bar{y}_1 \leq (M_3)^2 \sup_{s_0}\|\phi(s_0)\|,$$

и т. д. Наконец, при $t_0+\bar{i}\tau_1 \leq t \leq t_0+\tau_m$ приходим к оценке

$$\bar{y}_{\bar{i}} \leq (M_3)^{\bar{i}+1} \sup_{s_0}\|\phi(s_0)\|.$$

Учитывая, что $M_3 > 1$, и полагая $M_2 = (M_3)^{\bar{i}+1}$, получаем оценку (2.13). Подобную оценку можно доказать и для любого оператора $T_{t,n}$.

Оценка (2.13) является весьма грубой и не учитывает особенности оператора $T_{t,0}$. Для того чтобы получить более точную оценку, характеризующую его асимптотические свойства, заметим, что решение невозмущенной системы $\hat{y}(t)$ (в переменной t), определенное в начальный момент времени t_0 вектор-функцией $\phi(s)$, удовлетворяет (в соответствии с неравенством (2.7)) экспоненциальной оценке вида

$$\|\hat{y}(t)\| \leq C_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} \sup_{s_0}\|\phi(s_0)\|. \tag{2.17}$$

Тогда с учетом (2.17) имеем

$$\|\hat{y}(t)\| = \left\| T_{t,n}\prod_{i=1}^{n-1} T_{s_i,i}\phi(s_0)\right\| \leq C_1 q^n \sup_{s_0}\|\phi(s_0)\|, \tag{2.18}$$

$$t_n < t \leq t_{n+1}, \quad q = e^{-\beta_1\tau_m}, \quad t_{i-1} < s_i \leq t_i.$$

Далее, в равенстве (2.11) $J_{t,0}$ — нелинейный оператор, допускающий (ввиду неравенств (2.5),(2.7)) при $t \in L_1$ следующую оценку:

$$\|J_{t,0}H(s,y(s),y_\tau(s))\| \leq \int_{t_0}^{t} Ce^{-\beta(t-s)}\eta(s)\,ds \leq \frac{CN}{\beta}, \quad N = \sup_{-\infty<t<\infty}\eta(t). \tag{2.19}$$

Подобную оценку можно получить для любого нелинейного оператора $J_{t,n}$, $t \in L_{n+1}$.

Рассмотрим вновь равенство, аналогичное равенству (2.11), уже при $t \in L_2$. Имеем

$$y(t) = T_{t,1}T_{s_1,1}\phi(s_0) + T_{t,1}J_{s_1,0}H(s_1,y(s_1),y_\tau(s_1)) + J_{t,1}H(s,y(s),y_\tau(s)). \tag{2.20}$$

Из данного равенства, учитывая оценки (2.18) и (2.19), получаем неравенство

$$\|y(t)\| \leq C_1 q \sup_{s_0}\|\phi(s_0)\| + \frac{CN}{\beta}(C_1+1).$$

Продолжая подобные рассуждения, при $t \in L_{n+1}$ имеем

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq C_1 q^n \sup_{s_0}\|\phi(s_0)\| + \frac{CN}{\beta}(C_1q^{n-1}+C_1q^{n-2}+\dots+C_1+1)\\ &< C_1q^n\sup_{s_0}\|\phi(s_0)\| + \frac{CN}{\beta(1-q)}(C_1+1-q). \end{aligned}\tag{2.21}$$

Полагая теперь $M_1 = \frac{CN}{\beta(1-q)}(C_1 + 1 - q)$, приходим к оценке (2.9). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь более сложную систему (2.1) (от t). Имеем

$$\frac{dx(t)}{dt} = e^t\left(A(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t)x(t-\tau_k) + R(t,x(t),x_\tau(t)) + H(t,x(t),x_\tau(t))\right), \tag{2.22}$$

$$t \geq t_0, \quad x(s_0) = \phi(s_0): \ \ t_0 - \tau_m \leq s_0 \leq t_0.$$

Рассмотрим соответствующее (2.22) интегральное уравнение. Обозначим

$$u_n(t) = x(t) - T_{t,n}x(s) - J_{t,n}H(s,x(s),x_\tau(s)), \quad t \in L_{n+1}.$$

Учитывая соотношения (1.7), (2.4), (2.5), методами, аналогичными использованным в работе [8], получаем в достаточно малой окрестности начала координат неравенства

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\| &\leq \int_{t_n}^{t} C^{-\beta(e^t-e^s)}e^s\|R(s,x(s),x_\tau(s))\|\,ds \\ &\leq \varepsilon\int_{t_n}^{t} e^{-\beta(e^t-e^s)}e^s[\|x(s) - T_{s,n}x(\zeta) - J_{s,n}H(\zeta,y(\zeta),y_\mu(\zeta))\| \\ &\qquad + \|T_{s,n}x(\zeta)\| + \|J_{s,n}H(\zeta,y(\zeta),y_\tau(\zeta))\|]\,ds, \quad \zeta \in L_n.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Далее, используя оценки (2.13), (2.19), имеем более грубое неравенство:

$$\|u_n(t)\| \leq \varepsilon\int_{t_n}^{t} Ce^{-\beta(e^t-e^s)}e^s\|u_n(s)\|\,ds + \frac{C\varepsilon}{\beta}(M_2\sup_{t\in L_n}\|x(t)\| + N) \tag{2.24}$$

Умножив обе части соотношения (2.24) на $e^{\beta e^t}$ и обозначив $v_n = e^{\beta e^t}\|u_n\|$, приходим к неравенству

$$v_n \leq f(t) + C\varepsilon\int_{t_n}^{t} e^s v_n(s)\,ds, \quad f(t) = \frac{C\varepsilon}{\beta}(M_2\sup_{t\in L_n}\|x(t)\| + N)e^{\beta e^t}. \tag{2.25}$$

Воспользовавшись леммой Беллмана — Гронуолла [1, 9], получаем из последнего выражения следующие соотношения:

$$v_n \leq f(t) + C\varepsilon\int_{t_n}^{t} f(s)e^s\big(e^{C\varepsilon\int_s^t e^r\,dr}\big) = f(t) + C\varepsilon\int_{t_n}^{t} f(s)e^{s+C\varepsilon(e^t-e^s)}\,ds. \tag{2.26}$$

Возвратимся к величине u_n. Учитывая неравенство (2.25), выводим из соотношений (2.26) оценку

$$\sup_{t\in L_{n+1}}\|u_n(t)\| \leq C\varepsilon(\beta_2)^{-1}[M_2\sup_{t\in L_n}\|x(t)\| + N], \quad \beta_2 = \beta - C\varepsilon, \tag{2.27}$$

при этом мы предполагаем величину ε настолько малой, что

$$\beta_2 = \beta - C\varepsilon > 0. \tag{2.28}$$

Теорема 3. *Пусть решение возмущенной системы* (2.22) *определено в момент* t_0 *начальной вектор-функцией* $\phi(t)$ *такой, что* $\sup_{t\in L_0}\|\phi(t)\| < \delta \le h_1 < h$. *При достаточно малых* δ, ε *для решения возмущенной системы* (2.22) *справедлива оценка, аналогичная оценке* (2.9), *т. е. решение системы*

$$\frac{dx^0(t)}{dt} = e^t\left(A(t)x^0(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t)x^0(t-\tau_k) + R(t, x^0(t), x^0_\mu(t))\right) \tag{2.29}$$

устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Рассматривая возмущенную систему (2.1) (точнее, соответствующее ей интегральное равенство), имеем следующее неоднородное операторное уравнение:

$$x(t) = T_{t,n}x(s) + J_{t,n}H(s, x(s), x_\mu(s)) + u_n(t), \quad t \in L_{n+1}.$$

Запишем решение данной системы, используя формулу вариации постоянных [10]. Учитывая оценки (1.7), (2.4), (2.5), (2.18) и, наконец, (2.27), методами, аналогичными примененным в ходе доказательства теоремы 2, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned}\sup_{t\in L_{n+1}}\|x(t)\| &\le C_1q^n \sup_{t\in L_0}\|\phi(t)\| \\ &\quad + C_1\sum_{i=1}^{n} q^{n-i}(N + \sup_{t\in L_i}\|u_{i-1}(t)\|) + \sup_{t\in L_{n+1}}\|u_n(t)\| + N \\ &\le \frac{C_1}{q}\left[q^{n+1}\sup_{t\in L_0}\|\phi(t)\| + \sum_{i=1}^{n+1} q^{n+1-i}(N(1 + C\varepsilon/\beta_2) + CM_2\varepsilon/\beta_2 \sup_{t\in L_{i-1}}\|x(t)\|)\right]\end{aligned} \tag{2.30}$$

(при этом мы учли, что $C_1 > 1$). Обозначив

$$w_i = q^{-i}\sup_{t\in L_i}\|x(t)\|, \tag{2.31}$$

из соотношения (2.30) получаем

$$w_{n+1} \le \frac{C_1}{q}\left[w_0 + \sum_{i=1}^{n+1}(\varepsilon_1 w_{i-1} + N(1 + C\varepsilon/\beta_2)q^{-i+1})\right], \quad \varepsilon_1 = CM_1\varepsilon(\beta_2 q)^{-1}. \tag{2.32}$$

Вследствие того, что правая часть неравенства (2.32) положительна, имеем $w_n \le \widehat{w}_n$, где $\widehat{w}_n$ — решение неоднородного разностного уравнения

$$\widehat{w}_{n+1} = \frac{C_1}{q}\left[w_0 + \sum_{i=1}^{n+1}(\varepsilon_1\widehat{w}_{i-1} + N(1 + C\varepsilon/\beta_2)q^{-i+1})\right].$$

Далее, справедливо соотношение

$$\widehat{w}_{n+1} - \widehat{w}_n = \frac{C_1}{q}[\varepsilon_1\widehat{w}_n + N(1 + C\varepsilon/\beta_2)q^{-n}], \quad n \ge 1. \tag{2.33}$$

Очевидно, решением неоднородного разностного уравнения (2.33) является следующее выражение [10]:

$$\widehat{w}_{n+1} = \left(1 + \varepsilon_1\frac{C_1}{q}\right)^n \widehat{w}_1 + \frac{C_1N}{q}\left(1 + \frac{C\varepsilon}{\beta_2}\right)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 + \varepsilon\frac{C_1}{q}\right)^i q^{i-n}\right]. \tag{2.34}$$

Возьмем теперь величину $\varepsilon_1 > 0$ (а значит, и исходную величину $\varepsilon > 0$) настолько малой, что наряду с неравенством (2.28) выполняется также соотношение $q\bigl(1+\varepsilon_1\frac{C_1}{q}\bigr) = \hat{q}$, $\hat{q} < 1$. Тогда ввиду соотношений (2.30)–(2.32) из выражения (2.34) следует оценка

$$\begin{aligned} \sup_{t\in L_{n+1}} \|x(t)\| &\le C_1(1+\varepsilon_1)\left(1+\varepsilon_1\frac{C_1}{q}\right)^n q^n \sup_{t\in L_0}\|x(t)\| \\ &+ \frac{C_1N}{q}\left(1+\frac{C\varepsilon}{\beta_2}\right)\left[\sum_{i=0}^{n}\left(1+\varepsilon\frac{C_1}{q}\right)^i q^{i+1}\left(1+\varepsilon_1\frac{C_1}{q}\right)^i\right] \\ &\le C_1(1+\varepsilon_1)\hat{q}^n \sup_{t\in L_0}\|x(t)\| + C_1N(1+C\varepsilon/\beta_2)(1-\hat{q})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Мы получили оценку, аналогичную оценке (2.9). Отсюда вытекает ограниченность решения $x(t)$, а следовательно, и устойчивость нулевого решения системы (2.29) при постоянно действующих возмущениях [2]. Теорема доказана.

Замечание. Иногда в понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях включают также и устойчивость по отношению к малым возмущениям отклонений аргумента (запаздывания) [2]. Однако вследствие наличия экспоненциального множителя в правой части системы (2.7) уже для линейной системы (2.6) (в том случае, когда матрицы $A(t), B_k(t)$ являются постоянными) сколь угодно малые изменения отклонений аргумента могут повлечь неустойчивость системы (2.6) [5]. Это возникает в результате того, что подобным свойством обладает и вырожденная система [3]. Поэтому мы не включаем в понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях устойчивость по отношению к малым возмущениям отклонений аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.; Л.: Физматгиз, 1959.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск, 1984. С. 18–29.
5. *Гребенщиков Б. Г.* Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск, 1983. С. 25–34.
6. *Гребенщиков Б. Г.* О неустойчивости решения одной стационарной системы с линейным запаздыванием // Изв. Уральского гос. ун-та. 1999. № 14. С. 29–36. (Математика и механика. Вып. 2).
7. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости линейных систем с постоянным запаздыванием и с экспоненциальными коэффициентами // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания. Л., 1990. С. 138–148.
8. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости одного класса квазилинейных систем с постоянным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 280–285.
9. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М. Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
10. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

Статья поступила 15 ноября 1999 г.

г. Екатеринбург
Уральский гос. университет